УДК 513.88

ОБ ОДНОЙ ХАРАКТЕРИСТИКЕ ЭЛЕМЕНТА НАИЛУЧШЕГО ПРИБЛИЖЕНИЯ В ВЕКТОРНОМ НОРМИРОВАННОМ ПРОСТРАНСТВЕ

Г.Я.Ярахмедов

Известно достаточно много условий, характеризующих элемент наилучшего приближения в произвольном векторном нормированном пространстве. Исходной работой в этом направлении является статья М.Г.Крейна [1]. Важную роль сыграла также работа С.М. Никольского [3]. Следует отметить и работы С.Я.Хавинсона [4], И.Зингера [5], Г.Ш.Рубинштейна [6], А.Л.Гаркави [7] и многих других. Обстоятельную библиографию по этому вопросу можно найти в упомянутой работе [5].

В предлагаемой заметке даётся ещё один критерий наилучшего приближения в векторном нормированном пространстве.

Пусть S - бикомпактное топологическое пространство; $C(S)$ - множество всех непрерывных комплекснозначных функций, определенных на S; G - векторное подпространство в $C(S)$; $x \in C(S) \setminus \overline{G}$ ($\overline{G}$ - замыкание G). Пусть, далее,

$$\mathcal{E}(x) = \inf_{g \in G} \|x-g\|_{C(S)} = \inf_{g \in G} \max_{s \in S} |x(s)-g(s)| ,$$

$$\Omega_f = \{ s \in S : |f(s)| = \|f\|_{C(S)} \} \; (f \in C(S)) .$$

Так как f непрерывна на S, то множество Ω_f замкнуто. Поэтому из бикомпактности пространства S следует, что все множества Ω_f бикомпактны (соответствующие определения см. в [9]).

ТЕОРЕМА I (признак наименьшего уклонения в $C(S)$).

П у с т ь $g^* \in G$. Д л я т о г о, ч т о б ы

$$\|x-g^*\|_{C(S)} = \mathcal{E}(x),$$

н е о б х о д и м о и д о с т а т о ч н о, ч т о б ы

$$\max_{s\in\Omega_{x-g}} Re\left\{[x(s)-g(s)]\cdot\overline{[g(s)-g^*(s)]}\right\} \leq 0, \qquad [*]$$

к а к о в а б ы н и б ы л а ф у н к ц и я $g \in G$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. <u>Необходимость.</u> Для каждой функции $g \in G$ имеем:

$$|x(s)-g^*(s)|^2 = |[x(s)-g(s)]+[g(s)-g^*(s)]|^2 =$$
$$= |x(s)-g(s)|^2 + 2Re\left\{[x(s)-g(s)]\cdot\overline{[g(s)-g^*(s)]}\right\} +$$
$$+|g(s)-g^*(s)|^2 \geq |x(s)-g(s)|^2 + 2Re\left\{[x(s)-g(s)]\cdot\overline{[g(s)-g^*(s)]}\right\}.$$

Если $s\in\Omega_{x-g}$, то $\|x-g\|_{C(S)} = |x(s)-g(s)|$. Следовательно,

$$\|x-g^*\|^2_{C(S)} = \mathcal{E}^2(x) \leq \|x-g\|^2_{C(S)} = |x(s)-g(s)|^2,$$

и тем более

$$|x(s)-g^*(s)|^2 \leq |x(s)-g(s)|^2.$$

Поэтому для каждого $s\in\Omega_{x-g}$

$$2Re\left\{[x(s)-g(s)]\cdot\overline{[g(s)-g^*(s)]}\right\} \leq 0,$$

так что

$$\max_{s\in\Omega_{x-g}} Re\left\{[x(s)-g(s)]\cdot\overline{[g(s)-g^*(s)]}\right\} \leq 0,$$

и условие $[*]$ выполнено для каждой функции $g \in G$.

<u>Достаточность.</u> В силу $[*]$, для любого вещественного числа ε

$$\max_{s\in\Omega_{x-g^*-\varepsilon g}} Re\left\{[x(s)-g^*(s)-\varepsilon g(s)]\cdot\varepsilon\overline{g(s)}\right\} \leq 0,$$

и потому для любого $s\in\Omega_{x-g^*-\varepsilon g}$

$$Re\left\{[x(s)-g^*(s)-\varepsilon g(s)]\cdot\varepsilon\overline{g(s)}\right\} \leq 0.$$

Отсюда, если $\varepsilon < 0$, следует неравенство

$$\operatorname{Re}\{[x(s)-g^*(s)-\varepsilon g(s)]\cdot\overline{g(s)}\}\geqslant 0 .$$

Пусть $\{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots\}$ – произвольная последовательность отрицательных чисел, сходящаяся к нулю. Для каждого $n = 1, 2, \dots$ возьмем некоторый элемент $s_n \in \Omega_{x-g^*-\varepsilon_n g}$ (заметим, что, в силу бикомпактности множеств вида Ω_{x-g}, для каждого $g \in G$ множество Ω_{x-g} не пусто). Так как S – бикомпактное топологическое пространство, то можем и будем считать, что последовательность $\{s_1, s_2, \dots\}$ элементов пространства S сходится к некоторому пределу $s_\infty \in S$.

Но

$$|x(s_\infty)-g^*(s_\infty)| = \lim_{n\to\infty}|x(s_n)-g^*(s_n)-\varepsilon_n g(s_n)| =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\|x-g^*-\varepsilon_n g\|_{C(S)} = \|x-g^*\|_{C(S)},$$

и потому $s_\infty \in \Omega_{x-g^*}$.

Кроме того, очевидно,

$$\operatorname{Re}\{[x(s_\infty)-g^*(s_\infty)]\cdot\overline{g(s_\infty)}\} =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\operatorname{Re}\{[x(s_n)-g^*(s_n)-\varepsilon_n g(s_n)]\cdot\overline{g(s_n)}\}\geqslant 0 .$$

Следовательно,

$$\max_{s\in\Omega_{x-g^*}}\operatorname{Re}\{[x(s)-g^*(s)]\cdot\overline{g(s)}\}\geqslant 0 ,$$

и, в силу известной теоремы А.Н.Колмогорова [2], тогда $\|x-g^*\|_{C(S)} = \mathcal{E}(x)$.

Случай, когда E – вещественное векторное пространство, а G – его конечномерное подпространство, рассмотрен в [8].

ЗАМЕЧАНИЕ. Условие $[*]$, как нетрудно видеть, эквивалентно следующему условию $[\ast\ast]$: для любого $g \in G$ существует элемент $s = s^g \in S$ такой, что

1) $\operatorname{Re}\{[x(s)-g(s)]\cdot\overline{[g(s)-g^*(s)]}\}\leqslant 0$,

2) $|x(s)-g(s)| = \max\limits_{s'\in S}|x(s')-g(s')|$.

Действительно, импликация $[*] \Longrightarrow [\ast\ast]$ очевидна.

Обратно, пусть имеет место $[*]$, $\varepsilon<0$ и $g\in G$. Существует $s=s^g\in S$ такой, что

1) $Re\{[x(s)-g^*(s)-\varepsilon g(s)]\cdot\overline{g(s)}\}\geqslant 0$,

2) $|x(s)-g^*(s)-\varepsilon g(s)|=\|x-g^*-\varepsilon g\|_{C(S)}$.

Если $\{\varepsilon_1,\varepsilon_2,\ldots\}$ – отрицательная нуль-последовательность чисел, то для каждого n = 1,2,... найдется элемент $s_n=s_n^g$ такой, что

1) $Re\{[x(s_n)-g^*(s_n)-\varepsilon_n g(s_n)]\cdot\overline{g(s_n)}\}\geqslant 0$,

2) $|x(s_n)-g^*(s_n)-\varepsilon_n g(s_n)|=\|x-g^*-\varepsilon_n g\|_{C(S)}$.

Тогда если $s_n\to s_\infty$, то

$$|x(s_\infty)-g^*(s_\infty)|=\|x-g^*\|_{C(S)}$$

и

$$Re\{[x(s_\infty)-g^*(s_\infty)]\cdot\overline{g(s_\infty)}\}\geqslant 0,$$

так что

$$\max_{s\in\Omega_{x-g^*}} Re\{[x(s)-g^*(s)]\overline{g(s)}\}\geqslant 0 .$$

Ввиду произвольности $g\in G$, отсюда следует, что $\|x-g^*\|_{C(S)}=\mathcal{E}(x)$, и потому, по теореме I, выполнено условие $[*]$.

ТЕОРЕМА 2. Пусть E – векторное нормированное пространство, G – подпространство в E , $x_0\in E\setminus\overline{G}$, $g^*\in G$. Для того, чтобы g^* являлся элементом наилучшего приближения для x_0 ($\|x_0-g^*\|=\inf_{g\in G}\|x-g\|$), необходимо и достаточно, чтобы для каждого $g\in G$ существовал функционал $f^g\in E'$ такой, что

$$\|f^g\|=1 , \tag{1}$$

$$|f^g(x_0-g)|=\|x_0-g\|, \tag{2}$$

$$Re\{f^g(x_0-g)\cdot f^g(g-g^*)\}\leqslant 0 . \tag{3}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть E'' – второе сопряженное к E . Рассмотрим отображение $\varkappa: x\to\dot{x}$ пространства E в E'', определяемое равенством $\hat{x}(x')=x'(x)$ для любого $x'\in E'$ и называемое естественным вложением E в E''. Из теоремы Хана-Банаха вытекает, что естественное вложение E в E'' есть изометрический изоморфизм между E и $\hat{E}$ - множеством значений отображения $\varkappa$.

Кроме того, для каждого $x\in E$ его образ $\hat{x}=\varkappa(x)$ при отображении $\varkappa$ $\sigma(E',E)$ - непрерывен на E', так что $\hat{x}\in C(E)\subset C(S_{E'})$ (непрерывность в топологии $\sigma(E',E)$), где

$$S_{E'}=\{x'\in E' : \|x\|\le 1\} .$$

Но единичный шар $S_{E'}$ $\sigma(E',E)$ - компактен и $\hat{G}=\varkappa(G)$ - подпространство в $C(S_{E'})$.

Имеем далее:

$$\|\hat{x}_0-\hat{g}^*\|=\|\varkappa(x_0)-\varkappa(g^*)\|=\|\varkappa(x_0-g^*)\|=\|x_0-g^*\|=$$

$$=\inf_{g\in G}\|x_0-g\|=\inf_{g\in G}\|\varkappa(x_0-g)\|=\inf_{\hat{g}\in\hat{G}}\|\hat{x}_0-\hat{g}\| .$$

Таким образом, $\widehat{g^*}$ - элемент наилучшего приближения для $\hat{x}_0$, так что, в силу замечания к теореме I, это возможно тогда и только тогда, когда для каждого $\hat{g}\in\hat{G}$ существует линейный функционал $f^g\in S_{E'}$ такой, что

1) $Re\{[\hat{x}_0(f^g)-\hat{g}(f^g)]\cdot\overline{[\hat{g}(f^g)-\hat{g}^*(f^g)]}\}\le 0$,

2) $|\hat{x}_0(f^g)-\hat{g}(f^g)|=\max\limits_{f\in S_{E'}}|\hat{x}_0(f)-\hat{g}(f)|$

Условия I) и 2) можно переписать соответственно в виде

$$Re\{f^g(x_0-g)\cdot\overline{f^g(g-g^*)}\}\le 0, \tag{2}$$

$$|f^g(x_0-g)|=\|x_0-g\| . \tag{3}$$

Из (3) и условия $f^g\in S_{E'}$ следует условие (I) теоремы.

Из доказательства теоремы 2 легко усмотреть справедливость следующего утверждения:

ТЕОРЕМА 2$'$. Пусть E - векторное нормированное пространство, G - подпространство в E, $x_0\in E\setminus\overline{G}$, $g^*\in G$, Γ - $\sigma(E',E)$ - замкнутое подмножество в $S_{E'}$, обладающее тем свойством, что для всякого $x \in E$ существует линейный функционал $f \in \Gamma$ такой, что $|f(x)| = \|x\|$. Для того, чтобы $\|x_0 - g^*\| = \inf_{g \in G} \|x_0 - g\|$, необходимо и достаточно, чтобы для каждого $g \in G$ существовал $f^g \in \Gamma$, удовлетворяющий условиям (2) и (3) теоремы 2.

Критерий теоремы 2 может быть сформулирован в более удобной форме.

ТЕОРЕМА 3. Пусть E - векторное нормированное пространство, G - векторное подпространство в E, $x_0 \in E \setminus \overline{G}$, $g^* \in G$. Для того, чтобы g^* являлся элементом наилучшего приближения для x_0, необходимо и достаточно, чтобы для любого $g \in G$ существовал линейный функционал f^g, удовлетворяющий условиям:

$$\|f^g\| = 1, \tag{1}$$

$$f^g(x_0 - g) = \|x_0 - g\|, \tag{2}$$

$$Re\, f^g(g - g^*) \leq 0 . \tag{3}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. <u>Необходимость.</u> Поскольку $x_0 - g \neq 0$ для любого $g \in G$, то, в силу теоремы Хана-Банаха, для каждого $g \in G$ найдется функционал $f^g \in E'$ такой, что

$$\|f^g\| = 1, \quad f^g(x_0 - g) = \|x_0 - g\|,$$

т.е. удовлетворяющий условиям (1) и (2).

Покажем, что функционал f^g удовлетворяет также условию (3). Действительно,

$$\|x_0 - g\| = f^g(x_0 - g) = Re\, f^g(x_0 - g) = Re\, f^g(x_0 - g^*) +$$
$$+ Re\, f^g(g^* - g) \leq \|x_0 - g^*\| + Re\, f^g(g^* - g),$$

откуда

$$Re\, f^g(g - g^*) \leq \|x_0 - g^*\| - \|x_0 - g\| \leq 0 .$$

__Достаточность.__ Докажем, что если для функционала $f^g \in E'$ выполнены условия (I), (2), (3), то он удовлетворяет также условиям теоремы 2.

В силу (2),

$$|f^g(x_0-g)| = \|x_0-g\| .$$

В силу (2) и (3), имеем далее

$$Re\{f^g(x_0-g)\cdot\overline{f^g(g-g^*)}\} = Re\{\overline{f^g(x_0-g)}\cdot f^g(g-g^*)\} =$$
$$= Re\{\|x_0-g\|\cdot f^g(g-g^*)\} = \|x_0-g\|\cdot Re f^g(g-g^*) \le 0 .$$

Остается сослаться на теорему 2 в части достаточности.

Приведенная только что теорема 3 эквивалентна следующему геометрическому результату. Мы можем и будем ограничиваться случаем вещественного пространства E .

ТЕОРЕМА 4. Пусть E - векторное нормированное пространство, G - подпространство в E , $x_0 \in E\setminus\overline{G}$, $g^* \in G$. Для того, чтобы g^* являлся элементом наилучшего приближения для x_0 , необходимо и достаточно, чтобы для каждого $g \in G$ существовала гиперплоскость H^g , опорная к сфере $S(x_0, \|x_0-g\|)$ в точке g и обладающая тем свойством, что элементы x_0 и g^* лежат по одну сторону от гиперплоскости H^g .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. __Необходимость.__ В силу теоремы 3, для каждого $g \in G$ существует функционал $f^g \in E'$, обладающий свойствами:

$$\|f^g\| = 1 , \qquad (I)$$

$$f^g(x_0-g) = \|x_0-g\| , \qquad (2)$$

$$f^g(g) \le f^g(g^*) . \qquad (3)$$

Рассмотрим гиперплоскость

$$H^g = \{y \in E : f^g(y) = f^g(g)\} .$$

Так как $f^g(g) = f^g(x_0) - \|x_0-g\|$, то гиперплоскость H^g

опорна к сфере $S(x_0, \|x_0-g\|)$.

Кроме того,

$$f^g(x_0)=f^g(g)+\|x_0-g\|>f^g(g) ,$$

так что точки x_0 и g^* лежат по одну сторону от гиперплоскости H^g.

Достаточность. Так как H^g опорна к сфере $S(x_0, \|x_0-g\|)$ в точке g, то существует единственный функционал $f^g \in E'$, $\|f^g\|=1$, такой, что

$$H^g=\{y \in E : f^g(y)=f^g(x_0)-\|x_0-g\|\} .$$

При этом должно быть

$$f^g(g)=f^g(x_0)-\|x_0-g\| ,$$

так что

$$f^g(x_0-g)=\|x_0-g\|.$$

Наконец, так как

$$f^g(x_0)>f^g(x_0)-\|x_0-g\|=f^g(g),$$

то должно быть

$$f^g(g^*)\geqslant f^g(g) .$$

Таким образом, выполнены все условия (I), (2), (3) теоремы 3, и потому g^* - элемент наилучшего приближения для x_0.

Литература

I. КРЕЙН М.Г. L -проблема в абстрактном линейном нормированном пространстве (статья IУ). В кн. Н.И.Ахиезера и М.Г.Крейна "О некоторых вопросах теории моментов", Харьков, ДНТВУ, I938.

2. КОЛМОГОРОВ А.Н. Замечание по поводу многочленов П.Л.Чебышёва, наименее уклоняющихся от заданной функции. - УМН, I948, 3, I(23), стр. 2I6-22I.

3. НИКОЛЬСКИЙ С.М. Приближение функций тригонометрическими полиномами в среднем. - Изв. АН СССР, серия математическая, I946, I0, стр. 295-332.

4. ХАВИНСОН С.Я. Об аппроксимации элементами выпуклых множеств. - ДАН СССР, I967, I72, № 2, стр. 294-296.

5. SINGER I. Cea mai buna aproximare în spatii vectoriale normate prin elemente din subspatii vectoriale, Bucuresti, 1967.

6. РУБИНШТЕЙН Г.Ш. Об одной экстремальной задаче в линейном нормированном пространстве. - Сиб. мат. ж., 1965, 6, стр. 711-714.

7. ГАРКАВИ А.Л. О критерии элемента наилучшего приближения.- Сиб. мат. ж., 1964, 5, стр. 472-476.

8. ЯРАХМЕДОВ Г.Я. Об одном вопросе наилучшего равномерного приближения, Сиб. мат. ж., 1972, 4, стр. 958.

9. ДАНФОРД Н. и ШВАРЦ Дж.Т. Линейные операторы. Общая теория. М., ИИЛ, 1962.

Поступила в ред.-изд. отд.
7. VI. 1972 г.