1972 г. ОПТИМИЗАЦИЯ Выпуск 8(25)

УДК 513.88

ОБ ОДНОЙ ТЕОРЕМЕ ОТДЕЛИМОСТИ

А.Б. Рабинович

Рассматривается проблема отделения выпуклого конуса и подпространства в топологических векторных пространствах. Требование телесности конуса заменяется более слабым условием существования почти внутренней (неотделимой) точки. В случае конечной коразмерности подпространства условие непересечения подпространства с почти-внутренностью конуса оказывается необходимо и достаточно для их отделимости. В общем случае это условие только необходимо. Вводится понятие почти мажорирующего множества и в этих терминах доказаны теорема о продолжении положительного функционала и теорема отделимости. Устанавливается связь между почти внутренними, квазивнутренними [1] точками конусов и слабыми порядковыми единицами [2] в топологических векторных решетках. Приводятся примеры.

1. О почти-внутренних точках

Вопрос об отделении выпуклых множеств играет важную роль при получении необходимых условий экстремума [3], [4]. При разрешении этого вопроса обычно используют теорему Хана-Банаха, для применения которой необходима телесность одного из множеств. Часто требование телесности оказывается невыполненным, и тогда нужны более тонкие теоремы, учитывающие специфику множеств. Некоторые результаты в этом направлении были получены в работе [4]. В данной статье будут получены теоремы, использующие понятие почти-внутренней точки.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ I. Пусть в локально выпуклом топологическом пространстве (л.в.т.п.) $\mathcal{X}$ задано выпуклое множество A. Точка $x^\circ \in \mathcal{X}$ называется почти-внутренней точкой множества A, если не существует непрерывного линейного функционала f такого, что $f(x^\circ) \leq f(x)$ для любой $x \in A$, то есть если она не может быть отделена от множества A даже нестрого никакой замкнутой гиперплоскостью. Точки, для которых такой функционал существует, будем называть отделимыми.

Почти-внутренние точки можно определить по-другому.

УТВЕРЖДЕНИЕ I. Выполнение любого из следующих условий эквивалентно тому, что $x^\circ \in \mathcal{X}$ - почти-внутренняя точка множества A:

а) $\inf\limits_{x \in A} f(x) < f(x^\circ) < \sup\limits_{x \in A} f(x)$

для любого непрерывного линейного функционала f;

б) $\overline{K(A - x^\circ)} = \mathcal{X}$,

где $K(Q) = \{\lambda x : x \in Q,\ a \geq 0\}$ - конус, натянутый на множество Q, а знак $\overline{}$ означает замыкание в топологии $\mathcal{X}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Условие а) непосредственно следует из определения I, условие б) доказано в теореме IO ([5], стр.469).

Поскольку в пространстве $\mathcal{X}$ задана топология, то в нем определено понятие внутренней точки, и поскольку $\mathcal{X}$ - линейное пространство - понятие C-внутренней точки.

Обозначим:

$\overset{\circ}{A}$ - внутренность множества A;
$\overset{*}{A}$ - C-внутренность A;
$\dot{A}$ - почти-внутреьность A.

УТВЕРЖДЕНИЕ 2. а) $\overset{\circ}{A} \subset \overset{*}{A} \subset \dot{A}$.

б) Если $\overset{\circ}{A} \neq \emptyset$ или X - конечномерно, то $\overset{\circ}{A} = \overset{*}{A} = \dot{A}$.

Почти-внутренние точки обладают рядом свойств, характерных для внутренних точек.

УТВЕРЖДЕНИЕ 3. а) $\bar{A} \supset \dot{\bar{A}} = \dot{A}$.

б) Если $x^\circ \in \dot{A}$ и $x' \in \bar{A}$, то полуинтервал $[x^\circ, x')$ состоит из почти-внутренних точек множества A, то есть

$$(1-\alpha)x^\circ + \alpha x' \in \dot{A}, \qquad 0 \le \alpha \le 1.$$

В частности, если $A = C$ - конус, $x^\circ \in \dot{C}$, $x' \in \bar{C}$, то $x^\circ + x' \in \dot{C}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. а) Первое включение следует из того, что если точка не принадлежит замкнутому множеству, то она отделима от него, равенство - из того, что если непрерывный функционал отделяет точку x от множества A, то он отделяет ее и от замыкания $\bar{A}$. б) Предположим, что $x^\circ \in \dot{A}$, $x' \in \bar{A}$ и $x_\alpha = (1-\alpha)x^\circ + \alpha x'$ отделима от A при некотором α, $0 < \alpha < 1$. Пусть f - отделяющий функционал. Так как $f(x^\circ) > f(x_\alpha)$, то $f(x^\circ) < f(x_\alpha)$, чего быть не может, так как в силу непрерывности функционал f строго отделяет x' от A. Утверждение доказано.

Непосредственно из определения I следует

УТВЕРЖДЕНИЕ 4. Если для некоторого непрерывного линейного функционала f будет $f(x) \ge a$ для всех $x \in A$, то $f(x^\circ) > a$ для любой почти-внутренней точки x° множества A.

СЛЕДСТВИЕ. Если C - конус и $\dot{C} \ne \emptyset$, то $x^\circ \in \dot{C}$ в том и только в том случае, если

$$f(x^\circ) > 0, \qquad \forall f \in C^*,$$

где C^* - сопряженный конус непрерывных линейных функционалов, неотрицательных на C.

Для линейных (не обязательно непрерывных) функционалов имеет место

УТВЕРЖДЕНИЕ 5. Если C - конус, $\dot{C} \ne \emptyset$ и линейный функционал f неотрицателен на $\dot{C}$, то он неотрицателен на $\bar{C}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $f(\dot{C}) \geq 0$, предположим, что $f(x_1) < 0$ для некоторого $x_1 \in \bar{C}$. В силу утверждения 3 б) $x_t = x_1 + t(x^0 - x_1) \in \dot{C}$ для $0 < t \leq 1$. Таким образом, $f(x_1) < 0$ и $f(x_t) \geq 0$, $0 < t \leq 1$, что противоречит линейности функционала f.

СЛЕДСТВИЕ. Пусть C - конус и $\dot{C} \neq \phi$. Если $\bar{C}$ - воспроизводящий (то есть $\bar{C} - \bar{C} = \mathcal{X}$), то всякий линейный функционал, неотрицательный на $\dot{C}$, непрерывен.

Нетрудно также показать, что если T - непрерывное линейное преобразование, то $T\dot{A} \subset \dot{(TA)}$.

Различие между почти-внутренними и внутренними точками состоит в том, что почти-внутренние точки множества вовсе не обязаны ему принадлежать - они принадлежат его замыканию. В п. 2 приведены конусы, состоящие только из отделимых точек и тем не менее имеющие непустую почти-внутренность (примеры I^0в) и 2^0б)).

Утверждение 3б) показывает, что почти-внутренние точки так же, как и внутренние, плотны в $\bar{A}$ (если, конечно, $\dot{A}$ или, соответственно, $\mathring{A}$ не пусто). Существенное различие между ними состоит в том, что если $\mathring{A} = \phi$, но $\dot{A} \neq o$, то отделимые точки также плотны в $\bar{A}$, так как иначе $\bar{A}$ имело бы внутреннюю точку.

Далее, если внутренность (и C-внутренность) множества A обладает свойством линейной открытости, то есть пересечение любой прямой с A открыто в индуцированной топологии, то, как показывает пример 3^0б), почти-внутренность этим свойством не обладает.

Существенным отличием почти-внутренних точек от внутренних является также то, что, как показывают примеры I^0 г) и 3^0 б), вообще говоря,

$$\dot{A} \cap L \neq \dot{(A \cap L)}$$

для замкнутого подпространства L.

УТВЕРЖДЕНИЕ 6. Пусть A - выпуклое множество и H - замкнутая гиперплоскость. Тогда если $\dot{A}\cap H\neq\emptyset$, то

$$\dot{A}\cap H=(A\cap H)^{\cdot}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Включение $\dot{A}\cap H\supset(A\cap H)^{\cdot}$ справедливо для любого подпространства. Докажем обратное включение. Пусть $x^{\circ}\in\dot{A}\cap H$. Можно считать $x^{\circ}=0$. В силу условия б) утверждения 1, нужно показать, что конус $K(A\cap H)$ плотен в H. Обозначим $\mathcal{X}^{+}$ и $\mathcal{X}^{-}$ соответственно верхнее и нижнее замкнутые полупространства. Положим $A^{+}=A\cap\mathcal{X}^{+}$ и $A^{-}=A\cap\mathcal{X}^{-}$. Учитывая равенство

$$K(A^{+})\cup K(A^{-})=K(A^{+}\cup A^{-}),$$

нетрудно показать, что

$$\overline{K(A^{+})}=\mathcal{X}^{+}\quad\text{и}\quad\overline{K(A^{-})}=\mathcal{X}^{-}.$$

Пусть $z\in H=\mathcal{X}^{+}\cap\mathcal{X}^{-}$. Тогда можно выбрать последовательности $\{x_1^k\}\in K(A^{+})$ и $\{x_2^k\}\in K(A^{-})$, сходящиеся к z. Так как $[x_1^k,x_2^k]\cap H\neq\emptyset$, то последовательность $x_3^k\in[x_1^k,x_2^k]\cap H$ также сходится к z. Утверждение доказано.

Доказанное утверждение остается справедливым для замкнутых подпространств конечной коразмерности.

2. Примеры множеств, содержащих почти-внутренние точки

1°. Пусть T - ограниченная область в R^n. Рассмотрим в $L_p(T)$, $1\leq p<\infty$, следующие примеры:

а) Конус C_p неотрицательных функций. Его почти-внутренность состоит из неотрицательных функций, обращающихся в нуль лишь на множестве нулевой меры:

$$\dot{C}_p=\{x(t)\in L_p(T):x(t)>0\quad\text{при почти всех}\quad t\in T\}.$$

б) Конус C_∞ ограниченных неотрицательных функций в $L_p(T)$ имеет своим замыканием конус C_p и, следовательно, $\dot{C}_\infty=\dot{C}_p$.

в) Конус $C(t_o)$ неотрицательных функций, обращающихся в нуль в окрестности точки $t_o \in T$, состоит только из отделимых точек. Как и в примере б), имеем $C(t_o) = C_p$ и, следовательно, $\dot{C}(t_o) = \dot{C}_p$.

г) Пусть множество T разбито на два непересекающихся подмножества ненулевой меры T_1 и T_2. Выберем две функции $x_1(t)$ и $x_2(t)$ такие, что

$x_1(t) > 0$ и ограничена при почти всех $t \in T$,

$x_2(t)$ $\geqslant 0$ и не ограничена сверху на T_1,
$\leqslant 0$ и не ограничена снизу на T_2.

Натянем на функции $x_1(t)$ и $x_2(t)$ двумерное подпространство L и рассмотрим его пересечение с C_p:

$$L \cap C_p = \{\alpha x_1(t) : \alpha \geqslant 0\},\ L \cap \dot{C}_p = \{\alpha x_1(t) : \alpha > 0\}.$$

Так как $L \cap C_p$ одномерно, то $(L \dot{\cap} C_p) = \phi$ и, следовательно, $L \cap \dot{C}_p \neq (L \dot{\cap} C_p)$.

2⁰. Рассмотрим в пространстве ℓ_p, $1 \leqslant p < \infty$, следующие примеры, построенные Кли [6]:

а) "Вездесущее множество", состоящее из всех последовательностей, имеющих лишь конечное число членов, отличных от нуля, причем последний член строго положителен. Это строгий конус, плотный в ℓ_p, и любая точка $x \in \ell_p$ является его почти-внутренней точкой.

б) Конус C неотрицательных последовательностей, имеющих лишь конечное число членов, отличных от нуля, состоит только из отделимых точек, тем не менее $\dot{C}$ состоит из последовательностей, все члены которых строго положительны.

3⁰. Рассмотрим в $L_p[-1,1]$, $1 \leqslant p < \infty$, примеры:

а) Множество

$$A = \{x(t) : |x(t)| \leqslant 1 \quad \text{почти всюду на } [-1,1]\}$$

имеет непустую почти-внутренность, состоящую из функций, строго меньших по модулю единицы почти всюду на $[-1,1]$.

б) Возьмем функцию $x(t) = |t|$ и рассмотрим пересечение прямой, натянутой на эту функцию

$$L = \{\alpha |t| : -\infty < \alpha < \infty\}$$

с множеством А. Имеем

$$L_A = L \cap A = \{\alpha |t| : -1 \leq \alpha \leq 1\}.$$

Так как $L \cap \mathring{A} = L_A$ и отрезок L_A замкнут в индуцированной топологии, то, во-первых, $(L \cap A)^{\circ} \neq L \cap \mathring{A}$ и, во-вторых, множество A не обладает свойством линейной почти - открытости.

4^0. Гильбертов кирпич в пространстве ℓ_2, то есть множество

$$A = \{\{x^k\}_{k=1}^{\infty} : |x^k| \leq \frac{1}{2^k},\ k = 1, 2, \dots\},$$

имеет непустую почти-внутренность, состоящую из последовательностей, k-я координата которых по модулю строго меньше $\frac{1}{2^k}$, $k = 1, 2, \dots$.

3. О почти-мажорирующих множествах

Если в л.в.т.п. $\mathcal{X}$ задан конус C, то в пространстве можно ввести порядок, считая $y \geq x$, если $y - x \in C$. Пусть в пространстве с конусом задана точка x и множество A.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Будем говорить, что множество A почти мажорирует в смысле конуса C точку x, если для любой окрестности нуля $\mathcal{U}$ существует скаляр $t \geq 0$ и точка $y \in A$ такие, что $ty \geq x$ с точностью до $\mathcal{U}$, то есть существует $z \in C$ такой, что

$$ty - x - z \in \mathcal{U}. \tag{1}$$

Множество A почти мажорирует множество B, если оно почти мажорирует каждую его точку.

УТВЕРЖДЕНИЕ 7. Любое из следующих условий эквивалентно тому, что множество A почти мажорирует в смысле конуса C точку x:

а) Множество $\bar{A}$ почти мажорирует точку x в смысле конуса C.

б) Множество A почти мажорирует точку x в смысле конуса $\bar{C}$.

в) Множество $\overline{KA}$ почти мажорир у е т т о ч к у x .

г) $x \in \overline{K(A-C)}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Докажем сначала утверждение г). Необходимость. Если множество A почти мажорирует точку x, то из (I) следует, что в любой окрестности $x + \mathcal{U}$ содержатся точки $K(A-C)$, то есть $x \in \overline{K(A-C)}$. Достаточность доказывается повторением рассуждений в обратном порядке. Утверждения а) и б) получаются из следующей цепочки равенств

$$\overline{K(A-C)} = \overline{K(\bar{A}-C)} = \overline{K(A-\bar{C})} = \overline{K(\bar{A}-\bar{C})}, \qquad (2)$$

а утверждение в) из очевидного равенства $K(A-C) = K(KA-C)$ и цепочки равенств (2).

Таким образом, можно считать и конус C, и множество A замкнутыми. Теперь выясним вопрос о том, когда множество A почти мажорирует все пространство $\mathcal{X}$. Относительно конуса C будем предполагать, что его почти-внутренность непуста.

УТВЕРЖДЕНИЕ 9. а) Л ю б а я п о ч т и - в н у т р е н н я я т о ч к а к о н у с а C п о ч т и м а ж о р и р у е т в с е п р о с т р а н с т в о $\mathcal{X}$.

б) М н о ж е с т в о A п о ч т и м а ж о р и р у е т в с е п р о с т р а н с т в о $\mathcal{X}$ в т о м и т о л ь к о в т о м с л у ч а е, е с л и о н о п о ч т и м а ж о р и р у е т х о т я б ы о д н у п о ч т и - в н у т р е н н ю ю т о ч к у к о н у с а C .

в) Е с л и х о т я б ы о д н а т о ч к а $x \in \mathcal{X}$ н е м о ж е т б ы т ь п о ч т и м а ж о р и р о в а н а м н о ж е с т в о м A , т о н и о д н а т о ч к а $x^\circ \in C$ н е м о ж е т б ы т ь и м п о ч т и м а ж о р и р о в а н а .

Утверждение а) следует из утверждений I и 7 г). Утверждение б) следует из транзитивности почти-мажорирования, а в) следует из б).

4. Об отделении выпуклых множеств

Пусть в л.в.т.п. $\mathcal{X}$ задан конус C и подпространство L . Пусть f_0 - линейный (не обязательно непрерывный) функционал, заданный на L, и пусть L_0 - его подпространство нулей.

Выясним, при каком условии функционал f может быть продолжен до функционала $f \in C^*$, то есть до непрерывного линейного функционала, определенного на всем $\mathcal{X}$ и неотрицательного на конусе C.

ТЕОРЕМА I (о продолжении). Линейный функционал f_0, заданный на подпространстве L, можно продолжить до функционала $f \in C^*$ в том и только в том случае, если его подпространство нулей L_0 не почти мажорирует в смысле конуса C хотя бы одну (и, следовательно, любую) точку $x^0 \in L$ такую, что $f_0(x^0) > 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Необходимость. Пусть функционал можно продолжить до непрерывного $f \in C^*$; тогда $f(\overline{L_0 - C}) \leq 0$ и, следовательно, любая $x^0 \in L$ такая, что $f_0(x^0) > 0$, не может быть почти мажорирована подпространством L_0. Достаточность. Пусть $x_0 \bar{\in} \overline{L_0 - C}$. Тогда существует непрерывный линейный функционал f, строго разделяющий x^0 и $\overline{L_0 - C}$. Этот функционал будет удовлетворять условиям: $f(x^0) > 0$, $f(L_0) = 0$ и $f(C) \geq 0$, и, следовательно, умножением на положительную константу его можно сделать продолжением f_0. Теорема доказана.

СЛЕДСТВИЕ I. (Теорема Шефера [I].) Пусть C - конус и L - подпространство. Функционал f_0, заданный на L, можно продолжить до функционала $f \in C^*$ в том и только в том случае, если он ограничен снизу на $C + \mathcal{U} \cap L$ для некоторой окрестности нуля $\mathcal{U}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Необходимость очевидна. Докажем достаточность. Пусть f_0 ограничен снизу на $C + \mathcal{U} \cap L$. Проверим, что L_0 не может почти мажорировать $x^0 \in L : f_0(x^0) > 0$. Предположим, что это не так. Тогда $x^0 \in \overline{L_0 - C}$, то есть $-x^0 \in -L_0 + C + \mathcal{U}$ для любой окрестности $\mathcal{U}$. Но тогда

$(-x^\circ + L_0) \cap (C + \mathcal{U}) \neq \phi$, и, следовательно, $(-\alpha x^\circ + L_0) \cap (C + \alpha \mathcal{U}) \neq \phi$ для любого скаляра $\alpha > 0$. В силу произвольности α и $\mathcal{U}$ получаем, что f_0 не ограничен снизу на $L \cap (C + \mathcal{U})$ при любом выборе окрестности $\mathcal{U}$. Полученное противоречие доказывает следствие.

СЛЕДСТВИЕ 2. Пусть C - конус, $\dot{C} \neq \phi$, L- подпространство и $L \cap \dot{C} \neq \phi$. Тогда линейный функционал f_0, определенный на L и неотрицательный на $C_0 = L \cap C$, можно продолжить до функционала $f \in C^*$ в том и только в том случае, если его подпространство нулей не почти мажорирует хотя бы одну (и, следовательно, любую) почти внутреннюю точку конуса C.

СЛЕДСТВИЕ 3. (Теорема Крейна-Рутмана [7].) Пусть условия следствия 2 выполнены и $\dot{C} \neq \phi$. Тогда любой линейный функционал f_0, неотрицательный на конусе C_0, можно продолжить до функционала $f \in C^*$.

Рассмотрим вопрос об отделении конуса C и подпространства L_0. Будем говорить, что C и L_0 отделимы, если существует ненулевой функционал $f \in C^*$, обращающийся в на L_0. Предположим, что $\dot{C} \neq \phi$.

ТЕОРЕМА 2 (об отделимости). Конус C и подпространство L_0 отделимы в том и только в том случае, если существует хотя бы одна почти-внутренняя точка конуса C, которая не может быть почти мажорирована подпространством L_0.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Возьмем любую почти-внутреннюю точку x° конуса C. Нетрудно показать, что $x^\circ \bar{\in} L_0$. Натянем на x° и L_0 подпространство L и положим $f_0(x^\circ) = 1$ и $f_0(L_0) = 0$. Остается лишь применить следствие 2 к теореме о продолжении, и теорема 2 доказана.

СЛЕДСТВИЕ I. Если конус C и подпространство L_0 отделимы, то $C \cap L_0 = \phi$.

СЛЕДСТВИЕ 2.(Теорема Мазура [8]) Если $\mathring{C} \neq \phi$, то L_0 и C отделимы в том и только в том случае, если $\mathring{C} \cap L_0 = \phi$.

ТЕОРЕМА 3. Если коразмерность замкнутого подпространства L_0 конечна, то C и L_0 отделимы в том и только в том случае, если

$$\dot{C} \cap L_0 = \phi.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Необходимость вытекает из следствия I к теореме отделимости. Докажем достаточность. Возьмем x/L_0 - фактор-пространство x по L_0, и пусть φ - каноническое наложение. Почти-внутренние точки конуса C переходят в почти-внутренние точки конуса $\varphi(C)$ и в силу конечномерности пространства x/L_0 являются внутренними точками $\varphi(C)$. Далее, если $x^\circ \in \dot{C}$, то $-\varphi(x^\circ) \bar{\in} \varphi(C)$ (иначе $-x^\circ + y = x$ для некоторых $y \in L_0$ и $x \in C$, но тогда $x^\circ + x \in L$, чего не может быть, так как $x^\circ + x \in \dot{C}$ и $\dot{C} \cap L_0 = \phi$). Но тогда $-\varphi(x^\circ)$ и $\varphi(C)$ отделимы, то есть существует ненулевой непрерывный функционал $\bar{f}$, такой что $\bar{f}(\varphi(x)) \geq 0$ для любого $x \in C$. Полагая $f(x) = \bar{f}(\varphi(x))$, получаем, что f - непрерывный линейный функционал, обращающийся в нуль на подпространстве L_0 и неотрицательный на C. Теорема доказана.

СЛЕДСТВИЕ. Если коразмерность замкнутого подпространства L конечна и $L \cap \dot{C} \neq \phi$, то любой функционал $f_0 \in C_0^*$ продолжим до функционала $f \in C^*$.

5. Обсуждение теоремы отделимости и примеры

Теорема отделимости позволяет следующим образом выяснить вопрос о возможности отделения конуса C и подпространства L_0. Если для какой-нибудь почти-внутренней точки конуса C удается доказать, что она не может быть почти мажорирована подпространством, то C и L_0 отделимы. Если же, наоборот, найдется почти-мажорируемая почти-внутренняя точка конуса, то C и L неотделимы.

Прежде всего следует проверить выполнение необходимого условия: $\mathring{C} \cap L_0 = \phi$. Проверка возможности почти-мажорирования почти-внутренней точки конуса представляет собой проверку некоторого свойства совокупности двух объектов: конуса C и подпространства L_0. Хотелось бы найти индивидуальные свойства этих объектов, которые вместе с необходимым условием гарантировали бы отделимость. Попытки отыскания таких свойств были, но не привели к желаемому результату. Пример 1^0 (см. ниже) ясно показывает, что необходимое условие не достаточно для отделимости. Но конус, построенный в этом примере, не является воспроизводящим. Пример 2^0 а) показывает, что конус может быть воспроизводящим, необходимое условие выполнено, а отделимости нет. Подпространство, построенное в этом примере, незамкнуто. Но, как показывает пример 3^0 а), и дополнительное требование замкнутости подпространства не улучшает положения. А.А.Милютиным в беседах был построен пример замкнутого подпространства бесконечной размерности и коразмерности в L_2, не пересекающегося с конусом положительных функций (кроме точки $x(t) = 0$, разумеется) и не отделимого от него. Этот пример не приводится ввиду его громоздкости.

Построение неотделимых конуса C и подпространства L_0 таких, что $L_0 \cap \mathring{C} = \phi$, но $L_0 \cap C \neq \phi$, не представляет труда. Достаточно взять, например, конус C_∞ примера 1^0 б) п. 2 и подпространство L_0, не пересекающееся с ним и содержащее неограниченную положительную функцию. Можно также взять конус $C(t_0)$ примера 1^0 в) п. 2 и подпространство L_0, содержащее почти всюду положительную функцию. В приводимых ниже примерах необходимое условие отделимости выполнено.

1^0 $\mathring{C} \cap L_0 = \phi$, и отделимости нет. Этот пример принадлежит А.А.Милютину.

а) Пусть в л.в.т.п. X даны неотделимые замкнутое выпуклое множество S' и подпространство L_0'. Тогда, добавив еще одно измерение, можно построить конус

$$C = \{\{\tau, \tau x\} : x \in S, \tau \geq 0\} \tag{3}$$

и подпространство

$$L_0=\{\{\tau,\tau y\}: y\in L_0', -\infty<\tau<\infty\}, \qquad (4)$$

которые также неотделимы. При этом если $x^0\in \dot S$, то $\{\tau,\tau x^0\}\in \dot C$, $0<\tau<\infty$, и конус C замкнут.

б) Возьмем в L_2 множество

$S=\{x(t):\ 0\le x(t)\le 1$ почти всюду $\}$

и подпространство

$L_0'=\{\alpha x_1(t):\ x_1(t)>0$ не ограничена, $-\infty<\alpha<\infty\}$.

Конус (3) и подпространство (4) неотделимы, хотя $C\cap L_0=\{\{\tau,0\}:\tau\ge 0\}$ и, следовательно, $\dot C\cap L_0=\phi$. В этом случае последовательность $\{n, nx_1(t)\}$ почти мажорирует $R_1\times L_2$.

2[0]. $\dot C\cap L_0=\phi$, C – воспроизводящий конус, и отделимости нет.

а) Рассмотрим в $L_p(T)$, $1\le p<\infty$, конус C_p положительных функций и подпространство L_0 функций, обращающихся в нуль в окрестности фиксированной точки $t_0\in T$. Это подпространство состоит только из отделимых от C_p точек, но его замыкание есть все L_p и поэтому оно не отделимо от C_p .

б) Подпространство же функций, обращающихся в нуль в фиксированной окрестности $\mathcal{N}(t_0)$ точки t_0 , отделимо от C_p , так как оно не почти мажорирует $x^0(t)\equiv 1$.

3[0]. $\dot C\cap L_0=\phi$, C – воспроизводящий, L_0 замкнуто, и отделимости нет.

а) Возьмем в $L_2[-1,1]$ конус положительных функций C и двумерное подпространство, натянутое на функции $x_1(t)$ и $x_2(t)$, где

$$x_1(t)=\begin{cases}1, & -1\le t<0\\ 0, & 0\le t\le 1\end{cases}$$

$$x_2(t)=\begin{cases}>0 & \text{и не ограничена при } -1\le t<0,\\ <0 & \text{и не ограничена при } 0<t\le 1.\end{cases}$$

Очевидно, $\dot C\cap L_0=\phi$, но C и L_0 неотделимы, так как можно выбрать последовательность элементов L_0 вида $n_1x_1-n_2x_2$ / $n_1,n_2>0$ /, которая почти мажорирует все L_2 .

б) Рассмотрим вопрос о продолжении положительного функционала. Возьмем функцию $x_0(t)=x_1(t)+|x_2(t)|+1\in \dot C$ и натянем на функции $x_0(t), x_1(t), x_2(t)$ подпространство L. Конус $C_0 = C \cap L$ имеет в L внутреннюю точку, и тем не менее функционал $f(\alpha_0 x_0 + \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) = \alpha_0$, определенный на L и неотрицательный на C_0, непродолжим до функционала из C^*.

При этом, естественно, есть и продолжимые функционалы, достаточно взять любой функционал $f \in C^*$ и положить $L_0 = f^{-1}(0) \cap L$ и $f_0(x^0) = f(x^0)$. Тогда продолжением для f_0 будет сам функционал f.

4^0. Конус неотрицательных функций в $L_p[-1,1]$, $1 \leq p \leq \infty$, и подпространство L_0, натянутое на векторы

$$x_1(t) \begin{cases} \text{не ограниченный сверху и снизу на } [-1,0], \\ \text{– " –} \quad \text{– " –} \quad \text{– " –} \ (0,1], \end{cases}$$

$$x_2(t) \begin{cases} \geq 0 \ \text{ограничен на} \ [-1,0), \\ \leq 0 \quad \text{– " –} \quad (0,1], \end{cases}$$

отделимы, так как линейные комбинации $\alpha_1 x_1(t) + \alpha_2 x_2(t)$ не могут почти мажорировать $x_0(t) \equiv 1$.

6. О почти-внутренних точках конусов в топологических векторных решетках

Векторное пространство, упорядоченное с помощью конуса C, называется векторной решеткой, если для любых двух элементов x и y существуют $\sup\{x,y\}$ и $\inf\{x,y\}$ [2]. Элемент $x^0 \geq 0$ называется слабой порядковой единицей [2], если $\inf\{x^0, |y|\} = 0$ влечет за собой равенство $y = 0$ для каждого $y \in \mathcal{X}$. Если $\mathcal{X}$ - л.в.т.п. и конус C замкнут, то элемент $x^0 \geq 0$ называется квазивнутренним [I], если порядковый интервал $[0, x^0] = \{x \in \mathcal{X} : 0 \leq x \leq x^0\}$ тотален в $\mathcal{X}$, то есть линейное подпространство, натянутое на $[0, x^0]$, плотно в $\mathcal{X}$.

УТВЕРЖДЕНИЕ 8. П у с т ь $\mathcal{X}$ - п о р я д к о в о - п о л н а я р е ш е т к а м и н и м а л ь н о г о т и п а [I] и л.в.т.п. Т о г д а с л е д у ю -

щие утверждения эквивалентны для каждого $x^\circ \geq 0$:

а) x° – слабая порядковая единица;

б) $f(x^\circ) > 0$ – для всякой положительной линейной формы на $\mathcal{X}$;

в) x_0 – квазивнутренняя точка конуса C ;

г) x° – почти-внутренняя точка конуса C .

Эквивалентность утверждений а) – в) доказана в теореме 7,7 [I]. Так как $\mathcal{X}$ – решетка, то конус C – воспроизводящий и, следовательно, функционал f, неотрицательный на C, непрерывен. В силу следствия к утверждению 4, получаем, что б) и г) эквивалентны.

Таким образом, для замкнутого миниэдрального (задающего решетку) конуса C в л.в.т.п. $\mathcal{X}$ понятия слабой порядковой единицы, квазивнутренней и почти-внутренней точки совпадают.

В заключение я хочу выразить глубокую признательность А.А.Милютину, беседы с которым во многом помогли мне при написании этой работы.

Литература

I. ШЕФЕР Х. Топологические векторные пространства. М.,"Мир", 1971.

2. ВУЛИХ Б.З. Введение в теорию полуупорядоченных пространств. ФМ, 1961.

3. ДУБОВИЦКИЙ А.Я., МИЛЮТИН А.А. Задачи на экстремум при наличии ограничений.- Ж. В.М. и М.Ф. 1965, т.5, № 3, стр. 395-453.

4. РУБИНШТЕЙН Г.Ш. Двойственность в математическом программировании и некоторые вопросы выпуклого анализа. - УМН, 1970, т. 25, № 5, стр. 171-201.

5. ДАНФОРД Н., ШВАРЦ Дж. Линейные операторы. Общая теория. ИЛ, 1962.

6. KLEE V. Convex sets in linear spaces. I,III.-Duke Math. J. 1954,v18,p442-468; 1953,v28,p105-112.

7. КРЕЙН М.Г., РУТМАН М.А. Линейные операторы, составляющие инвариантный конус в пространстве Банаха.- УМН, 1948, т.3, № I, стр. 3-95.

8. BOURGIN D. C. Linear topological spaces, Amir. J. Math. 1946, v.44, p.547-612.

Поступила в ред.-изд. отд.
21.XI. 1971 г.