1972 г. ОПТИМИЗАЦИЯ Выпуск 8(25)

УДК 513.88

СУПРЕМАЛЬНЫЕ ГЕНЕРАТОРЫ ОТНОСИТЕЛЬНО ОПЕРАТОРОВ

С.С.Кутателадзе

0^0. В настоящей работе приводится изложение некоторых результатов, анонсированных в [1], [2].

1^0. Пусть X - пространство Крейна, а Y - пространство Канторовича и T - положительный линейный оператор из X в Y. Пусть H - конфинальный X конус в X.

Конус H называется супремальным генератором пространства X относительно оператора T, если для любого x из X имеет место представление

$$Tx = \sup_{h \leq x,\, h \in H} Th .$$

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Если X является подпространством Y, а $T = E$ - оператор вложения X в Y, то генераторы X относительно пространства Канторовича Y совпадают с генераторами X относительно оператора E.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Если H является супремальным генератором пространства X относительно оператора T, то конус $T(H)$ является супремальным генератором пространства $T(X)$ относительно пространства Канторовича Y. В самом деле, для элемента Tf из $T(X)$ имеем

$$Tf \geqslant \sup_{\substack{Th \leq Tf \\ Th \in T(H)}} Th \geqslant \sup_{\substack{h \leq f \\ h \in H}} Th = Tf,$$

то есть элемент Tf является выпуклым относительно конуса

$T(H)$. Обратное утверждение неверно (и это делает теорию генераторов относительно операторов содержательной). В самом деле, если H — произвольная прямая в X, а $T\in\mathcal{L}^+(X,R)$ — то есть положительная линейная форма, причем $T(H)\neq\{0\}$, то $T(H)=R=T(X)$. Таким образом, $T(H)$ — генератор $T(X)$, хотя сам конус H, очевидно, может не быть даже конфинальным X.

Основным фактом о генераторах относительно операторов является

ТЕОРЕМА I.I. *Пусть H — конфинальный конус в X и $T\in\mathcal{L}^+(X,Y)$. Следующие утверждения эквивалентны:*

(I) Конус H — супремальный генератор пространства X относительно оператора T.

(2) Если последовательность (T_n) положительных операторов, $T_n\in\mathcal{L}^+(X,Y)$ такова, что $\underline{\lim\limits_n}\, T_n h \geqslant Th$ для всех h из H, то $T_n x \xrightarrow{(o)} Tx$ для всякого x из X.

(3) Оператор T является максимальным относительно конуса H, то есть

$$Spr(T,H)\triangleq\left\{T'\in\mathcal{L}^+(X,Y): T'h\geqslant Th\ (h\in H)\right\}=\{T\}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. (I) $\Longrightarrow$ (2). Пусть $x\in X$, тогда для $h\in\mathcal{U}_x$ имеем $\underline{\lim\limits_n}\, T_n x\geqslant Th$, то есть $\underline{\lim\limits_n}\, T_n x\geqslant \sup\limits_{h\in\mathcal{U}_x} Th = Tx$. Отсюда следует, что $\overline{\lim\limits_n}\, T_n x = -\underline{\lim\limits_n}\, T_n(-x)\leqslant Tx$, то есть $Tx = (o)-\lim\limits_n T_n x$. Импликация (2) $\Longrightarrow$ (3) очевидна. Импликация (3) $\Longrightarrow$ (I) может быть извлечена из теоремы 3 в [3].

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Из теоремы I.I, очевидно, можно извлечь индивидуальную теорему сходимости.

ЗАМЕЧАНИЕ 4. Если конус положительных элементов в X телесен (то есть содержит алгебраически внутреннюю точку), то условие конфинальности H пространству X можно снять. В самом деле, в этой ситуации конус H конфинален X в том и только том случае, если существует положительный оператор T, действующий из X в какое-либо пространство Канторовича Y и максимальный относительно этого конуса. В самом деле, нуждается в проверке лишь необходимость приведенного условия. Допустим противное, тогда найдется ненулевая положительная линейная форма f такая, что $f(h)\geq 0$ для всех h из H. Пусть T – максимальный на H оператор, $T: X\longrightarrow Y$. Положим $T'\stackrel{\triangle}{=}T+f\otimes y$, где $y\in Y$, $y>0$ и тензорное произведение $f\otimes y$ действует по формуле $x\mapsto f(x)y$. Ясно, что $T'\in\mathcal{L}^{+}(X,Y)$. Кроме того, для $h\in H$ имеем $T'h=$ $=Th+f(h)y\geq Th$, так что $T'\in Spr(T,H)$ и, следовательно, $T'=T$. Отсюда следует, что $f=0$. Получили противоречие.

ЗАМЕЧАНИЕ 5. Пусть X – векторное пространство, нормированное решеткой Канторовича Z с помощью отображения $x\mapsto |x|$ и H – конус в X. В дальнейшем нам неоднократно понадобится следующее утверждение.

Конус $H\times(-K)$, где K – конус положительных элементов Z, конфинален пространству $X\times Z$, превращенному в пространство Крейна с помощью конуса

$$K_{X\times Z}\stackrel{\triangle}{=}\{(x,z)\in X\times Z : |x|\leq z\}.$$

В самом деле, элемент $(0,-|x|-|z|)$ входит в $H\times(-K)$ для любого элемента (x,z) из $X\times Z$. При этом

$$(x,z)-(0,-|x|-|z|)=(x,z+|z|+|x|)\in K_{X\times Z}.$$

Приведем пример применения теоремы I.I.

ПРИМЕР I.I. Пусть G – ограниченная область в R^{n} с компактной границей ∂G. Через H_G обозначим пространство функций, гармонических и ограниченных в G. Пространство H_G является нормальным подпространством пространства Канторовича, составленного из разностей положительных гармонических функций. Следовательно, H_G является пространством Канторовича. Пусть $HC_{\bar{G}}$ – пространство функций, гармонических в G и непрерывных в $\bar{G}$. Пусть HC_G – пространство следов функций из $HC_{\bar{G}}$ на G, а $H_{\partial G}$ – пространство следов на ∂G. Ясно, что HC_G и $H_{\partial G}$ изоморфны естественным образом.

Рассмотрим теперь оператор $T: C(\partial G)\longrightarrow H_G$, сопоставляющий функции f из $C(\partial G)$ отвечающее ей решение обобщенной задачи Дирихле (см. например, [4], стр. 298). Известно, что $T\in\mathcal{L}^+(C(\partial G), H_G)$. При этом функция f из $H_{\partial G}$ переводится в элемент из HC_G, отвечающий f при естественном отождествлении HC_G и $H_{\partial G}$. Имеет место

ТЕОРЕМА КЕЛДЫША [5]. Положительный росток оператора T на подпространстве $H_{\partial G}$ совпадает с $\{T\}$.

Из этой теоремы и теоремы I.I следует, что для отвечающего f решения обобщенной задачи Дирихле имеет место представление

$$Tf=\sup\{h\in HC_G : h(x)\leq f(x)\ (x\in\partial G)\}, \tag{I.I}$$

где супремум, естественно, вычисляется в пространстве Канторовича H_G. Отметим, что в свою очередь теорема Келдыша является простым следствием указанного представления (I.I).

Применим представление (I.I) для характеристики регулярных точек компакта. Точка x_0 из ∂G называется регулярной, если для всякой непрерывной функции f из $C(\partial G)$ справедливо соотношение

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ x\in G}} Tf(x)=f(x_0).$$

Покажем, что точка x_0 из ∂G является регулярной в том и только том случае, если $x_0\in Ch(H_{\partial G})$ (то есть если x_0 лежит в границе Шоке подпространства $H_{\partial G}$). Пусть сначала x_0 входит в $Ch(H_{\partial G})$, тогда для каждой функции f из $C(\partial G)$ имеем

$$f(x_0)=\sup_{\substack{h\leq f\\ h\in H_{\partial G}}} h(x_0)=\inf_{\substack{h\geq f\\ h\in H_{\partial G}}} h(x_0).$$

Используя представление (I.I), получаем: $\underline{\lim}_{x\to x_0} Tf(x)\geq h(x_0)$ для всех h из $\mathcal{U}_f$, то есть $\underline{\lim}_{x\to x_0} Tf(x)\geq f(x_0)$ и, кроме того, $\overline{\lim}_{x\to x_0} Tf(x)\leq h(x_0)$ для h из $-\mathcal{U}_{-f}$. Таким образом, $\underline{\lim}_{x\to x_0} Tf(x)\geq f(x_0)\geq \overline{\lim}_{x\to x_0} Tf(x)$, то есть x_0 – регулярная точка. Подобным же образом проверяется справедливость обратного утверждения. Действительно, если точка x_0 регулярна и не входит в границу Шоке, тогда для некоторой функции f

имеем:

$$f(x_0) > \sup_{h \le f,\, h \in H_{\partial G}} h(x_0).$$

Отсюда следует, что

$$f(x_0) > \sup_{h \le f,\, h \in H_{\partial G}} \varliminf_{x \to x_0} h(x) \geq \overline{\lim_{x \to x_0}}\, Tf(x) = f(x_0).$$

Получаем противоречие.

Отметим, что этот факт о регулярных точках был установлен с помощью иных соображений Бобоком и Корнеа (по этому поводу см., в частности, [6]). Наше изложение в отличие от указанной работы проходит также и для абстрактных гармонических функций (ср. [7]).

2^0. Пусть теперь Y является пространством Канторовича - Банаха. Теорема I.I говорит о поведении последовательностей операторов относительно (o)-сходимости. В рассматриваемой ситуации представляет интерес и ($*$)-сходимость таких последовательностей, так как в пространстве Канторовича-Банаха ($*$)-сходимость совпадает со сходимостью по норме. Соответствующее изменение теоремы I.I для сепарабельного конуса H может быть получено, как в [8]. Рассмотрим лишь один частный случай.

Пусть Q - компактное пространство с положительной бэровской мерой μ. Через $S(Q)$ обозначим пространство μ-измеримых функций. Будем считать в дальнейшем, что носитель μ совпадает с Q, и рассматривать $C(Q)$ как подпространство $S(Q)$. Пусть, кроме того, H - конфинальный и сепарабельный конус в $C(Q)$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.I. *Конус H в $C(Q)$ является супремальным генератором $C(Q)$ относительно пространства Канторовича $S(Q)$ в том и только том случае, если мера μ является максимальной в упорядоченности Шоке, порожденной конусом H.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Заметим, что $co_H(f)$ входит в $S(Q)$. При этом $co_H(f) \geq u_f$. Пусть теперь $g \in S(Q)$ и такова, что $g \geq u_f$. Поскольку конус H сепарабелен, достаточно считать, что $g \geq \{h_1, h_2, \ldots, h_k, \ldots\}$, где $\{h_k\}_{k=1}^{\infty}$ - счетное плотмое в $\mathcal{U}_f$ множество. Иными словами, за исключением μ - пренебрежимого множества, $g(x) \geq co_H(f)(x)$. Итак, $co_H(f) = \sup\limits_{h \leq f, h \in H} h$. Поскольку условие " H - генератор $C(Q)$ относительно $S(Q)$ " означает, что $co_H(f)$ равно f для любой функции μ почти всюду, то это же условие означает, что $\mu(f) = \mu(co_H(f))$ для $f \in C(Q)$, то есть $P(H, C(Q), \overline{R}^Q)$ - максимальность меры μ (см. [3]).

Из доказанного предложения получается, например,

ТЕОРЕМА 2.I. Пусть H — сепарабельный конус в $C(Q)$, а μ — положительная бэровская мера на Q. Следующие утверждения эквивалентны:

(I) Мера μ максимальна в упорядоченности Шоке, порожденной конусом H.

(2) Для любой последовательности (T_n) операторов, $T_n \in \mathcal{L}^+(C(Q), S(Q))$ такой, что $(T_n h)$ сходится по мере к функции, большей h для всякой h из H, последовательность $(T_n f)$ сходится по мере к f для всех f из $C(Q)$.

(3) Оператор E тождественного вложения $C(Q)$ в $S(Q)$ является H - максимальным.

(4) Конус H — супремальный генератор $C(Q)$ относительно $S(Q)$.

ЗАМЕЧАНИЕ I. В [8] А.М.Рубиновым установлено, что (2) вытекает из следующего условия (I$'$): измеримое подмножество дополнения границы Шоке пренебрежимо. Действительно, в этом случае мера μ является $P(H)$ -максимальной. Итак, (I$'$) $\Rightarrow$ (I). Для конуса Шоке верно и обратное утверждение, то есть (I) $\Rightarrow$ (I$'$). М.А.Красносельский и Е.А.Лифшиц получили достаточный признак для (2) с помощью теоремы о полной тени [9].

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Если X — некоторое пространство Канторовича, нормально вложенное в $S(Q)$ и содержащее $C(Q)$, то H является генератором $C(Q)$ относительно $S(Q)$ в том и только том случае, если H является генератором $C(Q)$ относительно

X . В самом деле, достаточно показать, что $co_H(f)$ входит в X для всякой f из $C(Q)$. Этот факт имеет место в связи с тем, что для положительной f справедливы неравенства $0 \leq co_H(f) \leq f$. В силу этого замечания нетрудно переформулировать теорему 2.I на случай сходимости по норме.

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Пусть Q - метрический компакт и H - конус, граница Шоке которого совпадает с Q (то есть H - супремальный генератор пространства $C(Q)$ относительно пространства Канторовича $B(Q)$), тогда H является супремальным генератором $C(Q)$ относительно любого пространства Канторовича-Банаха, нормально вложенного в $S(Q)$ и содержащего $C(Q)$.

3°. Пусть $(V, \|\cdot\|)$-нормированное пространство. Рассмотрим в пространстве $V \times R$ конус $epi(\|\cdot\|)$ - надграфик нормы в V . Пространство $V \times R$, упорядоченное конусом $epi(\|\cdot\|)$, называется порядковой надстройкой пространства V . Отметим, что порядковая надстройка пространства V является пространством Крейна с телесным конусом положительных элементов.

Оказывается, что конструкция порядковой надстройки полезна при исследовании сходимости последовательностей функционалов и операторов (на это обстоятельство обращено внимание, в частности, в [9]). Приведем здесь одну из простейших теорем такого сорта.

Условимся в дальнейшем символом $\widetilde{H}$, где H - конус в V , обозначать множество $H \times (-R_+)$ и считать, что функционал (μ, s) из $V \times R$ действует по формуле $(u, t) \longmapsto \mu(u) + st$.

Имеет место

ТЕОРЕМА 3.I. Пусть V - нормированное пространство и H - конус в V . Следующие утверждения эквивалентны:

(I) Конус $\widetilde{H}$ является супремальным генератором порядковой надстройки пространства V относительно функционала $(\mu_0, \|\mu_0\|)$.

(2) Если последовательность линейных функционалов (μ_n) из V' удовлетворяет условиям:

$$\overline{\lim_n} \|\mu_n\| \leq \|\mu_0\|;$$

$$\underline{\lim_n}\, \mu_n(h) \geqslant \mu_0(h) \qquad (h \in H),$$

то (μ_n) слабо сходится к μ_0.

(3) Если функционал μ из V' таков, что $\|\mu\| \leqslant \|\mu_0\|$ и, кроме того, $\mu(h) \geqslant \mu_0(h)$ для всех h из H, то $\mu = \mu_0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. (I) $\Longrightarrow$ (2). Рассмотрим функционалы $\widetilde{\mu}_n \triangleq \triangleq (\mu_n, \|\mu_n\|)$, $n = 0, 1, 2, \ldots$. Нетрудно видеть, что $\widetilde{\mu}_n$ лежит в конусе, двойственном к $epi(\|\cdot\|)$. Пусть теперь $(h, -t)$, где $t \geqslant 0$, произвольный элемент из $\widetilde{H}$. Тогда

$$\underline{\lim_n}\, \widetilde{\mu}_n(h, -t) = \underline{\lim_n}(\widetilde{\mu}_n(h, 0) - t\widetilde{\mu}_n(0, 1)) \geqslant \underline{\lim_n}\, \widetilde{\mu}_n(h, 0) +$$

$$+ t\, \underline{\lim_n}(-\widetilde{\mu}_n(0, 1)) = \underline{\lim_n}\, \mu_n(h) + t\, \underline{\lim_n}(-\|\mu_n\|) \geqslant \mu_0(h)$$

$$- t\, \overline{\lim_n}\, \|\mu_n\| \geqslant \mu_0(h) - t\|\mu_0\| = \widetilde{\mu}_0(h, -t).$$

Так как имеет место условие (I), то, привлекая теорему I.I, получим, что для любого элемента (x, t) из $V \times R$ выполняется соотношение:

$$\lim_n \widetilde{\mu}_n(x, t) = \widetilde{\mu}_0(x, t).$$

В частности, на элементах вида $(x, 0)$ имеем

$$\lim_n \mu_n(x) = \lim_n \widetilde{\mu}_n(x, 0) = \widetilde{\mu}_0(x, 0) = \mu_0(x).$$

(2) $\Longrightarrow$ (3). Очевидно.

(3) $\Longrightarrow$ (I). В силу теоремы I.I достаточно проверить максимальность функционала $\widetilde{\mu}_0$ относительно конуса $\widetilde{H}$. Пусть $(v, s) \in Spr(\widetilde{\mu}_0, \widetilde{H})$. Тогда, очевидно, $s \geqslant \|v\|$ и, кроме того, $(v, s)(h, 0) \geqslant (\mu_0, \|\mu_0\|)(h, 0)$ для всех h из H и $(v, s)(0, -1) \geqslant \geqslant (\mu_0, \|\mu_0\|)(0, -1)$. Тогда $v(h) \geqslant \mu(h)$ для всех h из H и, помимо этого, $\|\mu_0\| \geqslant s$. Так как $s \geqslant \|v\|$, то $\|\mu_0\| \geqslant \|v\|$. Таким образом, по условию $v = \mu_0$. Кроме того, из условия $\|\mu_0\| \geqslant s \geqslant \|v\| = \|\mu_0\|$ следует, что $s = \|\mu_0\|$. Теорема доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ I. Фактически установлено несколько большее. Именно, условие (2) можно заменить эквивалентным условием (2'): имеет место (2) и, кроме того, $\lim_n \|\mu_n\| = \|\mu_0\|$. Для доказательства достаточно заметить при проверке (I) $\Longrightarrow$ (2), что

$(\tilde{\mu}_n)$ сходится к $\tilde{\mu}_0$, в частности, на элементе $(0, 1)$.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. А.М.Рубинов обобщил этот результат на основе понятия обобщенного генератора [10]. Именно, им получен критерий сходимости равностепенно непрерывной последовательности в случае введения упорядочения в $V \times R$ с помощью надграфика опорной функции произвольного слабо замкнутого выпуклого содержащего нуль множества в V'.

ПРИМЕР 3.I. Пусть V – рефлексивное банахово пространство со строго выпуклым единичным шаром S. Функционал $\mu \longmapsto \|\mu\|$, где $\mu \in V'$, имеет единственный опорный элемент x_{μ_0} такой, что $x_{\mu_0}(\mu_0) = \|\mu_0\|$. Рассматривая V' как пространство, сопряженное к V, получим, что конус $\tilde{H}$, где $H \triangleq (-\alpha\mu_0)_{\alpha \in R_+}$, является супремальным генератором порядковой надстройки пространства V относительно функционала $(-x_{\mu_0}, \|x_{\mu_0}\|)$.

Из теоремы 2.I и замечаний к ней вытекает, что любая последовательность (x_n) элементов пространства V', обладающая теми свойствами, что $\overline{\lim_n} \|x_n\| \leq \|x_{\mu_0}\|$ и $\lim_n \mu_0(x_n) = \mu_0(x_{\mu_0})$ слабо сходится к x_{μ_0}, причем $\|x_n\| \longrightarrow \|x_{\mu_0}\|$.

Напомним, что шар S называется равномерно выпуклым, если для всякого ε из $(0,2]$ найдется $\delta(\varepsilon) > 0$ такое, что $\|x+y\| < 2(1-\delta(\varepsilon))$ для любых x, y из S, удовлетворяющих условию $\|x-y\| > \varepsilon$. Равномерно выпуклое пространство (то есть пространство с равномерно выпуклым шаром) рефлексивно и, кроме того, обладает следующим свойством: если последовательность (x_n) элементов этого пространства слабо сходится к x, причем $\|x_n\| \longrightarrow \|x\|$, то $\|x_n - x\| \to 0$ (см. [11], стр. 188). Отсюда следует теорема Шмульяна.

К этому же кругу вопросов геометрии банаховых пространств примыкает задача о единственности распространения функционалов.

Напомним следующее определение [12]. Подпространство H банахова пространства V обладает свойством U, если любой непрерывный линейный функционал, определенный на H, обладает единственным распространением на V с сохранением нормы. Из теоремы 2.I следует, что всякое подпространство H, обладающее свойством U, таково, что H является супремальным генератором порядковой надстройки пространства V относительно некоторого функционала $(\mu, \|\mu\|)$.

ТЕОРЕМА 2.2. Пусть V - рефлексивное банахово пространство. Следующие утверждения эквивалентны:

(1) Единичный шар пространства V гладкий.

(2) Для каждого подпространства H, функционала μ_0 из H' и последовательности (μ_n) функционалов из V' такой, что

$$\overline{\lim_n} \|\mu_n\| \le \|\mu_0\|_H ,$$

$$\lim_n \mu_n(h) = \mu_0(h) \quad (h \in H),$$

последовательность (μ_n) слабо сходится.

(3) Свойство (2) имеет место для одномерных подпространств.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. (1) $\Longrightarrow$ (2). По теореме Тейлора-Фогеля любое подпространство H в V обладает свойством U, то есть существует единственный функционал $\tilde{\mu}_0$ из V', такой, что $\tilde{\mu}_0(h) = \mu_0(h)$ для всех h из H и $\|\tilde{\mu}_0\| = \|\mu_0\|_H$. По теореме 2.1 это значит, что $\widetilde{H}$ является супремальным генератором порядковой надстройки пространства V относительно функционала $(\tilde{\mu}_0, \|\tilde{\mu}_0\|)$ и, следовательно, последовательность (μ_n) слабо сходится к $\tilde{\mu}_0$.

(2) $\Longrightarrow$ (3). Очевидно.

(3) $\Longrightarrow$ (1). Если единичный шар не гладкий, то для некоторого x_0 такого, что $\|x_0\| = 1$, найдутся функционалы μ и ν из V такие, что $\|\mu\| = \|\nu\| = 1$ и $\mu(x_0) = \nu(x_0) = 1$, и, кроме того, для некоторого x_1 из V оказывается, что $\mu(x_1) \ne \nu(x_1)$. Пусть $H \triangleq (\alpha x_0)_{\alpha \in R}$ и функционал μ из H' определен соотношением $\mu_0 : \alpha x_0 \longrightarrow \alpha$. Рассмотрим последовательность (μ_n), определенную соотношениями: $\mu_{2n} \triangleq \mu$ и $\mu_{2n+1} \triangleq \nu$. Очевидно, что $\lim_n \|\mu_n\| = 1$ и $\lim_n \mu_n(x_0) = \mu_0(x_0)$. С другой стороны, последовательность $(\mu_n(x_1))$ не сходится. Получили противоречие.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.1. Конус $\widetilde{H}$ является супремальным генератором порядковой надстройки пространства V относительно функционала $(\mu, \|\mu\|)$

в том и только том случае, если для всяких x из V и $\varepsilon>0$ найдется элемент h из H такой, что
$\mu(x)-\mu(h)<\varepsilon-\|\mu\|\cdot\|x-h\|$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В теореме 3.I фактически используется только соотношение вида

$$(\mu,\|\mu\|)(x,0)=\sup_{\substack{(h,t)\leq(x,0)\\ h\in H;\,-t\in R_+}}(\mu,\|\mu\|)(h,t).$$

Или, иными словами,

$$\mu(x)=\sup_{\substack{\|x-h\|\leq t\\ h\in H;\ t\geq 0}}(\mu(h)-\|\mu\|t)\leq$$

$$\leq\sup_{h\in H}[\mu(h)-\|\mu\|\cdot\|x-h\|].$$

С другой стороны, $\mu(x)-\mu(h)\geq-|\mu(x-h)|\geq-\|\mu\|\cdot\|x-h\|$, то есть

$$\mu(x)=\sup_{h\in H}(\mu(h)-\|\mu\|\cdot\|x-h\|).$$

Предложение доказано.

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Предложение 3.I естественным способом обобщается и на тот случай, когда рассматривается сублинейный функционал в локально выпуклом пространстве.

Уточним смысл предложения 3.I в пространстве непрерывных функций $C(Q)$ на компакте Q. Пусть для удобства μ есть вероятностная мера на Q. Положим $\alpha\triangleq\|x-h\|$, тогда в условиях предложения 3.I получим

$$-\alpha\mathbb{1}+h\leq x\leq\alpha\mathbb{1}+h;$$

$$\mu(x)<\mu(h-\alpha\mathbb{1})+\varepsilon.$$

Иными словами, $\bar{H}$ – супремальный генератор порядковой надстройки пространства $C(Q)$ относительно функционала $(\mu,1)$ в том и только том случае, если для каждой функции f из $C(Q)$ и любого $\varepsilon>0$ найдутся функция h из H и число α из R_+ такие, что

$$\begin{aligned}&-\alpha\mathbb{1}+h\leq f;\\&-\alpha\mathbb{1}-h\leq-f;\\&\mu(f)<\mu(h-\alpha\mathbb{1})+\varepsilon.\end{aligned}\tag{3.I}$$

Набор условий (3.I) означает, что если рассмотреть пространство $C(Q)\times C(Q)$ и в нем конус $\underset{\sim}{H}$, натянутый на элемент $(-\mathbb{1},-\mathbb{1})$ и конус $\{(h,-h): h\in H\}$, то, наделив $C(Q)\times C(Q)$ стандартными структурами пространств Крейна и Банаха и обозначив через $\tilde{\mu}$ функционал $(f,g)\longmapsto\mu(f)$, где $f,g\in C(Q)$, из (3.I) получим

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.2. Конус $\tilde{H}$ является супремальным генератором порядковой надстройки пространства $C(Q)$ относительно функционала $(\mu,1)$ в том и только том случае, если для любой функции f из $C(Q)$ выполняется соотношение

$$\tilde{\mu}(f,-f)=\sup_{\substack{(h,h')\in\underset{\sim}{H}\\(h,h')\leq(f,-f)}}\mu(h,h')$$

ЗАМЕЧАНИЕ 4. Ниже мы увидим, что в условиях предложения конус $\underset{\sim}{H}$ является супремальным генератором пространства $C(Q)\times C(Q)$ относительно функционала $\tilde{\mu}$.

4°. Естественным аналогом ограниченного функционала (или, что тоже самое, оператора из нормированного пространства V в пространство Канторовича R) является линейный оператор T, действующий из V в пространство Канторовича Y и обладающий абстрактной нормой. Последнее означает, что множество $\{|Tx|: \|x\|\leq 1\}$ ограничено, иными словами, существует элемент

$$\|T\|=\sup_{\|x\|\leq 1}|Tx|.$$

Элемент $\|T\|$ называется абстрактной нормой оператора T.

Следующее предложение позволяет редуцировать изучение операторов с абстрактной нормой к положительным.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.I. Оператор $T: V\to Y$ обладает абстрактной нормой, не превосходящей элемента a из Y, $a>0$, в том и только том случае, если оператор (T,a), действующий из порядковой надстройки пространства V в Y по формуле

$$(T, a) : (x, t) \longmapsto Tx + ta,$$

является положительным.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В самом деле, если $\|T\| \le a$, то

$$Tx \geqslant -|Tx| \geqslant -\|T\| \cdot \|x\| \geqslant -a\|x\|,$$

так что если $\|x\| \le t$, то $Tx \geqslant -ta$. Это и означает, что $(T, a) \in \mathcal{L}^{+}(V \times R, Y)$. Если, наоборот, $(T, a) \geqslant 0$, то $Tx \geqslant -ta$ для всех x таких, что $\|x\| \le t$, то есть $Tx \le a$ как только $\|x\| \le 1$. Отсюда и вытекает, что $\|T\| \le a$.

Основываясь на предложениях 4.I и 3.I, можно установить справедливость следующего утверждения.

ТЕОРЕМА 4.I. Пусть V — нормированное пространство, Y — пространство Канторовича, оператор $T : V \to Y$ и H — конус в V. Следующие утверждения эквивалентны:

(I) Конус $\widetilde{H}$ является супремальным генератором порядковой надстройки пространства V относительно оператора $(T, \|T\|)$, где

$$(T, \|T\|) : (x, t) \longmapsto Tx + t\|T\|.$$

(2) Для любого элемента x из V имеет место равенство

$$Tx = \sup_{h \in H} (Th - \|T\| \cdot \|x - h\|).$$

(3) Если последовательность (T_n) операторов из V в Y такова, что

$$\overline{\lim_{n}} \|T_n\| \le \|T\|;$$

$$\underline{\lim_{n}} T_n h \geqslant Th \quad (h \in H),$$

то $(o)\text{-}\lim_{n} T_n x = Tx$ для всех x из V.

(4) Любой оператор $T' : V \to Y$ такой, что $\|T'\| \le \|T\|$ и, кроме того, $T'h \geqslant Th$ для всех h из H, совпадает с T.

Напомним, что точка x из V называется точкой гладкости единичного шара, если $\|x\| = 1$ и существует единственный функционал μ_x из V' такой, что $\|\mu_x\| = \mu_x(x) = 1$. Из теоремы 3.I вытекает следующая характеристика точки гладкости.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.I. Точка x_0 является точкой гладкости единичного шара в том и только том случае, если для некоторого (а значит, и для любого) пространства Канторовича Y и элемента y из Y, $y>0$, существует единственный оператор $T: V \to Y$ такой, что $Tx_0 = y$ и $|T| = y$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть x_0-точка гладкости. Из теоремы 3.I вытекает, что это эквивалентно тому, что конус $\widetilde{H} \triangleq (\alpha x_0)_{\alpha \in R} \times (-R_+)$ является супремальным генератором порядковой надстройки пространства V относительно функционала $(\mu_{x_0}, \|\mu_x\|)$ или (по предложению 3.I) условию

$$\mu_{x_0}(x) = \sup_{\alpha \in R}(\alpha - \|x - \alpha x_0\|). \tag{4.I}$$

Положим $T: x \mapsto \mu_{x_0}(x) y$. Тогда $Tx_0 = y$ и

$$|T| = \sup_{\|x\| \leq 1} |\mu_{x_0}(x) y| = \|\mu_{x_0}\| y = y.$$

Поэтому, как следует из (4.I),

$$Tx = \sup_{\alpha \in R}(\alpha y - y\|x - \alpha x_0\|) =$$
$$= \sup_{h \in H}(Th - |T|\,\|x - h\|),$$

где $H \triangleq (\alpha x_0)_{\alpha \in R}$. По теореме 4.I получим необходимость условия. Аналогичным способом проверяется и достаточность.

ЗАМЕЧАНИЕ I. Непосредственно из определения точки гладкости x вытекает, что конус $\pi_x \times (-R_+)$, где $\pi_x \triangleq (\alpha x)_{\alpha \in R}$, является супремальным генератором порядковой надстройки V относительно функционала $(\mu_x, 1)$. Интересно, что если V - рефлексивное пространство, то других прямых в V, обладающих этим свойством, и нет. Точнее, если L - некоторая прямая в V, причем $L \times (-R_+)$ является супремальным генератором порядковой надстройки относительно функционала $(f, 1)$, то $L = \pi_x$, где x - некоторая точка гладкости, при этом $f = \mu_x$. Для доказательства рассмотрим гиперплоскость $H \triangleq \{v \in V : f(v) = 1\}$, и пусть $\{x_0\} = L \cap H$. Если $\|x_0\| = 1$, то, ввиду условия генерирования, x_0 - точка гладкости. В противном случае найдется гиперплоскость $H' \triangleq \{v \in V : g(v) = g(x_0)\}$, проходящая через точку x_0 и выделяющая шар S. Заметим, что g не пропорционален f. Не нарушая общности, можно считать, что $\|g\| \leq g(x_0)$. Положим $\tilde{g} \triangleq g/g(x_0)$. Тогда $\|\tilde{g}\| \leq 1$ и $g(x_0)=1=f(x_0)$, поскольку $x_0 \in H$. Так как $L^{\times}(-R_+)$-генератор относительно $(f, 1)$, то $\tilde{g}=f$. Получили противоречие.

В оставшейся части этого пункта мы займемся построением одной удобной конкретизации изложенной выше конструкции на случай, когда V является нормированной решеткой Канторовича с сильной единицей (KN -линеалом ограниченных элементов). Причиной этого служит то известное обстоятельство, что конечные конфинальные конусы бывают лишь в таких пространствах. Будем считать, что V содержится в пространстве Канторовича Y и порядок в V индуцирован из Y.

Если H— конус в V, то через $\underset{\sim}{H}$ обозначим коническую оболочку элемента $(-\mathbf{1}, -\mathbf{1})$, где $\mathbf{1}$ - единица в V, и конуса $\{(h, -h) \in V \times V : h \in H\}$ в пространстве $V \times V$.

Имеет место

ТЕОРЕМА 4.2. Пусть H—конус в нормированной решетке Канторовича с сильной единицей. Следующие утверждения эквивалентны:

(1) Конус $\tilde{H}$ является супремальным генератором порядковой надстройки пространства V относительно оператора $(E, \mathbf{1})$, где E—тождественное вложение V в Y,

(2) Конус $\underset{\sim}{H}$ является супремальным генератором пространства $V \times V$ относительно оператора $\underset{\sim}{E} : (x_1, x_2) \mapsto x_1$, где $(x_1, x_2) \in V \times V$.

(3) Для любого элемента x из V имеет место представление

$$x = \sup_{h \in H} (h - \|x - h\| \mathbf{1}).$$

(4) Если последовательность операторов (T_n), где $T_n : V \to Y$ такова, что $\overline{\lim_n} \|T_n\| \leq \mathbf{1}$ и $\underline{\lim_n} T_n h \geq h$ для всех h из H, то $(o)\text{-}\lim_n T_n x = x$ для всех x из V.

(5) Любой оператор $T : V \to Y$ такой,

что $|T|\leq 1$ и, кроме того, $Th \geqslant h$ для всех h из H, совпадает с E.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Соотношения (I)$\Longleftrightarrow$(3)$\Longleftrightarrow$(4)$\Longleftrightarrow$(5) следуют из теоремы 4.I. Поэтому достаточно проверить, например, (2)$\Longrightarrow$(3) и (5)$\Longrightarrow$(2).

(2)$\Longrightarrow$(3). Пусть $x \in V$, тогда по условию генерирования

$$\underset{\sim}{E}(x,-x) = \sup_{\substack{\underset{\sim}{h} \in \underset{\sim}{H} \\ \underset{\sim}{h} \leq (x,-x)}} \underset{\sim}{E}(\underset{\sim}{h}),$$

то есть

$$x = \sup\{h-\alpha \mathbf{1} : h \in H : \alpha \geqslant 0 \,;\, h-\alpha\mathbf{1} \leq x \,;\, -h-\alpha\mathbf{1} \leq -x\} =$$

$$= \sup_{h\in H} \sup_{\alpha>0 : h-x \leq \alpha \mathbf{1}} (h-\alpha\mathbf{1}) = \sup_{h\in H}(h-\|x-h\|\mathbf{1}).$$

(5)$\Longrightarrow$(2). Следует показать, что оператор $\underset{\sim}{E}$ максимален относительно конуса $\underset{\sim}{H}$. Итак, пусть $T \in \mathcal{L}^{+}(V\times V, Y)$, причем $T(h,-h) \geqslant \underset{\sim}{E}(h,-h)$ для всех h из H и, кроме того, $T(\mathbf{1},\mathbf{1})\leq \mathbf{1}$. Положим $T_1 : x \longmapsto T(x,0)$ и $T_2 : y \longmapsto T(0,y)$, где x, y из V. Имеем

$$(T_1-T_2)(h) = T(h,0) - T(0,h) =$$

$$= T(h,0) + T(0,-h) = T(h,-h) \geqslant h.$$

Помимо этого, $(T_1+T_2)\mathbf{1} = T(\mathbf{1},\mathbf{1}) \leq \mathbf{1}$. Поскольку $|T_1-T_2|\mathbf{1} \leq \leq (T_1+T_2)\mathbf{1} \leq \mathbf{1}$, то $|T_1-T_2| \leq \mathbf{1}$ и, следовательно, $(T_1-T_2)x = x$ для всех x из V.

Заметим теперь, что $\mathbf{1} \leq T_1\mathbf{1} \leq T_1\mathbf{1}+T_2\mathbf{1} \leq \mathbf{1}$. Отсюда следует, что $T_2 = 0$. Итак, $T_1 = E$ и, поскольку $T(x,y) = T_1x+T_2y = x$, то $T = \underset{\sim}{E}$, и теорема доказана.

Если H - подпространство, то в теореме 4.2 дело можно свести к обычным генераторам.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.2. Подпространство H в V обладает тем свойством, что $\underset{\sim}{H}$ - супремальный генератор относительно оператора $\underset{\sim}{E}$ в том и только том случае, если $\underset{\sim}{H}$ - супремальный генератор пространства $V\times V$ относительно пространства Канторовича $Y\times Y$.

<u>Необходимость.</u> Пусть $T: V\times V \to Y\times Y$ и $T\geq 0$, причем $T(h,-h)=(h,-h)$ для всех h из H и $T(\mathbf{1},\mathbf{1})\leq(\mathbf{1},\mathbf{1})$. Пусть, далее,

$$T_1 : (x,y)\longmapsto Pr_1(T(x,y));$$

$$T_2 : (x,y)\longmapsto Pr_2(T(y,x)).$$

Заметим, что $T_1, T_2 \in \mathcal{L}^+(V\times V, Y)$, причем $T_1(h,-h)=h$ и $T_2(h,-h)=h$ для всех h из H. При этом $T_1\mathbf{1}\leq\mathbf{1}$ и $T_2\mathbf{1}\leq\mathbf{1}$. Следовательно, $T_1=T_2=\underset{\sim}{E}$. Отсюда вытекает, что

$$T(x,y)=(T_1(x,y), T_2(y,x))=(\underset{\sim}{E}(x,y), \underset{\sim}{E}(y,x))=(x,y).$$

<u>Достаточность.</u> Пусть $T\in\mathcal{L}^+(V\times V, Y)$ и $T(h,-h)=h$ для всех h из H, причем $T(\mathbf{1},\mathbf{1})\leq\mathbf{1}$. Следует проверить, что $T=\underset{\sim}{E}$. Пусть

$$\hat{T} : (x,y)\longmapsto (T(x,y), T(y,x)).$$

Тогда $\hat{T}\geq 0$ и $\hat{T}(\mathbf{1},\mathbf{1})\leq(\mathbf{1},\mathbf{1})$. Кроме того, для $h\in H$ имеем

$$\hat{T}(h,-h)=(T(h,-h), T(-h,h))=(h,-h),$$

то есть $\hat{T}\in Spr(\hat{E},\underset{\sim}{H})$, где $\hat{E}$ — тождественное вложение $V\times V$ в $Y\times Y$. Таким образом, $\hat{T}=\hat{E}$. В частности, $T(x,y)=\underset{\sim}{E}(x,y)=x$. Предложение доказано.

В заключение укажем на возможность обобщения приведенных результатов.

Выше изучались ситуации, в которых векторное пространство X нормировалось при помощи пространства Канторовича R. Переход к порядковой надстройке (или, к двойному генератору) позволил получить критерии сходимости операторов с абстрактной нормой. Нетрудно, однако, заметить, что, используя, например, замечание 5 из I^0, можно перенести изложенные приемы на случай нормирования при помощи произвольной решетки Канторовича. Ограничимся здесь лишь тем, что приведем соответствующий результат.

ТЕОРЕМА 4.3. Пусть X — векторное пространство, нормированное при помощи решетки Канторовича Z, а T — регулярный оператор, действующий из X в пространство Канторовича

Y, и H — конус в X. Следующие утверждения эквивалентны:

(I) Конус $H\times(-K)$ является супремальным генератором пространства $X\times Z$, упорядоченного конусом $\{(x,z)\in X\times Z : |x|\le z\}$ относительно оператора $(T, |T|)$, действующего из $X\times Z$ в Y по формуле

$$(T, |T|):(x,z)\longmapsto Tx+|T|z,$$

где K — конус положительных элементов в Z, а $|T|$ — абстрактная норма T (то есть наименьшая мажоранта, см. [13], стр. 458).

(2) Для любого элемента x из X имеет место представление

$$Tx=\sup_{h\in H}(Th-|T||x-h|).$$

(3) Для любой последовательности регулярных операторов $T_n: X\to Y$ такой, что $|T_n|\le|T|$, и, кроме того, $\underline{\lim}_n T_n h \geqslant Th$ для всех h из H, следует, что $(o)-\lim_n T_n x=Tx$ для $x\in X$.

(4) Любой регулярный оператор $T': X\to Y$ такой, что $|T'|\le|T|$ и, кроме того, $T'h\geqslant Th$ для всех h из H, совпадает с T.

5⁰. Литературные подробности в [2].

Литература

1. КУТАТЕЛАДЗЕ С.С. О сходимости к мере Дирака и к тождественному оператору.- Сиб.мат.журн., 1972, т.13, № 2,стр.464-466.
2. КУТАТЕЛАДЗЕ С.С., РУБИНОВ А.М. Двойственность Минковского и ее приложения, УМН, 1972, т.27, № 2, стр. 79-128.
3. КУТАТЕЛАДЗЕ С.С. О двойственных способах задания выпуклых функций.- "Оптимизация", Новосибирск, 1972, вып. 5(22), стр. 106-120.
4. ЛАНДКОФ Н.С. Основы современной теории потенциала. М., "Наука", 1966.

5. КЕЛДЫШ М.В. О задаче Дирихле, ДАН СССР, 1941, т.32, № 5. стр. 308-309.

6. BOBOC N., CORNEA A. Convex cones of lower semicontinuous functions.- Rev. roumaine math. pures et appl., 1970, v.12, N 4, p.471 525.

7. Effros E., Kazdan J. Application of Choquet simplexes to elliptic and parabolic boundary value problems, J.Diff. Equat., 1970, т.8, №1, p.95-134.

8. КУТАТЕЛАДЗЕ С.С., РУБИНОВ А.М. Супремальные генараторы и сходимость последовательностей операторов.- "Оптимизация", Новосибирск, 1971, вып. 3(20), стр. 120-153.

9. КРАСНОСЕЛЬСКИЙ М.А., ЛИФШИЦ Е.А. К вопросу о сходимости последовательностей положительных операторов в линейных топологических пространствах, УМН, 1968, т. 23, № 2, стр. 213-214.

10. РУБИНОВ А.М. Об одной теореме В.С.Климова, М.А.Красносельского и Е.А.Лифшица.-"Оптимизация", Новосибирск, 1971, вып. 3(20), стр. 154-158.

11. ДЭЙ М. Нормированные линейные пространства. М., ИИЛ, 1961.

12. PHELPS R. Uniqueness of Hanh-Banach extentions and unique best approximations Trans. Amer. Mqth. Soc., 1960, v.95, N.2, p.238-255.

13. КАНТОРОВИЧ Л.В., БУЛИХ Б.З., ПИНСКЕР А.Г. Функциональный анализ в полуупорядоченных пространствах. М.-Л., ГИТТЛ, 1950.

Поступила в ред.-изд. отдел
20. XII. 1971 г.