УДК [658.511.2 + 658.566].012.122.

ОПТИМАЛЬНЫЙ РАСКРОЙ И УПРАВЛЕНИЕ ЗАПАСАМИ ПРОМЫШЛЕННЫХ МАТЕРИАЛОВ

В.В.Титов

Практика использования методов линейного программирования при раскрое промышленных материалов (см., например, [1]) показывает, что можно получить значительную экономию ресурсов. Однако это только одна сторона экономического эффекта. Во-первых, возможно увеличение затрат, связанных с работой по новой технологии раскроя, во-вторых, необходимо учесть изменение уровня запасов в незавершенном производстве. Все это скажется на технико-экономических показателях предприятия. Поэтому решение задачи раскроя промышленных материалов с учетом изменений при этом технико-экономических показателей предприятия представляет большой практический интерес. Несколько аналогичные задачи рассматриваются в работе [2].

Пусть для производства m деталей раскраивается листовая сталь на полосы необходимой ширины, из которых получают заготовки деталей. Заводская технология предусматривает раскрой листа на полосы только для какой-то одной детали. Составляются эффективные способы раскроя листа (вручную или на ЭВМ) на полосы различной, заданной технологией производства, ширины. Имеем n вариантов раскроя стального листа, причем первые m вариантов соответствуют существующей технологии раскроя. Введем следующие обозначения:

a_{ij} - количество заготовок детали i, $i=1,2,\ldots,m$, получаемых при j-ом способе раскроя, $j=1,2,\ldots,n$;

c_j - стоимость отходов листа (за вычетом стоимости отходов как металлолома) при j-ом способе раскроя;

$\bar{c}_j$ - дополнительные затраты при j -ом, $j = m+1, \ldots, n$, способе раскроя;

d_i - себестоимость заготовки детали i после раскроя листа на полосы по заводской технологии;

b_i^k - потребность в заготовках детали i в k -ом плановом периоде (месяце), $k = 1, 2, \ldots, K$.

С точки зрения получения максимальной экономии металла необходимо было бы оптимально раскроить его сразу на квартальную (годовую) потребность в деталях. Однако это приведет к увеличению уровня незавершенного производства. Поэтому необходимо определить такой план интенсивности $X = (x_1^1, \ldots, x_n^1; \ldots; x_1^K, \ldots, x_n^K)$ использования способов раскроя в планируемых периодах, который способствовал бы увеличению рентабельности производства и фондов экономического стимулирования.

Обозначим через Π прибыль, полученную за счет экономии металла при раскрое, а через Q_k - увеличение уровня незавершенного производства в периоде k, через e - месячный коэффициент платы за фонды. Значение $\Pi - e \sum_k Q_k$ соответствует той части расчетной прибыли, которая будет получена при внедрении новой технологии раскроя. Прибыль может быть определена следующим образом. Рассчитываем стоимость отходов, приходящуюся на одну заготовку детали i при старой технологии раскроя: $c_j / a_{ij} = \tilde{c}_i$, $j = 1, 2, \ldots, m$. Тогда любой новый вариант раскроя дает экономию (убыток) в размере $Э_j = \sum_i a_{ij} \tilde{c}_i - c_j - \bar{c}_j$, $j = m+1, \ldots, n$. Таким образом, $\Pi = \sum_{k=1}^{K} \sum_{j=m+1}^{n} Э_j x_j^k$.

Сложнее определить изменение уровня незавершенного производства. Пусть V_i - вес заготовки детали i. Тогда экономию $Э_{ij}$, приходящуюся на деталь i, получаемую при j -ом способе раскроя, определим так:

$$Э_{ij} = Э_j V_i / \sum_{i=1}^{m} a_{ij} V_i .$$

Обозначим через x_{ij}^k количество заготовок детали i, которые получены при j -ом способе раскроя и пойдут в производство в месяце k. Через y_{ij}^k - заготовки детали i (находящиеся еще в неразрубленных полосах), полученные при j -ом способе раскроя, но оставленные в периоде k для потребности производства в других месяцах. Обозначим через τ_i длительность (в месяцах) нахождения детали i в производственном процессе. Тогда, учитывая изменение себестоимости детали ($d_i - \text{э}_{ij}$), уровень незавершенного производства уменьшится на величину $\sum\limits_{i,j} \text{э}_{ij} x_{ij}^{K} \tau_i$. Отсюда и плата за оборотные фонды уменьшится на величину $e \sum\limits_{K,i,j} \text{э}_{ij} x_{ij}^{K} \tau_i$.

Предположим, что раскрой металла осуществляется в начале каждого месяца. Тогда увеличение уровня незавершенного производства в месяце K составит $\sum\limits_{i,j} (d_i - \text{э}_{ij}) y_{ij}^{K}$, что и определяет увеличение платы за фонды: $e \sum\limits_{K,i,j} (d_i - \text{э}_{ij}) y_{ij}^{K}$.

Таким образом, мы пришли к следующей задаче линейного программирования.

Максимизировать расчетную прибыль предприятия за счет рационального раскроя металла

$$\sum_{K,j} \text{э}_j x_j^{K} + e \sum_{K,i,j} \text{э}_{ij} \tau_i x_{ij}^{K} - e \sum_{K,i,j} (d_i - \text{э}_{ij}) y_{ij}^{K} , \tag{I}$$

$$K = 1, 2, \ldots, K; \quad i = 1, 2, \ldots, m; \quad j = m+1, \ldots, n,$$

при этом учитывается потребность в заготовках деталей в каждом периоде

$$\sum_{j=m+1}^{n} x_{ij}^{K} \leq b_i^{K} , \quad i = 1, 2, \ldots, m; \ K = 1, 2, \ldots, K, \tag{2}$$

выполняется баланс имеющихся в наличии и расходуемых в производстве заготовок деталей.

$$a_{ij} x_j^{K} - x_{ij}^{K} + y_{ij}^{K-1} - y_{ij}^{K} = 0 , \quad y_{ij}^{K} = 0 , \tag{3}$$

$$K = 1, 2, \ldots, K; \quad i = 1, 2, \ldots, m; \ j = m+1, \ldots, n,$$

$$x_j^{K}, x_{ij}^{K}, y_{ij}^{K} \geq 0. \tag{4}$$

Если после решения задачи (I)-(4) мы получим для какого-то из ограничений (2) нулевую двойственную оценку, то в этом случае нетрудно определить интенсивность использования соответствующего заводского способа раскроя.

Размерность задачи (I)-(4) велика: $K[m + m(n + m)]$ ограничений, что затрудняет использование даже программ для решения задач линейного программирования с матрицами блочно-диагональной структуры (например, [3]), так как количество основных ограничений, учитывающих связь между отдельными блоками задачи, очень велико.

Однако задача (I)-(4) может быть сведена к двухкомпонентной задаче линейного программирования.

Обозначим через x_{ij}^{k} количество заготовок детали i, которые получены при j-ом способе раскроя в k-ом месяце, и пойдут в производство в этом же периоде. Через переменную $y_{ij}^{k\ell}$ обозначим количество деталей i, полученных при j-ом способе раскроя в k-ом периоде и идущих в производство ℓ-ым месяцем позже, $\ell = 1, 2, \ldots, k-1$. Отсюда $y_{ij}^{k} = \sum_{\ell=1}^{K-k} y_{ij}^{k\ell}$.

Значения переменных x_j^k можно определить следующим образом:

$$x_j^k = (x_{ij}^k + y_{ij}^k)/a_{ij}, \; j = m+1, \ldots, n; \; i = 1, 2, \ldots, m; \; a_{ij} \geq 0.$$

Для однозначного определения x_j^k зафиксируем в каждом столбце матрицы (a_{ij}), $i = 1, 2, \ldots, m$, $j = m+1, \ldots, n$, по одному элементу $a_{i_* j}$. Запишем матрицу (q_{ij}), $i = 1, 2, \ldots, m$, $j = m+1, \ldots, n$, где $q_{ij} = 1/a_{i_* j}$, если $i = i_*$; $q_{ij} = 0$, если $i \neq i_*$.

Теперь задача (I)-(4) может быть записана следующим образом.

Максимизировать

$$\sum_{k,i,j} (e\tau_i \vartheta_{ij} + \vartheta_j q_{ij}) x_{ij}^k - \sum_{k,i,j,\ell} [\ell e(d_i - \vartheta_{ij}) - \vartheta_j q_{ij}] y_{ij}^{k\ell} \qquad (5)$$

$$k = 1, 2, \ldots, K; \; i = 1, 2, \ldots, m; \; j = m+1, \ldots, n; \; \ell = 1, 2, \ldots, K-k,$$

при условиях:

$$\sum_{j=m+1}^{n} x_{ij}^k + \sum_{\ell=1}^{K-k} \sum_{j=m+1}^{n} y_{ij}^{k-\ell,\ell} \leq b_i^k, \; i = 1, 2, \ldots, m; \; k = 1, 2, \ldots, K, \qquad (6)$$

$$(x_{ij}^k + y_{ij}^k)/a_{ij} - (x_{i+\mu,j}^k + y_{i+\mu,j}^k)/a_{i+\mu,j} = 0, \qquad (7)$$

$$a_{ij} > 0, \; a_{i+\mu,j} > 0, \; i + \mu \leq m, \; \mu = 1, 2, \ldots; \; k = 1, 2, \ldots, K;$$

$$i = 1, 2, \ldots, m; \; j = m+1, \ldots, n,$$

$$y_{ij}^k - \sum_{\ell=1}^{K-k} y_{ij}^{k\ell} = 0, \; i = 1, 2, \ldots, m, \; k = 1, 2, \ldots, K; \; j = m+1, \ldots, n, \qquad (8)$$

$$x_{ij}^k, \; y_{ij}^{k\ell}, \; y_{ij}^k \geq 0. \qquad (9)$$

Условие (7) в данной задаче равносильно условию $a_{ij}x_j^K - x_{ij}^K - y_{ij}^K$, т.е. учитывается получение при каждом способе раскроя заготовок различных деталей в заданной пропорции.

Как мы видим, в задаче (5)-(9) при любой переменной в ограничениях (6)-(8) имеем только два коэффициента, отличных от нуля, т.е. мы пришли к двухкомпонентной задаче линейного программирования с размерностью $mK+K(n-m)(m-1)+(K-1)(n-m)n$ ограничений. Программа, например, [4] допускает 592 ограничения. Следовательно, если учесть, что многие $a_{ij}=0$ и $n\approx(2\div3)m$, то по программе (4) можно решить задачу с $m=10\div15$, $K=3$.

Литература

I. Канторович Л.В., Залгаллер В.А., Расчет рационального раскроя промышленных материалов. Л., Лениздат, 1951.

4. Bernhard R.H. Use of inventories for reduction of trim loses. J.Industr. Enging.1967,18,N11,p.668-670.

3. Звягина Р.А., Программа для решения на М-20 задач линейного программирования с матрицами блочно-диагональной структуры. "Оптимальное планирование". В.13, Новосибирск, "Наука", 1969, 62-194.

4. Яковлева М.А., Программа для решения двухкомпонентной задачи линейного программирования. Оптимальное планирование. В. 10, Новосибирск, "Наука", 1968, 81-143.

Поступила в ред.-изд.отд.
15.У. 1972 г.