УДК 51.330:115

ТЕОРЕМА О МАГИСТРАЛИ В СИЛЬНЕЙШЕЙ ФОРМЕ

А.Ж.Жафяров

Теорема о магистрали в сильнейшей форме, принадлежащая В.Л. Макарову, доказана для базисных[ж)] оптимальных траекторий в моделях Неймана с невырожденным темпом роста (см. [1]). В данной работе эта форма теорем о магистрали доказывается с другой точки зрения, чем в работе [1], и для другого класса оптимальных траекторий. Приведенное здесь доказательство указанной теоремы существенно опирается на теоремы В.Л.Макарова и А.М.Рубинова, связывающие понятия характеристики траектории и траектории, растущей средним темпом α. В статье рассматриваются так называемые φ-оптимальные траектории, для которых в моделях Неймана имеет место теорема о магистрали в сильнейшей форме (теорема 1.1), а в моделях Гейла - сходимость оптимальных траекторий к неймановской грани (теорема 2.1). Далее рассматриваются модели Неймана-Гейла, обладающие единственным равновесным вектором цен. Для таких моделей указывается такая коническая окрестность луча цен, что любая оптимальная траектория принадлежит неймановской грани с того момента, с какого ее характеристика окажется в этой окрестности луча цен (теоремы 1.2 и 2.2). В конце статьи описывается важный класс моделей, в которых имеют место указанные выше теоремы.

ж) В этой работе используется терминология, принятая в [1].

1^0. Рассмотрим модель Неймана $\mathcal{Z}$, определяемую парой неотрицательных матриц A и B, имеющих, соответственно, n строк и m столбцов. Пусть неймановская грань N_α этой модели, соответствующая темпу роста α, натянута на m_1 образующих, где $m_1 \le m$. Считаем, что образующие неймановской грани занумерованы индексами 1,2,..., m_1. Пусть A_1 и B_1 - матрицы, составленные из первых m_1 столбцов соответственно матриц A и B, а A_2 и B_2 - матрицы, составленные из последних $m-m_1$ столбцов соответственно матриц A и B. В этой работе всюду считаем темп роста $\alpha = 1$. Далее, положим

$$Q_\alpha = \{(f, g) \in \mathcal{Z}' : fA_2 > gB_2\},$$

где $\mathcal{Z}'$ - модель, двойственная к модели $\mathcal{Z}$. Ясно, что все равновесные пары (p, p), где $p \in int\, \Pi_\alpha$, $\Pi_\alpha = \{p \in (R^n_+)^*,$ $p(x) \geqslant p(y), (x,y) \in \mathcal{Z}\}$, принадлежат множеству Q_α. Действительно, из определения неймановской грани (см. [I]) следует, что для любого равновесного вектора $p \in int\, \Pi_\alpha$ имеют место соотношения $pA_1 = pB_1$ и $pA_2 > pB_2$. Отсюда вытекает справедливость указанного выше утверждения. Введем следующее определение, которое будет играть в дальнейшем существенную роль.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Оптимальную траекторию $\chi = (x_t)_{t=0}^\infty$ назовем φ-оптимальной, если она допускает характеристику $\varphi = (f_t)_{t=0}^\infty$ такую, что все предельные точки последовательности $\{(f_{t_k}, f_{t_k+1})\}$ принадлежат множеству Q_α.

Существование φ-оптимальных траекторий следует из того, что любая бесконечная траектория, лежащая на неймановской грани для всех моментов времени, является φ-оптимальной. Для таких траекторий искомой характеристикой является траектория $\varphi = \{f_t\}$, где $f_t = p$ для всех t = 0,1,2,..., $p \in int\, \Pi_\alpha$. В частности, траектория $\chi = (x_t)$, где $x_t = \alpha^t \bar{x}$, α - неймановский темп роста, $\bar{y} = \alpha \bar{x}$, заведомо является φ-оптимальной. Заметим, что в любой модели Неймана-Гейла, обладающей строго положительным равновесным вектором цен, имеется хотя бы одна φ-оптимальная траектория, так как в этом случае модель содержит равновесную пару ($\bar{x}$, $\alpha\bar{x}$). В пункте 3^0 будет показан целый класс моделей Неймана, в которых все оптимальные траектории являются φ-оптимальными. Заметим также, что понятия φ-оптимальности и базисности оптимальных траекторий являются независимыми. Оказывается φ -оптимальные траектории хороши тем, что для них в модели Неймана имеет место теорема о магистрали в сильнейшей форме. Предварительно докажем следующую лемму, необходимую для доказательства теорем I.I и 2.I.

ЛЕММА I.I. Пусть в модели Неймана-Гейла Z имеется равновесная пара $(\bar{x}, \alpha\bar{x})$, соответствующая темпу роста $\alpha=1$, такая что $\bar{x}\gg 0$. Любая характеристика $\varphi=(f_t)$ траектории $\chi=(x_t)$ этой модели Z ограничена.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из определения характеристики следует, что функция $h_\chi(t)=f_t(x_t)$ убывает для любой траектории модели Неймана-Гейла. Возьмем траекторию $\tilde{\chi}=(\tilde{x}_t)$ такую, что для любого момента времени t имеет место равенство: $\tilde{x}_t=\bar{x}$. Из условия леммы следует, что такая траектория найдется. Из того, что вектор $\bar{x}$ строго положителен и для любого t справедливо неравенство $f_t(\bar{x})\geqslant f_{t+1}(\bar{x})$, следует ограниченность последовательности $\varphi=(f_t)$. Лемма доказана.

Приводимая ниже теорема I.I показывает, что в модели Неймана для всех φ -оптимальных траекторий имеет место теорема о магистрали в сильнейшей форме.

ТЕОРЕМА I.I. Пусть в модели Неймана имеется равновесная пара $(\bar{x}, \alpha\bar{x})$, соответствующая темпу роста $\alpha=1$, такая что $\bar{x}\gg 0$. Для любой φ -оптимальной траектории $\bar{\chi}=(\bar{x}_t)$ этой модели найдется номер $\mathcal{L}$ такой, что для всех $t\geqslant\mathcal{L}$ имеет место включение $(\bar{x}_t, \bar{x}_{t+1})\in N_\alpha$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\varphi=(f_t)$ - такая характеристика траектории $\bar{\chi}$, что предел любой сходящейся подпоследовательности $\{(f_{t_k}, f_{t_k+1})\}$ принадлежит множеству Q_α. Из определения характеристики следует, что 1) для любого момента времени t имеет место неравенство $f_t A\geqslant f_{t+1}B$ и 2) на тех столбцах a^k и b^k матриц A и B, которые используются в траектории $\bar{\chi}$ с положительной интенсивностью, достигается равенство. Теорема будет доказана, если удастся показать, что любой процесс (a^k, b^k) с номером $k \in J$, $J=\{m_1+1, \ldots, m\}$ в оптимальной траектории $\bar{X}=(\bar{x}_t)$ используется не более чем конечное число раз. Предположим противное, то есть пусть для какого-то процесса (a^k, b^k), $k \in J$, найдется подпоследовательность (t_k), для которой интенсивность этого процесса (a^k, b^k) в состоянии $(\bar{x}_{t_k}, \bar{x}_{t_k+1})$ положительна. Так как последовательность (f_{t_k}) ограничена, из нее можно выделить сходящуюся подпоследовательность $f_{t_{k_e}} \to f$. Рассмотрим последовательность $(f_{t_{k_e}+1})$. Из нее также можно выделить сходящуюся подпоследовательность: $f_{t_{k_{eq}}+1} \to g$. Помимо этого, $f_{t_{k_{eq}}} \to f$. Имеем, что $f(a^k)=g(b^k)$, $k \in J$, что противоречит тому условию, что $(f,g) \in Q_\alpha$. Теорема доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ I. Из доказательства теоремы ясно, что если траектория модели Неймана не является φ-оптимальной, то для нее теорема о магистрали в сильнейшей форме может и не быть справедливой. Заметим также, что φ-оптимальность траектории не является необходимым условием того, что для нее имеет место теорема о магистрали в сильнейшей форме.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Если неймановская грань N_α такова, что принадлежащие ей траектории сходятся к равновесному лучу $(\lambda \bar{x})_{\lambda \geq 0}$, то все φ-оптимальные траектории будут сходящимися к этому лучу $(\lambda \bar{x})_{\lambda \geq 0}$.

Рассмотрим теперь модель Неймана, обладающую единственным (с точностью до множителя) равновесным вектором цен $\bar{p}$ (о таких моделях см. [3]). Оказывается, что в этой модели можно указать такую единую для всех оптимальных траекторий коническую окрестность луча цен, что оптимальная траектория принадлежит неймановской грани с того момента, с какого ее характеристика принадлежит этой окрестности луча цен $(\lambda \bar{p})_{\lambda \geq 0}$. За искомую ε-окрестность точки $\bar{p}$ луча $(\lambda \bar{p})_{\lambda \geq 0}$ можно взять любую окрестность, определяемую неравенством

$$\varepsilon \leq \frac{\gamma}{n(\gamma_1 + \gamma_2)}, \qquad (I)$$

где $\gamma = \min\limits_{k \in J} (\bar{p}(a^k) - \bar{p}(b^k)) > 0$, γ_1 и γ_2 - наибольшие элементы соответственно матриц A_2 и B_2. Точнее говоря, имеет место

ТЕОРЕМА I.2. Пусть $\bar{\chi}=(\bar{x}_t)$ - оптимальная (конечная или бесконечная) траектория модели Неймана. Если существует её характеристика $(\bar{f}_t)$ такая, что при некоторых t и c точки $c\bar{f}_t$ и $c\bar{f}_{t+1}$ находятся в $\mathcal{E}$-окрестности точки $\bar{p}$ (где $c>0$, а число $\mathcal{E}$ определяется из соотношения (I)), то пара $(\bar{x}_t, \bar{x}_{t+1})$ принадлежит неймановской грани N_α.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Вектор $\bar{p}$ можно представить в виде: $\bar{p}=c\bar{f}_t+\delta$ и $\bar{p}=c\bar{f}_{t+1}+\delta'$, где δ и δ' - n-мерные векторы, абсолютная величина координат которых меньше $\mathcal{E}$. Предположим теперь, что $(\bar{x}_t, \bar{x}_{t+1}) \bar{\in} N_\alpha$. Отсюда следует, что вектор $u'_t = Pr_\Gamma u_t$, где Γ - грань конуса R^m_+, натянутая на орты с номэрами $m_1+1, \ldots, m$, неотрицателен и число ν, равное сумме координат этого вектора, положительно. Заметим, что пара $\frac{1}{\nu}(\bar{x}_t, \bar{x}_{t+1})$ также не принадлежит неймановской грани N_α и, кроме того, $\bar{p}(\frac{1}{\nu}\bar{x}_t)-\bar{p}(\frac{1}{\nu}\bar{x}_{t+1}) = \frac{1}{\nu}(\bar{p}(A_2 u'_t)-\bar{p}(B_2 u'_t))$. Положим $\frac{1}{\nu}u'_t=\tilde{u}_t$. Координаты вектора $\tilde{u}_t$ неотрицательны и $\sum\limits_{i=1}^{m-m_1}\{\tilde{u}_t\}^i=1$, где $\{\tilde{u}_t\}^i$ - координата вектора $\tilde{u}_t$ с номером i. Имеем:

$$\gamma \le \bar{p}(A_2\tilde{u}_t)-\bar{p}(B_2\tilde{u}_t)=(c\bar{f}_t+\delta)(A_2\tilde{u}_t)-(c\bar{f}_{t+1}+\delta')(B_2\tilde{u}_t)=$$

$$=(c\bar{f}_t(A_2\tilde{u}_t)-c\bar{f}_{t+1}(B_2\tilde{u}_t))+(\delta(A_2\tilde{u}_t)-\delta'(B_2\tilde{u}_t))=\delta(A_2\tilde{u}_t)-\delta'(B_2\tilde{u}_t).$$

Справедливость равенства $c\bar{f}_t(A_2\tilde{u}_t)=c\bar{f}_{t+1}(B_2\tilde{u}_t)$ следует из того, что

1) для любого момента времени t имеет место неравенство

$$\bar{f}_t A \geqslant \bar{f}_{t+1} B;$$

2) на тех столбцах a^κ и b^κ матриц A и B, которые используются в оптимальной траектории $\bar{\chi}$ с положительной интенсивностью, достигается равенство,

3) характеристика траектории определяется с точностью до положительного множителя. Далее, имеем:

$$\delta(A_2\tilde{u}_t)-\delta'(B_2\tilde{u}_t)\le|\delta|(A_2\tilde{u}_t)+|\delta'|(B_2\tilde{u}_t)<n(\gamma_1+\gamma_2)\cdot\mathcal{E},$$

где $|\delta|$ и $|\delta'|$ - векторы, составленные из абсолютных величин координат, соответственно, векторов δ и δ'. Итак, мы получили неравенство $\gamma < n(\gamma_1+\gamma_2)\cdot\varepsilon$, которое противоречит выбору числа ε. Теорема доказана.

СЛЕДСТВИЕ. Пусть оптимальная траектория $\bar{\chi}=(\bar{x}_t)_{t=0}^{\infty}$ такая, что для нее найдется характеристика $\bar{\varphi}=(\bar{f}_t)_{t=0}^{\infty}$, сходящаяся к точке $c\bar{p}$ ($c>0$) на луче $(\lambda\bar{p})_{\lambda\geq 0}$. Траектория $\bar{\chi}$ принадлежит к неймановской грани с того момента времени t, с какого точки последовательности $(\frac{1}{c}\bar{f}_t)$ принадлежат конической ε-окрестности луча $(\lambda\bar{p})_{\lambda\geq 0}$, где ε определяется из соотношения (I).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Последовательность $(\frac{1}{c}\bar{f}_t)$ является характеристикой траектории $\bar{\chi}$, сходящейся к точке $\bar{p}$. Полагая $\varepsilon=\frac{\gamma}{n(\gamma_1+\gamma_2)}$, найдем номер $\mathcal{L}$, начиная с которого все точки последовательности $(\frac{1}{c}\bar{f}_t)$ находятся в ε-окрестности точки $\bar{p}$. По теореме I.2 получаем справедливость указанного утверждения.

ЗАМЕЧАНИЕ. Оптимальные траектории, для которых найдутся характеристики, сходящиеся к равновесным векторам $p\in int\,\Pi_\alpha$, составляют узкий подкласс в классе φ-оптимальных траекторий. Этим и объясняется то, что для них имеют место более сильные утверждения, чем для φ-оптимальных траекторий. Отметим также, что теорема I.2 и следствие из нее имеют место и в случае. если характеристика оптимальной траектории сходится к лучу $(\lambda p)_{\lambda\geq 0}$, где $p\in int\,\Pi_\alpha$, и $\gamma=\min\limits_{k\in J}(p(a^k)-p(b^k))>0$. Однако эти условия трудно проверяемы, если множество Π_α состоит не из одного луча. В пункте 3^0 будут указаны условия, при которых в моделях Неймана множество Π_α состоит из одного луча $(\lambda\bar{p})_{\lambda\geq 0}$. Кроме того, там же будет доказано, что в таких моделях любая характористика любой бесконечно оптимальной траектории, исходящей из внутренней точки конуса R^n_+, сходится к точке $c\bar{p}$, где $c>0$.

2^0. Рассмотрим аналоги приведенных выше теорем для модели Гейла $\mathcal{Z}$. Пусть по-прежнему N_α - неймановская грань модели $\mathcal{Z}$, соответствующая темпу роста α (напомним, что α считается равным I). Положим

$$Q_\alpha=\{(f,g)\in\mathcal{Z}': f(x)>g(y),\ (x,y)\in\mathcal{Z}\setminus N_\alpha\},$$

где $\mathcal{Z}'$ - модель, двойственная к модели $\mathcal{Z}$. Тем же способом, что и для модели Неймана, введем понятие φ-оптимальной траектории.

ТЕОРЕМА 2.I. Пусть в модели Гейла $\mathcal{Z}$ имеется равновесная пара $(\bar{x},\alpha\bar{x})$, соответствующая темпу роста $\alpha=1$, такая что $\bar{x}\gg 0$. Любая φ-оптимальная траектория $\bar{\chi}=(\bar{x}_t)$ этой модели сходится к неймановской грани N_α.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как $\alpha=1$, то последовательность $(\bar{x}_t)$ ограничена Предполагая, что заключение теоремы неверно, получим, что на̂ется сходящаяся подпоследовательность $\{(\bar{x}_{t_k}, \bar{x}_{t_k+1})\}$, предел (x,y) которой не принадлежит неймановской грани N_α. Так как конус $\mathcal{Z}$ замкнутый, то пара (x,y) будет принадлежать множеству $\mathcal{Z}\setminus N_\alpha$. Рассмотрим последовательность $\{(f_{t_k}, f_{t_k+1})\}$, составленную из элементов характеристики $\varphi=\{f_t\}$ траектории $\bar{\chi}=(\bar{x}_t)$. По лемме I.I, эта последовательность ограничена. Следовательно, найдется подпоследовательность t_{k_q} такая, что $(f_{t_{k_q}}, f_{t_{k_q}+1})\longrightarrow(f,g)$.

Так как траектория $\bar{\chi}$ является φ-оптимальной, то найдется такая характеристика $\varphi=(f_t)$, предел любой сходящейся подпоследовательности которой принадлежит множеству Q_α. Имеем: $(f,g)\in Q_\alpha$. Очевидно, что $(\bar{x}_{t_{k_q}}, \bar{x}_{t_{k_q}+1})\to(x,y)$.

Из того, что траектория $\varphi=(f_t)$ является характеристикой траектории $\bar{\chi}=(\bar{x}_t)$, имеем: $f_{t_{k_q}}(\bar{x}_{t_{k_q}})=f_{t_{k_q}+1}(\bar{x}_{t_{k_q}+1})$. Отсюда, переходя к пределу, получим, что $f(x)=g(y)$, т.е. $(f,g)\notin Q_\alpha$. Получили противоречие. Теорема доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ. При условиях теоремы любая φ-оптимальная траектория, растущая средним темпом α, сходится к точке $(x,y)\in N_\alpha$, причем $(x,y)\neq(0,0)$.

Рассмотрим модель Гейла $\mathcal{Z}$, обладающую единственным равновесным вектором цен $\bar{p}$. В этой модели $\mathcal{Z}$ имеет место аналог теоремы I.2 при следующем дополнительном ограничении на модель: $\inf(\bar p(x)-\bar p(y))=\gamma>0$ для всех $(x,y)\in Z\setminus N_\alpha$ и $\|(x,y)\|=\sum_{i=1}^{n}\{x\}^i+\{y\}^i=1$, где $\{x\}^i$ и $\{y\}^i$ – координаты векторов x и y с номером i. Если это условие выполнено, то справедлива

ТЕОРЕМА 2.2. Пусть $\bar\chi=(\bar x_t)$ – оптимальная (конечная или бесконечная) траектория модели Гейла Z. Если существует её характеристика $\bar\varphi=(\bar f_t)$ такая, что при некоторых t и c точки $c\bar f_t$ и $c\bar f_{t+1}$ входят в ε-окрестность точки $\bar p$, где $c>0$ и $\varepsilon\le\gamma$, то пара $(\bar x_t,\bar x_{t+1})$ принадлежит неймановской грани N_α.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Вектор $\bar p$ можно представить в виде: $\bar p=c\bar f_t+\delta$ и $\bar p=c\bar f_{t+1}+\delta'$, где δ и δ' – n-мерные векторы, абсолютная величина координат которых меньше ε. Предположим теперь, что $(\bar x_t,\bar x_{t+1})\notin N_\alpha$. Отсюда следует, что $(x_t,x_{t+1})\notin N_\alpha$, где $x_t=\frac{\bar x_t}{\|(\bar x_t,\bar x_{t+1})\|}$ и $x_{t+1}=\frac{\bar x_{t+1}}{\|(\bar x_t,\bar x_{t+1})\|}$. Таким образом,

$$\gamma\le\bar p(x_t)-\bar p(x_{t+1})=(c\bar f_t+\delta)(x_t)-(c\bar f_{t+1}+\delta')(x_{t+1})=$$
$$=(c\bar f_t(x_t)-c\bar f_{t+1}(x_{t+1}))+(\delta(x_t)-\delta'(x_{t+1}))=\delta(x_t)-\delta'(x_{t+1}),$$

и, кроме того,

$$\delta(x_t)-\delta'(x_{t+1})\le|\delta|(x_t)+|\delta'|(x_{t+1})<\varepsilon\cdot\sum_{i=1}^{n}\{x_t\}^i+\{x_{t+1}\}^i=\varepsilon,$$

где $|\delta|$ и $|\delta'|$ – векторы, составленные из абсолютных величин координат соответственно векторов δ и δ'. Неравенство $\gamma<\varepsilon$ противоречит выбору числа ε. Теорема доказана.

СЛЕДСТВИЕ. Пусть $\bar\chi=(\bar x_t)_{t=0}^{\infty}$ – оптимальная траектория, для которой существует характеристика $\bar\varphi=(\bar f_t)_{t=0}^{\infty}$, сходящаяся к точке $c\bar p$ ($c>0$) на луче $(\lambda\bar p)_{\lambda\ge0}$. Траектория $\bar\chi=(\bar x_t)_{t=0}^{\infty}$ принадлежит неймановской грани N_α с того момента, с какого точки последовательности $(\frac{1}{c}\bar{f}_t)$ принадлежат ε -окрестности точки $\bar{p}$, где $\varepsilon \le \chi$.

Укажем также, что в рассматриваемой ситуации справедливы утверждения, содержащиеся в замечании к теореме I.2.

3°. В этом пункте указывается класс моделей Неймана, в которых имеют место установленные выше теоремы.

Пусть модель Неймана $\mathcal{Z}$ определяется конусом $\mathcal{Z}(A,B)$, где $B=(E,B_2)$, $A=(A_1|A_2)$, E - единичная матрица порядка n, B_2 - матрица порядка $m-n$, A_1 и A_2 - матрицы, соответствующие E и B_2. Далее, пусть z - максимальное характеристическое число матрицы A_1. На модель $\mathcal{Z}$ наложим следующие ограничения T_1 и T_2, которые в дальнейшем будут играть существенную роль.

T_1) Матрица A_1 - примитивна.

Из этого предположения следует, что найдутся строго положительные и единственные (с точностью до множителя) векторы $\bar{x}$ и $\bar{p}$ такие, что $A_1\bar{x}=z\bar{x}$, $\bar{p}A_1=z\bar{p}$, где $z>0$ (см. [2]).

T_2) Имеет место неравенство $\bar{p}A_2 \geqslant z\bar{p}B_2$. Это условие (или $\bar{p}a^k \geqslant z\bar{p}b^k$, $n+1 \le k \le m$) с экономической точки зрения означает, что затраты при ценах $\bar{p}$ на последних $m-n$ базисных процессах не меньше соответствующего выпуска при тех же ценах $\bar{p}$, умноженного на число z. Заметим еще, что условие T_2 является необходимым и достаточным для того, чтобы число $1/z$ было темпом роста модели $\mathcal{Z}$ (см. [3]). Рассматриваемая модель является более общей, чем модель Моришимы, рассмотренная в [4]. Действительно, если 1) условие T_2 заменить на более жесткое, а именно, требовать выполнение строгого неравенства $\bar{p}A_2 > z\bar{p}B_2$, и 2) матрица B_2 специального вида (в частности, что каждая ее строка состоит из определенного числа нулей и единиц), то эта модель совпадает с моделью Моришимы.

Итак, пусть в модели Неймана $\mathcal{Z}$ выполнены предположения T_1 и T_2. Убедимся, прежде всего, в справедливости следующей леммы.

ЛЕММА 3.1. Число $1/z$ является единственным темпом роста модели $\mathcal{Z}$ со строго положительным и единственным (с точностью до положительного множителя) равновесным вектором цен, равным вектору $\bar{p}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Единственность темпа роста следует из известной теоремы (см. [1]) о модели с состоянием равновесия $(\alpha,(\bar{x},\bar{y}),\bar{p})$ со строго положительными векторами $\bar{x}$ и $\bar{p}$. Кроме того, поскольку $1/\tau$ - темп роста модели Z, то существует неотрицательный вектор p, для которого $pA_1 \geqslant \tau p$. Это неравенство в силу ограничений T_1 и T_2 имеет единственное (с точностью до множителя) решение, равное вектору $\bar{p}$ (см. [2]). Лемма доказана.

ТЕОРЕМА 3.1. Пусть в модели Неймана Z выполнены предположения T_1 и T_2. Далее, пусть $\bar{X}=(\bar{x}_t)$ - бесконечно оптимальная траектория, исходящая из внутренней точки конуса R^n_+. Для любой характеристики $\bar{\varphi}=(\bar{f}_t)$ траектории $\bar{X}$ имеет место равенство $\lim f_t \alpha^t = c\bar{p}$, где $c>0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\bar{\varphi}=(\bar{f}_t)$ - произвольная характеристика оптимальной траектории $\bar{X}=(\bar{x}_t)_{t=0}^{\infty}$, исходящей из начального состояния $\bar{x}_0 \gg 0$. Для удобства доказательства теоремы введем следующие обозначения. Положим $p_t = \alpha^t f_t D^{-1}$ и

$$D=\begin{pmatrix} \bar{p}_1 & 0 & \cdot & \cdot & 0 \\ 0 & \bar{p}_2 & \cdot & \cdot & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \bar{p}_n \end{pmatrix},$$

где D^{-1} - матрица, обратная к D, $\bar{p}_i$ - координата вектора $\bar{p}$ с номером i. Пусть $p_{t,i}$ - координата вектора p_t с номером i. Применяя метод, похожий на тот, который был применен Моришимой (см. [4]) для доказательства сходимости к неймановскому лучу цен, можно доказать, что $\lim \bar{c}_t = \lim \underline{c}_t = c$. Однако заметим, что здесь его метод применим только частично, так как в этой модели последовательность $(\underline{c}_t)$ может и не быть монотонно возрастающей. Кроме того, доказательство важного в этой теореме неравенства $c>0$ в нашей модели удается провести, как нетрудно убедиться в этом ниже, лишь опираясь на предложения, связывающие понятия характеристики траектории и траектории, растущей средним темпом α. Для доказательства того, что $c>0$, воспользуемся тем, что $\bar{\chi}=(\bar{x}_t)$ – бесконечно оптимальная траектория модели Неймана, исходящая из внутренней точки конуса R^n_+. Действительно, применяя теорему 3.3 из [I], получим, что траектория $\bar{\chi}=(\bar{x}_t)$ допускает характеристику. Так как $\bar{x}_0 \gg 0$, то для любой характеристики $\bar{\varphi}=(\bar{f}_t)$ траектории $\bar{\chi}=(\bar{x}_t)$ имеем, что $\bar{f}_0(\bar{x}_0)>0$. Для траектории $\bar{\varphi}=(\bar{f}_t)$ характеристикой является траектория $\bar{\chi}=(\bar{x}_t)$, так как I) функция $h_{\bar{\varphi}}=\bar{x}_t(\bar{f}_t)=\bar{f}_t(\bar{x}_t)=[\bar{f}_t\,\bar{x}_t]$ постоянна, 2) для любой траектории $\varphi=(f_t)$ модели $\mathcal{Z}'$ функция $h_\varphi=\bar{x}_t(f_t)=f_t(\bar{x}_t)$ убывает. Справедливость последнего утверждения следует из того, что для любого t =0,I,... пара $(f_t, f_{t+1})\in\mathcal{Z}'$, а потому $f_t(\bar{x}_t)\geqslant f_{t+1}(\bar{x}_{t+1})$.

Итак, любая характеристика $\bar{\varphi}=(\bar{f}_t)$ траектории $\bar{\chi}=(\bar{x}_t)$ является траекторией, допускающей характеристику $\bar{\chi}=(\bar{x}_t)$, причем такую, что $\bar{f}_0(\bar{x}_0)>0$. Далее, по лемме 3.I модель $\mathcal{Z}$ обладает состоянием равновесия $(\alpha,(\bar{x},\bar{y}),\bar{p})$ таким, что $\alpha=1/\tau$, $\alpha\bar{x}=\bar{y}\gg 0$ и $\bar{p}\gg 0$. Значит, модель $\mathcal{Z}'$ имеет состояние равновесия $(1/\alpha,(\bar{f},\bar{g}),\bar{x})$ такое, что $1/\alpha\,\bar{f}=\bar{g}\gg 0$ и $\bar{x}\gg 0$ (чтобы убедиться в этом, достаточно положить $\bar{f}=\bar{p}A_1$ и $\bar{g}=\bar{p}$). Теперь, применяя лемму 4.2 из [I], получим, что траектория $\bar{\varphi}=(\bar{f}_t)$ растет средним темпом $1/\alpha$. Отсюда следует, что $c>0$. Теорема доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ I. В рассматриваемой модели $\mathcal{Z}$ все оптимальные траектории являются φ-оптимальными, и потому справедливы теоремы, рассмотренные в пунктах I° и 2°.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. В доказательстве теоремы 3.I существенную роль играла пара матриц (A_1, E). Теорема остается в силе, если эту пару заменить на другую пару матриц $(\tilde{A}_1, \tilde{B}_1)$, обладающую тем свойством, что матрица $\tilde{A}_1\tilde{B}_1^{-1}$ примитивна.

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Если в рассматриваемой модели $\mathcal{Z}$ I) условие T_2 заменить на более жесткое, а именно, требовать выполнение строгого неравенства $\bar{p}A_2>\tau\bar{p}B_2$, 2) требовать примитивность отображения*), определяемого конусом $\mathcal{Z}(A_1, E)$, то

*) Отображение a называется (см. [4]) примитивным, если для любого начального состояния $x_0 \geqslant 0$ найдется натуральное число τ такое, что $x_\tau\in a^\tau(x_0)$ и $x_\tau\gg 0$.

число $1/z$ будет невырожденным темпом роста. В полученной таким образом модели любые конечные куски бесконечно оптимальных траекторий будут базисными в смысле следующего определения.

Допустимую траекторию $(x_t)_{t=0}^{\infty}$ назовем базисной, если для любого T существует представление $x_t = \sum_{i=1}^{m} a^i u_t^i$, $x_{t+1} = \sum_{i=1}^{m} b^i u_t^i$ $(t=0,1,\dots,T-1)$ такое, что вектор $(u_0^1,\dots,u_0^m,u_1^1,\dots,u_1^m,\dots,u_{T-1}^1,\dots,u_{T-1}^m)$ содержит не более $nT+k$ отличных от нуля координат, где k - некоторое натуральное число. Заметим, что мы здесь несколько видоизменили определение базисности траектории, однако, теорема 4.7 ([I]) остается в силе и для таких траекторий.

Автор выражает искреннюю благодарность своему научному руководителю А.М.Рубинову за внимание и помощь в работе.

Литература

I. Макаров В.Л., Рубинов А.М., Суперлинейные точечно-множественные отображения и модели экономической динамики, УМН, 25:5 (1970). 125-169.

2. Гантмахер Ф.Р., Теория матриц, Наука, М., 1967.

3. Хафяров А.Х., О единственности равновесных цен в одной модели Неймана. Оптимизация, 2 (19), (1971).

4. M.Morishima, Equilibrium, Stability and Growth, Clarendon Press, London, 1964.

Поступила в ред.-изд. отд.
10.XI. 1971 г.