УДК 51.330:115

ДВОЙСТВЕННЫЙ ПОДХОД К ОДНОЙ ИЗ ФОРМ ТЕОРЕМ О МАГИСТРАЛИ

А.Ж.Жафяров

Работа посвящена исследованию асимптотического поведения оптимальной траектории моделей Неймана и Неймана-Гейла через её характеристику (экономически - через траекторию цен). Эта статья является продолжением предыдущей работы автора, в которой во множестве всех оптимальных траекторий указанных технологических моделей выделено более узкое множество так называемых φ -оптимальных траекторий, для которых справедлива теорема о магистрали в сильнейшей форме. В этой работе выделены классы моделей Неймана и Неймана-Гейла,ж) в которых имеет место теорема о магистрали в сильнейшей форме.

I. Рассмотрим сначала модель Неймана $Z=\{(Au, Bu): u\in R^m_+\}$, где R^m_+ - неотрицательный ортант m -мерного евклидова пространства, A и B - неотрицательные матрицы порядка $n\times m$ (n - число продуктов, m - число технологических базисных процессов (a^i, b^i), a^i и b^i - соответствующие столбцы матриц A и B, причем предполагается, что в матрице A нет чисто нулевых столбцов).

Пусть $(\alpha, (\bar{x}, \bar{y}), p)$ - состояние равновесия модели Z, соответствующее темпу роста α. Положим $U_\alpha=\{\bar{u}\in R^m_+ : \alpha A\bar{u}\leq B\bar{u}\}$. Ясно, что U_α - выпуклое непустое множество. Нетрудно убедиться и в том, что все векторы $\bar{u}$ из $\operatorname{int} U_\alpha$ имеют одни и те же положительные координаты. Положим $J_\alpha=\{i:\{\bar{u}\}^i>0,$

ж) В этой работе используется терминология, принятая в [I].

$\bar{u} \in \operatorname{int} U_\alpha\}$. Множество всех индексов i базисных процессов (a^i, b^i), являющихся образующими неймановской грани N_α, обозначим через J. Для любой модели Неймана имеет место включение $J \supseteq J_\alpha$. Заметим, что существуют модели Неймана, в которых множество J строго включает J_α.

Рассмотрим модель Z' (модель цен), двойственную к модели Z. По определению ([2]),

$$Z' = \{(f,g) \in R^n_+ \times R^n_+ : fx \geq gy \text{ для любого } (x,y) \in Z\}.$$

Ясно, что Z' – замкнутый выпуклый многогранный конус, неудовлетворяющий, быть может, условию $(0,g) \bar{\in} Z'$ при $g \neq 0$. Для модели Z' введем понятие неймановской грани. Обозначим через N'_α неймановскую грань модели Z', соответствующую темпу роста $1/\alpha$. Положим

$$N'_\alpha = \{(f,g) \in Z' : fA\bar{u} = gB\bar{u}, \ \bar{u} \in \operatorname{int} U_\alpha\}, \qquad (1)$$

где $\alpha A\bar{u} \leq B\bar{u}$. Нетрудно показать, что

$$N'_\alpha = \{(f,g) \in Z' : fA_0 = gB_0\}, \qquad (2)$$

где A_0 и B_0 – подматрицы соответственно матриц A и B, составленные из векторов-столбцов a^i и b^i с номерами $i \in J_\alpha$. Отсюда следует, что множество N'_α – многогранный конус и, кроме того, справедливо равенство

$$N'_\alpha = Z' \bigcap_{\bar{u} \in U_\alpha} H_{(A\bar{u}, B\bar{u})},$$

где $H_{(A\bar{u}, B\bar{u})}$ – гиперплоскость функционала $(A\bar{u}, -B\bar{u})$, $\bar{u} \in U_\alpha$. Заметим ещё, что $N'_\alpha \cap Q_\alpha \neq \emptyset$, $Q_\alpha \setminus N'_\alpha \neq \emptyset$, $N'_\alpha \setminus Q_\alpha \neq \emptyset$, где Q_α – множество, определенное в [4]. Справедливость сказанного следует из следующих очевидных соотношений: 1) любая пара $(\alpha p, p) \in N'_\alpha \cap Q_\alpha$, если $p \in \operatorname{int} \Pi_\alpha$; 2) любая пара $(\alpha p, p)$ принадлежит N'_α, но не принадлежит Q_α, если $p \in \Pi_\alpha$, но $p \bar{\in} \operatorname{int} \Pi_\alpha$; 3) любая пара $(\alpha(p+\varepsilon), p)$ принадлежит Q_α, но не принадлежит N'_α, если $\varepsilon > 0$ и $p \in \operatorname{int} \Pi_\alpha$.

Теперь сформулируем ограничения, налагаемые в дальнейшем на модель Z.

O_1) $Pr_2 Z \cap \operatorname{int} R^n_+ \neq \emptyset$.

O_2) Найдется вектор $\bar{u} \in \operatorname{int} U_\alpha$ такой, что $\alpha A\bar{u} = B\bar{u}$, $\bar{x} = A\bar{u} \gg 0$.

O_3) Для любого $i \in \bar{J}$ и для любой пары $(f,g) \in N'_\alpha$ имеет место неравенство $fa^i > gb^i$, где $\bar{J} = \{1,2,\dots,m\} \setminus J$.

Из указанных условий наиболее жестким является O_3. Однако это ограничение по существу, ибо оно характеризует класс моделей Неймана, для которых справедлива теорема о магистрали в сильнейшей форме (см. теорему I). Приведем пример модели Неймана, удовлетворяющий условиям $O_1 - O_3$.

ПРИМЕР. Пусть модель Неймана Z определяется следующими матрицами затрат A и выпуска B:

$$A = \begin{pmatrix} 1/4 & 3/4 & 1/2 \\ 3/4 & 1/4 & 1/2 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & b_{13} \\ 0 & 1 & b_{23} \end{pmatrix},$$

где b_{13} и b_{23} - неотрицательные числа, удовлетворяющие условию $b_{13} + b_{23} < 2/3$. Состояние равновесия этой модели определяет тройка $(\alpha, (\bar{x}, \bar{y}), p)$, где $\alpha = 1$, $\bar{x} = \bar{y} = p = (1,1)$. Вектор $\bar{u} = (1,1,0) \in \operatorname{int} U_\alpha$. Следовательно, неймановская грань N'_α модели Z' имеет вид:

$$N'_\alpha = \{(f,g) \in Z' : fa^k = gb^k;\ k = 1,2\}.$$

Простым подсчетом убеждаемся, что

$$N'_\alpha = \lambda\{((3/2 - 2c, 2c - 1/2), (c, 1-c), 1/4 \le c \le 3/4)\}, \lambda \ge 0.$$

Отсюда ясно, что эта модель удовлетворяет ограничениям $O_1 - O_3$.

Из ограничения O_3 следует, что

$$\min_{k \in \bar{J}} \min_{(f,g) \in N'_\alpha, \|f\| = 1} (fa^k - gb^k) = \gamma > 0. \qquad (3)$$

Так как N'_α - многогранный конус, то число γ легко вычислить. Действительно, пусть $(f^1, g^1), \dots, (f^\ell, g^\ell)$ - образующие грани N'_α. Тогда

$$\gamma = \min_{k \in \bar{J}} \min_{\substack{1 \le i \le \ell \\ \|f^i\| = 1}} (f^i a^k - g^i b^k).$$

Заметим ещё, что для любого $k \in \bar{J}$ имеет место неравенство $\sum_{i=1}^{n} |\{(\alpha a^k - b^k)\}^i| > 0$. Чтобы убедиться в этом предположим противное, то есть пусть для некоторого номера $j \in \bar{J}$

справедливо равенство $\alpha a^j = b^j$. Однако в этом случае $j \in J_\alpha$, что противоречит условию $j \in \overline{J}$. Положим

$$M = \max_{k \in \overline{J}} \sum_{i=1}^{n} |\{(\alpha a^k - b^k)\}^i| . \qquad (4)$$

Доказательство теоремы о магистрали в сильнейшей форме для рассматриваемой модели Z существенно опирается на следующие две леммы.

ЛЕММА I. Пусть модель Неймана Z удовлетворяет условию O_1. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ и $\overline{u} \in int\, U_\alpha$ найдется $\delta \in (0,1)$ такое, что $gB\overline{u} < (1-\delta) f A \overline{u}$ для любой пары $(f,g) \in Z'$, удовлетворяющей условию $\rho\left({(f,g)}/{\|f\|}, N'_\alpha\right) \geq \varepsilon$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из условия O_1 следует, что $(0,g) \overline{\in} Z'$ при $g \neq 0$. Тогда, применяя те же рассуждения, что и при доказательстве леммы 4.4 в [I], получим справедливость искомого утверждения.

В дальнейшем для простоты положим $\alpha = 1$. Справедлива

ЛЕММА 2. Пусть модель Неймана Z удовлетворяет условиям O_1, O_2. Тогда по любому $\varepsilon > 0$ для любой оптимальной траектории $(f_t)_{t=0}^{T}$ (где $f_T \geq r p$, $p \in int\, \Pi_\alpha$, $r > 0$) модели Z' найдется натуральное $\mathcal{L}$, независящее от периода планирования T, такое, что число пар (f_t, f_{t+1}), удовлетворяющих условию $\rho\left({(f_t, f_{t+1})}/{\|f_t\|}, N'_\alpha\right) \geq \varepsilon$, не превосходит $\mathcal{L}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из условий леммы следует, что $f_T \overline{x} \geq r p \overline{x} = r c$, где $c = p\overline{x} > 0$. Далее, учитывая лемму I, получим, что

$$\overline{x} f_T = \overline{x} f_0 \cdot \frac{\overline{x} f_T}{\overline{x} f_{T-1}} \cdot \frac{\overline{x} f_{T-1}}{\overline{x} f_{T-2}} \cdot \ldots \cdot \frac{\overline{x} f_1}{\overline{x} f_0} \leq \overline{x} f_0 \cdot (1-\delta)^K ,$$

где K - число моментов t таких, что $\rho\left({(f_t, f_{t+1})}/{\|f_t\|}, N'_\alpha\right) \geq \varepsilon$.
Отсюда имеем: $rc \leq \overline{x} f_0 \cdot (1-\delta)^K$, $K \leq \log_{1-\delta}\left({rc}/{\overline{x} f_0}\right)$.

Полагая $\mathcal{L}=k$, получаем справедливость искомого утверждения.

ТЕОРЕМА I. Пусть модель Неймана Z удовлетворяет условиям $O_1 - O_3$. Далее, пусть функционал $f \in R^n_+$ такой, что найдется положительное число τ, удовлетворяющее неравенству $f \geq \tau p$, где $p \in int \Pi_\alpha$. Тогда для любой f-оптимальной траектории $\chi=(x_t)^T_{t=0}$ число процессов (x_t, x_{t+1}), не принадлежащих неймановской грани N_α, не превосходит некоторого числа $\mathcal{L}$, независящего от длины траектории T.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Выберем число $\mathcal{E}$, о котором говорится в леммах I и 2, так, чтобы выполнялось неравенство

$$\mathcal{E} < \gamma/M . \qquad (5)$$

Так как $\chi=(x_t)^T_{t=0}$ является f-оптимальной траекторией модели Неймана, то она допускает характеристику $\varphi=(f_t)^T_{t=0}$ такую, что $f_T = f$ (см. теорему 3.3 в [I]). Применяя лемму 2, получим, что для указанного числа $\mathcal{E}$ найдется натуральное $\mathcal{L}$ такое, что число моментов t, при которых пары (f_t, f_{t+1}), составленные из элементов траектории φ, удовлетворяют неравенству $\rho((f_t, f_{t+1})/\|f_t\|, N'_\alpha) \geq \mathcal{E}$, не превосходит $\mathcal{L}$. Теорема будет доказана, если удастся показать, что для любого момента t, для которого $\rho((f_t, f_{t+1})/\|f_t\|, N'_\alpha) < \mathcal{E}$, имеет место включение $(x_t, x_{t+1}) \in N_\alpha$. Доказательство последнего факта проведем методом от противного, то есть пусть для указанного момента t процесс $(x_t, x_{t+1}) \overline{\in} N_\alpha$. Тогда найдется номер $k \in \overline{J}$ такой, что базисный процесс (a^k, b^k) в состоянии (x_t, x_{t+1}) используется с положительной интенсивностью. Для указанного момента t имеет место представление

$$\frac{(f_t, f_{t+1})}{\|f_t\|} = (f, g) + (\delta, \delta),$$

где $(f, g) \in N'_\alpha$, $\|f\| = 1$, $|\{\delta\}^i| < \mathcal{E}$, $i = 1, 2, \dots, n$. Далее, положим $\|f_t\| = \overline{x} f_t$ для любого $t \in [0, T]$. Из справедливости неравенств $0 < \bar{x}(\tau p) \leq x f_T \leq x f_t \leq x f_0$ следует, что найдется $\theta > 0$ такое, что $(f_t, f_{t+1}) = \theta[(f,g) + (\delta, \delta)]$. Кроме того, из условия $f_t x_t = f_{t+1} x_{t+1}$ следует, что $f_t a^k = f_{t+1} b^k$. Тогда имеем:

$$0 = f_t a^k - f_{t+1} b^k = \theta[(f a^k - g b^k) + \delta(a^k - b^k)].$$

Отсюда

$$\gamma \leq \delta(b^k - a^k) \leq \varepsilon \cdot \sum_{i=1}^{n} |\{(b^k - a^k)\}^i| < \gamma.$$

Полученное противоречие завершает доказательство.

ЗАМЕЧАНИЕ I. Из доказательства теоремы вытекает, что при невыполнении условия O_3 для указанных в теореме оптимальных траекторий теорема о магистрали в сильнейшей форме может и не иметь места.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Доказанная теорема дает признак принадлежности процесса к неймановской грани через характеристику траектории, содержащей этот процесс. Если процесс $(x_t, x_{t+1}) \in N_\alpha$, то ясно, что базисные процессы, не являющиеся образующими N_α, используются в состоянии (x_t, x_{t+1}) с нулевой интенсивностью.

Представляет интерес вопрос о том, какова интенсивность указанных процессов в состоянии (x_t, x_{t+1}), если оно " ε -близко" к грани N_α, т.е. если выполнено неравенство

$$\rho\left(\frac{(x_t, x_{t+1})}{\|x_t\|}, N_\alpha\right) < \varepsilon.$$

Ответ на этот вопрос дает приводимое ниже предложение I, справедливое для любой модели Неймана. Предварительно введем следующие обозначения. Пусть образующие неймановской грани N_α занумерованы индексами $1, 2, \ldots, s$ ($s \leq m$). Вектор $u \in R_+^m$ ($x = Au, y = Bu$) представим в виде $u = (u_1, u_2)$, где $u_1 = Pr_\Gamma u$, $u_2 = Pr_{\tilde{\Gamma}} u$, Γ - грань конуса R_+^m, натянутая на орты с номерами $1, 2, \ldots, s$, а $\tilde{\Gamma}$ - грань конуса R_+^m, натянутая на орты с индексами $i \in \bar{J} = \{s+1, \ldots, m\}$. Положим для $p \in int\, \Pi_\alpha$

$$\underline{R} = \min_{i \in \bar{J}} (\alpha p a^i - p b^i), \quad \bar{R} = \max_{i \in \bar{J}} (\alpha p a^i - p b^i).$$

Ясно, что $\bar{R} \geq \underline{R} > 0$. Далее, так как $N_\alpha = Z \cap H_p$, H_p - гиперплоскость функционала $(\alpha p, -p)$, $p \in int\, \Pi_\alpha$, то для процесса (x, y), $\|x\| = 1$, найдется константа $\tilde{c}$ $(\tilde{c} \geq 1)$ такая, что

$$\rho((x,y), N_\alpha) \le \tilde{c}\cdot\rho((x,y), H_p).$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ I. Для любого процесса $(x,y)=(Au, Bu), \|x\|=1$, удовлетворяющего неравенству

$$\rho((x,y), N_\alpha) < \varepsilon, \tag{6}$$

справедливо соотношение

$$\sum_{i\in \overline{J}} \{u_2\}^i < 1/\underline{R}\cdot\varepsilon. \tag{7}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из неравенства (6) следует, что $\alpha px-py<\varepsilon$, где $p\in int\,\Pi_\alpha$. Левую часть полученного неравенства преобразуем следующим образом: $\alpha px-py=[\alpha pA(u_1,0)-pB(u_1,0)]+$ $+\sum_{i\in\overline{J}}(\alpha pa^i-pb^i)\{u_2\}^i=\sum_{i\in\overline{J}}(\alpha pa^i-pb^i)\{u_2\}^i \ge \underline{R}\cdot\sum_{i\in\overline{J}}\{u_2\}^i$. Отсюда следует верность неравенства (7).

Следующее предложение показывает, что если интенсивность базисных процессов, не являющихся образующими N_α, достаточно мала, то это состояние близко к равновесному.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. Для любого процесса $(x,y)=(Au,Bu), \|x\|=1$, для которого

$$\sum_{i\in\overline{J}}\{u_2\}^i < 1/\overline{R}\cdot\tilde{c}\cdot\varepsilon, \tag{8}$$

справедливо неравенство (6).

Доказательство легко следует из следующих соотношений:

$$\rho((x,y), H_p)=\sum_{i\in\overline{J}}(\alpha pa^i-pb^i)\{u_2\}^i\le\overline{R}\sum_{i\in\overline{J}}\{u_2\}^i$$

Заметим, что неравенство (7) верно при любом $c\ge 1/\underline{R}$, а неравенство (8) – при $c\le 1/\tilde{c}\overline{R}$. Так как $1/\underline{R}\ge 1/\tilde{c}\overline{R}$, то не всегда найдется такая константа c, при которой были бы справедливы одновременно предложения I и 2. Если же модель $\mathcal{Z}$ и процесс (x,y), $\|x\|=1$, таковы, что $1/\underline{R}=1/\tilde{c}\overline{R}$ (то есть $\underline{R}=\overline{R}$, $\rho((x,y), N_\alpha)=\rho((x,y),H_p)$), то указанные предложения справедливы одновременно.

2. Рассмотрим аналог теоремы I для модели Неймана-Гейла $\mathcal{Z}$. Пусть $(\alpha, (x,y), p)$ – состояние равновесия модели $\mathcal{Z}$. Положим

$$Q'_\alpha = \{\bar{x} : \alpha \bar{x} \leq \bar{y}, (\bar{x}, \bar{y}) \in \mathcal{Z}\}.$$

Ясно, что Q'_α – выпуклое замкнутое непустое множество. Пусть в модели $\mathcal{Z}$ найдется процесс $(\hat{x}, \hat{y})$ такой, что $\alpha \hat{x} = \hat{y} \gg 0$. Положим $N'_\alpha = \{(f,g) \in \mathcal{Z}' : f\hat{x} = g\hat{y}\}$.

В модели $\mathcal{Z}$ будем считать выполненным ограничение

$$0') \qquad \inf_{\substack{(x,y) \in \mathcal{Z} \setminus N_\alpha \\ \|(x,y)\| = 1}} \; \inf_{\substack{(f,g) \in N'_\alpha \\ \|f\| = 1}} (fx - gy) = \gamma > 0.$$

Имеет место

ТЕОРЕМА 2. Пусть в модели Неймана-Гейла $\mathcal{Z}$ с темпом роста $\alpha = 1$ выполнено условие $0'$. Далее, пусть функционал $f \in R^n_+$ такой, что найдется положительное число r, удовлетворяющее неравенству $f \geq rp$, где $p \in int\, \Pi_\alpha$. Тогда для любой f – оптимальной траектории $\chi = (x_t)_{t=0}^T$ число процессов (x_t, x_{t+1}), непринадлежащих неймановской грани N_α, не превосходит некоторого числа $\mathcal{L}$, не зависящего от длины траектории T.

Доказательство приводится так же, как и доказательство теоремы I, с той лишь разницей, что здесь вместо теоремы 3.3 [I] используется теорема 3.2 [3].

Литература

I. Макаров В.Л., Рубинов А.М., Суперлинейные точечно-множественные отображения и модели экономической динамики, УМН, 25, 5:155 (1970), 125 - 169.

2. Рубинов А.М., Эффективные траектории динамической модели производства, ДАН СССР, 184:6 (1969), 1294-1297.

3. Рубинов А.М., Характеристика некоторых классов траекторий динамической модели производства, Оптимальное планирование, 14 (1969), 114-129.

4. Жафяров А.Ж., Теорема о магистрали в сильнейшей форме, Настоящий сборник, стр. 14-25.

Поступила в ред.-изд. отд.
29. У. 1972 г.