УДК 512.25/26+519.3

О МИНИМИЗАЦИИ СТРОГО ВЫПУКЛОЙ ФУНКЦИИ НА ПЕРЕСЕЧЕНИИ ВЫПУКЛЫХ МНОЖЕСТВ

А.И.Лобырев

Предлагаемый в статье метод решает следующую задачу. В евклидовом пространстве E^n заданы выпуклые замкнутые множества A_i, $i \in I$, где I - некоторое конечное множество индексов, причем множество $R = \bigcap_{i \in I} A_i$ не пусто. Для некоторой точки $x_0 \in E^n$ требуется найти точку $x^* \in R$, ближайшую к x_0.

Рассмотрим следующий итеративный процесс. Берём произвольное множество $Q_0 \supset R$, выбираем номер $i(x_0)$ и в множестве $Q_0 \bigcap A_{i(x_0)}$ находим точку x_1, ближайшую к x_0. В качестве множества $Q_1 \supset Q_0 \bigcap A_{i(x_0)}$ берем такое множество, чтобы точка $x_1 \in Q_1$ была тоже ближайшей к x_0. Затем выбираем $i(x_1)$ и в множестве $Q_1 \bigcap A_{i(x_1)}$ находим точку x_2, ближайшую к x_0, и т.д. В качестве множеств Q_ν можно брать, например, множества $\{x \mid (x_\nu - x_0, x) \geq (x_\nu - x_0, x_\nu)\}$.

Возможны различные варианты этого метода, отличающиеся друг от друга правилом выбора индекса $i(x_\nu)$ и множеств Q_ν. Ниже рассмотрены некоторые варианты, при которых обеспечена сходимость последовательности $\{x_n\}$ к некоторой точке $x^* \in R$, являющейся автоматически ближайшей к x_0. Действительно, так как $\|x_0 - x_n\| \leq \min_{y \in R} \|x_0 - y\|$, то $\|x_0 - x^*\| \leq \min_{y \in R} \|x_0 - y\|$.

Нам понадобятся следующие леммы:

ЛЕММА I. Пусть A - выпуклое замкнутое множество в E^n, $x \in E^n$, y - ближайшая к x точка множества A. Тогда для любой точки $z \in A$ $(x-y, y-z) \geq 0$.

ЛЕММА 2. В любом варианте предложенного метода последовательность $\{x_n\}$ ограничена и $\|x_{n+1}-x_n\| \to 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Действительно, $\|x_0-x_n\| \leq \|x_0-x_{n+1}\| \leq \leq \min\limits_{y \in R} \|x_0-y\| < +\infty$. Следовательно, существует $\lim \|x_0-x_n\|$. Так как $\|x_n-x_{n+1}\|^2 = \|x_0-x_{n+1}\|^2 - -\|x_0-x_n\|^2 - 2(x_{n+1}-x_n, x_n-x_0) \leq \|x_0-x_{n+1}\|^2 - \|x_0-x_n\|^2$, то при $n \to \infty$ $\|x_n-x_{n+1}\| \to 0$. Лемма доказана.

I. Будем перебирать индексы в циклическом порядке, т.е. $i(x_0)=1$, $i(x_1)=2, \ldots, i(x_{p-1})=P$, $i(x_p)=1$, $i(x_{p+1})=2$ и т.д. Соответственно этому последовательность $\{x_n\}$ строится следующим образом: x_0 - заданная точка, x_1 - ближайшая к x_0 точка множества $Q_0 \cap A_1$, x_2 - ближайшая к x_0 точка множества $Q_1 \cap A_2, \ldots$, x_{p+1} - ближайшая к x_0 точка множества $Q_p \cap A_1$ и т.д.

ТЕОРЕМА I. Последовательность $\{x_n\}$ сходится к $x^* \in R$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обозначим через y_k^i точку x_{kp+i} $(k=0, 1, \ldots; i=0,1,\ldots,p-1)$. На основании леммы 2 из последовательности $\{y_k^1\}$ можно выделить подпоследовательность $\{y_{k_\nu}^1\}$, сходящуюся к некоторой точке x^*, так как все $y_{k_\nu}^1 \in A_1$, то $x^* \in A_1$. Но $\|y_{k_\nu}^i - y_{k_\nu}^1\| \leq \sum\limits_{\mu=1}^{i-1} \|y_{k_\nu}^{\mu-1} - y_{k_\nu}^{\mu}\|$ и снова по лемме 2 $\|y_{k_\nu}^i - y_{k_\nu}^1\| \to 0$ при $\nu \to \infty$. Поэтому $y_{k_\nu}^i \to x^*$ и $x^* \in R$.

Докажем, что вся последовательность $\{x_n\}$ сходится к x^*. Действительно, так как $\|x_n-x^*\|^2 \leq \|x^*-x_0\|^2 - \|x_n-x_0\|^2$ и так как правая часть этого неравенства убывает и содержит сходящуюся к нулю подпоследовательность, то существует $\lim \|x_n-x^*\|=0$. Следовательно, $\lim x_n = x^*$.

2. Для любого $x \in E^n$ положим

$$\rho(x, A_i) = \min_{y \in A_i} \|x-y\|$$

и в качестве $i(x_n)$ выберем тот индекс, для которого достигается $\max_{i\in I}\rho(x_n,A_i)$ (если такой индекс не единственный, то берем любой из них). В качестве x_{n+1}, как и раньше, возьмем ближайшую к x_0 точку множества $A_{i(x_n)}\cap Q_n$.

ТЕОРЕМА 2. Последовательность $\{x_n\}$ сходится к некоторой точке $x^*\in R$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. На основании леммы 2 можно выбрать подпоследовательность $\{x_{n_k}\}$, сходящуюся к некоторой точке x^*. Так как

$$\rho(x_n,x_{n+1})\geq\rho(x_n,A_{i(x_n)}\cap Q_n)\geq\rho(x_n,A_{i(x_n)})\geq\rho(x_n,A_i),$$

то снова на основании леммы 2 $\rho(x_n,A_i)\to 0$. По замкнутости множеств A_i точка $x^*\in A_i$ при любом i, то есть $x^*\in R$.

То, что вся последовательность $\{x_n\}$ сходится к x^*, доказывается так же, как в теореме I.

3. Определим последовательность $\{B(x_n)\}$, задав произвольно $B(x_0)$ и положив

$$B(x_n)=\min\left\{B(x_{n-1}),\ \max_{i\in I}\rho(x_n,A_i)/2\right\}.$$

В качестве $i(x_n)$ выберем первый индекс, для которого выполняется условие:

$$\rho(x_n,A_i)\geq B(x_n).$$

В качестве же x_{n+1}, как и раньше, возьмем ближайшую к x_0 точку множества $A_{i(x_n)}\cap Q_n$.

ТЕОРЕМА 3. Последовательность $\{x_n\}$ сходится к $x^*\in R$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Последовательность $B(x_n)\to 0$, так как $\rho(x_n,x_{n+1})\to 0$ и

$$B(x_n)\leq\rho(x_n,A_{i(x_n)})\leq\rho(x_n,A_{i(x_n)}\cap Q_n)\leq\rho(x_n,x_{n+1}).$$

Пусть $\{x_{n_k}\}$ – подпоследовательность последовательности $\{x_n\}$ такая, что

$$\rho(x_{n_k},A_i)<B(x_{(n_k)-1}),\quad \text{для всех } i\in I.$$

Взяв, если нужно, еще раз подпоследовательность, можно считать, что подпоследовательность $\{x_{n_k}\}$ сходится к некоторой точке x^*. Так как $\rho(x_{n_k},A_i)\to 0$ при любом i, то $x^*\in R$

То, что вся последовательность $\{x_n\}$ сходится к x^*, доказывается так же, как в теореме I.

Предлагаемый метод можно применять для решения задач выпуклого программирования:

$$\min\{\varphi(x) \mid x \in R \cap S\},$$

где $\varphi(x)$ - строго выпуклая функция, непрерывно дифференцируемая на выпуклом замкнутом множестве $S \subset E^n$ такая, что $\varphi(x)-\varphi(y)-(\partial\varphi(x), y-x) \geq K\|x-y\|^2$ при $x, y \in S$. Здесь $K>0$ и $S \cap R \neq \Lambda$. При каждом вещественном числе L в этом случае множество $T(L)=\{x \in S \mid \varphi(x) \leq L\}$ ограничено.

Рассмотрим следующий итеративный процесс:

I. берем произвольную точку $x_0 \in S$;

2. если точка $x_n \in S$ уже найдена, то, выбрав некоторым образом индекс $i(x_n)$ и взяв множество $Q_n=\{x \in E^n \mid (\partial\varphi(x_n), x) \geq \partial\varphi(x_n), x_n)\}$, находим точку x_{n+1} такую, что $\varphi(x_{n+1}) = \min\limits_{y \in R_{i(x_n)} \cap Q_n \cap S} \varphi(y)$. Предполагается, что эти более простые задачи мы решать умеем [I].

Перечисленные выше способы выбора индекса $i(x_n)$ обеспечивают сходимость последовательности $\{x_n\}$ к точке $x^* \in R \cap S$. Доказательство этого факта легко получить, повторив доказательства теорем I-3, используя следующую лемму:

ЛЕММА 2. Последовательность $\{x_n\}$ ограничена, и $\|x_{n+1}-x_n\| \to 0$ при $n \to \infty$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как $\varphi(x_1) < \varphi(x_2) < \ldots < \varphi(x_n) < \ldots \leq \min\limits_{y \in R \cap S} \varphi(y) = L^*$, то ограниченность $\{x_n\}$ следует из ограниченности множества $T(L^*)$. Следовательно, можно выбрать подпоследовательность $\{x_{n_k}\}$, сходящуюся к некоторой точке $x^* \in T(L^*)$. Так как последовательность $\{\varphi(x_n)\}$ монотонная и ограниченная, то

$$\lim \varphi(x_n) = \lim \varphi(x_{n_k}) = \varphi(x^*)$$, т.е. $\{x_n\} \subset T(\varphi(x^*))$.

Так как $\varphi(x_{n+1}) > \varphi(x_n)$, то $K\|x_{n+1}-x_n\|^2 \leq$

$$\leq \varphi(x_{n+1}) - \varphi(x_n) - (\partial\varphi(x_n), x_{n+1}-x_n) \leq \varphi(x_{n+1}) - \varphi(x_n)$$

Следовательно, $\|x_{n+1}-x_n\|^2 \to 0$. Лемма доказана.

В заключение заметим, что предложенный метод может применяться для приближенного решения задач линейного программирования.

Пусть дана задача линейного программирования: минимизировать форму

$$\sum_{j=1}^{n} c_j x_j \tag{I}$$

при условиях:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i, \quad i \in I \setminus \bar{I},$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \geqslant b_i, \quad i \in \bar{I}, \tag{2}$$

$$x_j \geqslant 0$$

Вместо этой задачи будем решать задачу минимизации функции

$$-\sum_{j=1}^{n} (Kc_j + x_j)^2 \tag{3}$$

при условиях (2). Здесь $K > 0$. Если K достаточно велико, то решение задачи (3), (2) будет близко к решению задачи (I) - (2).

Литература

I. Брэгман Л.М. Релаксационный метод нахождения общей точки выпуклых множеств и его применение для решения задач выпуклого программирования. Ж. выч.мат. и мат. физики, 7:3 (1967), 620-631.

Поступила в редакцию
27.I. 1972 г.