УДК 513.88 + 519.3.330.115

ПОВЕДЕНИЕ ТРАЕКТОРИЙ, ПОРОЖДАЕМЫХ ОДНИМ ОПЕРАТОРОМ

М.Д. Зияудинов

В этой работе изучается поведение траекторий, порождаемых итерациями оператора, представимого в виде разности двух суперлинейных операторов, действующих из R^n_+ в R^n_+, где R^n_+ - конус векторов с неотрицательными компонентами из n -мерного евклидова пространства R^n. Конус R^n_+ разбивается на конечное множество $\mathcal{A}$ непустых подмножеств из R^n_+ так, чтобы на каждом множестве из $\mathcal{A}$ оператор $\overline{F}$ был линейным. Показывается, что образ любого множества из $\mathcal{A}$ при отображении $\overline{F}$ содержится в каком-либо множестве из $\mathcal{A}$. Для доказательства основных результатов данной работы использована теорема Фаркаша см. [1].

1°. Пусть $f^1_{ik}, f^2_{i\ell}$ $(i=1,\dots,n;\ k=1,2,\dots,s;\ \ell=1,\dots,m)$ - линейные функционалы на R^n_+. Введем обозначения

$$N=\{1,2,\dots,n\},\quad S=\{1,2,\dots,s\},\quad M=\{1,2,\dots,m\}.$$

Определим функционалы P^1_i и P^2_i $(i\in N)$ следующим образом:

$$P^1_i(x)=\min_{k\in S} f^1_{ik}(x)\qquad (x\in R^n_+,\ i\in N)$$

$$P^2_i(x)=\min_{\ell\in M} f^2_{i\ell}(x)\qquad (x\in R^n_+,\ i\in N).$$

Функционалы P^1_i и P^2_i суперлинейны для всех $i\in N$.

Определим далее оператор $\overline{F}: R^n_+\to R^n_+$ как разность двух суперлинейных операторов P^1 и P^2:

$$\overline{F}x = P^1x - P^2x\qquad (x\in R^n_+), \tag{1.1}$$

где для $x \in R^n_+$ положено

$$P^1 x = (p_1^1(x), \dots, p_n^1(x)) ,$$

$$P^2 x = (p_1^2(x), \dots, p_n^2(x)) .$$

Координатные функции оператора $\overline{F}$ обозначим через $\overline{F}_1, \dots, \overline{F}_n$.

Пусть u – набор из n натуральных чисел: $u = (\overline{k}_1, \dots, \overline{k}_n)$, где $\overline{k}_i \in S$, а $v = (\overline{\ell}_1, \dots, \overline{\ell}_n)$, причем $\overline{\ell}_i \in M$. Рассмотрим пару $(\overline{k}, \overline{\ell}) \in u \times v$ и каждому $i \in N$ сопоставим множество

$$A^i_{\overline{k},\overline{\ell}} = \left\{ x \in R^n_+ : f^1_{i\overline{k}}(x) = \min_{k \in S} f^1_{ik}(x);\ f^2_{i\overline{\ell}}(x) = \min_{\ell \in M} f^2_{i\ell}(x) \right\}. \quad (1.2)$$

Иными словами, $A^i_{\overline{k},\overline{\ell}}$ совпадает с множеством решений системы линейных неравенств

$$\begin{aligned} f^1_{ik}(x) - f^1_{i\overline{k}}(x) &\geq 0 \qquad (k \in S) , \\ f^2_{i\ell}(x) - f^2_{i\overline{\ell}}(x) &\geq 0 \qquad (\ell \in M) . \end{aligned} \quad (1.3)$$

Соотношение (1.3) показывает, что множество $A^i_{\overline{k}\overline{\ell}}$ является пересечением конечного числа полупространств, т.е. многогранным конусом. Отметим, что $A^i_{\overline{k},\overline{\ell}}$ – выпуклая оболочка конечного числа полупрямых.

Пусть по определению

$$A_{u,v} = \bigcap_{\substack{i \in N \\ \overline{k} \in u, \overline{\ell} \in v}} A^i_{\overline{k},\overline{\ell}} . \quad (1.4)$$

Через $\mathcal{A}$ обозначим совокупность всех конусов $A_{u,v}$, где u и v – всевозможные наборы из n натуральных чисел $\overline{k} \in S$, $\overline{\ell} \in M$ такие, что конуса $A_{u,v}$ – телесные.

Пусть $A \in \mathcal{A}$. Как следует из (1.3), конус A является решением системы из $(s+m) \cdot n = \sigma$ линейных неравенств. Запишем эту систему в виде

$$\delta^A_t(x) \geq 0 \qquad (t = 1, 2, \dots, \sigma) . \quad (1.5)$$

Пусть теперь A и B – два конуса из $\mathcal{A}$. Из определения $\mathcal{A}$ следует, что на конусе A оператор $\overline{F}$ линеен. Поэтому функционал θ, определенный на конусе A формулой $\theta(x) = \delta^B_t(\overline{F}x)$ $(t \in \sigma)$, линеен на этом конусе. Так как конус A телесен, то функционал θ единственным образом распространяется до линейного функционала θ', определенного на всем R^n. Если для всех $x \in A$ выполняется неравенство $\delta^B_t(\overline{F}x) \geq 0$

(или, что то же самое, $\theta'(x)\geqslant 0$), то оно является следствием системы (I.5). В силу теоремы Фаркаша, линейное неравенство $\delta_t^B(\bar{F}x)\geqslant 0$ является следствием системы (I.5) в том и только в том случае, когда существует σ неотрицательных чисел λ_t таких, что

$$\theta'=\sum_{t=1}^{\sigma}\lambda_t\delta_t^A \quad . \tag{I.6}$$

Система неравенств $\delta_t^B(\bar{F}x)\geqslant 0 \quad (t\leqslant\sigma)$ является следствием системы $\delta_t^A(x)\geqslant 0 \quad (t\leqslant\sigma)$ в том и только в том случае, если $\bar{F}(A)\subset B$. В силу (I.3) можно считать, не умаляя общности, что функционал δ_t^B имеет вид

$$\delta_t^B=f_{ik}^1-f_{i\bar{k}}^1 \qquad (k\in S)$$

(заметим, что вместо f_{ik}^1 и $f_{i\bar{k}}^1$ можно было бы рассмотреть соответственно f_{il}^2 и $f_{i\bar{l}}^2$).

Выпишем теперь достаточные условия для того чтобы неравенство $\delta_t^B(\bar{F}x)\geqslant 0$ было следствием системы (I.5). Для этого перепишем (I.6) в виде

$$\delta^B(\bar{F}x)=\sum_{t=1}^{\sigma}\lambda_t\delta_t^A(x) \quad . \tag{I.7}$$

Используя определения оператора F и функционалов $\delta_t^A\ (t\leqslant\sigma)$, проделав соответствующие преобразования, запишем левую часть этой системы следующим образом:

$$\delta^B(\bar{F}x)=f_{ik}^1(\min_{k\in S}f_{1k}^1(x),\dots,\min_{k\in S}f_{nk}^1(x))-f_{ik}^1(\min_{l\in M}f_{1l}^2(x),\dots$$

$$\dots,\min_{l\in M}f_{nl}^2(x))-f_{i\bar{k}}^1(\min_{k\in S}f_{1k}^1(x),\dots,\min_{k\in S}f_{nk}^1(x))+f_{i\bar{k}}^1(\min_{l\in M}f_{1l}^2(x),\dots,\min_{l\in M}f_{nl}^2(x)).$$

Правая же часть соотношения (I.7) примет вид

$$\sum_{t=1}^{\sigma}\lambda_t\delta_t^A(x)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{s}\alpha_{ik}f_{ik}^1(x)-\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{s}\alpha_{ik}f_{i\bar{k}}^1(x)+$$

$$+\sum_{i=1}^{n}\sum_{l=1}^{m}\beta_{il}f_{il}^2(x)-\sum_{i=1}^{n}\sum_{l=1}^{m}\beta_{il}f_{i\bar{l}}^2(x) \quad .$$

Здесь вектор λ , существование которого гарантирует теорема Фаркаша, имеет вид

$$\lambda=(\alpha_{11},\dots,\alpha_{1s},\dots,\alpha_{n1},\dots,\alpha_{ns},\beta_{11},\dots,\beta_{1m},\dots,\beta_{n1},\dots,\beta_{nm}). \tag{I.8}$$

Пусть $p=1,2$. Положим $k(p)=k$, если $p=1$ и $k(p)=\bar{k}$, если $p=2$; $\ell(p)=\ell$, если $p=1$ и $\ell(p)=\bar{\ell}$, если $p=2$. Из сказанного следует

ТЕОРЕМА I.I. Если существует вектор $\lambda\geqslant 0$, определенный формулой (I.8) и такой, что выполняются равенства

$$f^{p}_{iK(p)}\left(\min_{K\in S} f^{1}_{1K}(x),\ldots,\min_{K\in S} f^{1}_{nK}(x)\right)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{K=1}^{S}\alpha_{iK} f^{1}_{iK(p)}(x);\ p=1,2;$$

$$f^{p}_{iK(p)}\left(\min_{\ell\in M} f^{2}_{1\ell}(x),\ldots,\min_{\ell\in M} f^{2}_{n\ell}(x)\right)=-\sum_{i=1}^{n}\sum_{\ell=1}^{m}\beta_{i\ell} f^{2}_{i\ell(p)}(x);\ p=1,2,$$

то неравенство $\delta^{B}(\bar{F}x)\geqslant 0$ является следствием системы (I.5).

2^{0}. В дальнейшем в качестве $\bar{F}$ будем рассматривать оператор F для однородной Λ -системы (определение однородной Λ -системы см. [2].) Координатные функции этого оператора имеют вид

$$F_i x=\sum_{j=1}^{m} a_{ij}\min_{K\in N}\left(\frac{x_K}{b_{Kj}}\right)\quad (i=1,2,\ldots,n), \qquad (2.I)$$

где $b_{Kj}>0$ для всех $K\in S=N$ и $j\in M$. Легко видеть, что оператор $F=(F_1,\ldots,F_n)$, действующий из R^n в R^n, обладает свойствами:

а) F непрерывен на R^n ;

б) если $x\in R^n_+$ и $x_i=0$ хотя бы для одного $i\in N$, то $Fx=0$;

в) оператор F положительно однороден первой степени, т.е. для $x\in R^n$ и $\lambda\geqslant 0$ выполняется равенство $F(\lambda x)=\lambda F(x)$.

При некоторых ограничениях на коэффициенты a_{ij} и b_{Kj} $(i,K=1,2,\ldots,n;\ j=1,2,\ldots,m)$ можно доказать существование набора неотрицательных чисел λ_ℓ ($\ell=1,2,\ldots,\sigma$), удовлетворяющих условиям теоремы I.I.

Обозначим через $M_i^{+}=\{j\in M: a_{ij}\geqslant 0\}\ (i\in N)$, а через $M_i^{-}=M\setminus M_i^{+}=\{j\in M: a_{ij}<0\}\ (i\in N)$. Используя эти обозначения, перепишем соотношение (2.I) в виде

$$F_i(x)=\sum_{j\in M_i^{+}} a_{ij}\min_{K\in N}\left(\frac{x_K}{b_{Kj}}\right)-\sum_{j\in M_i^{-}}|a_{ij}|\min_{K\in N}\left(\frac{x_K}{b_{Kj}}\right). \qquad (2.2)$$

Если теперь положить $P_i^1(x)=\sum_{j\in M_i^+} a_{ij} \min_{k\in N}\left(\frac{x_k}{b_{kj}}\right)$ и $P_i^2(x)= =\sum_{j\in M_i^-} |a_{ij}| \min_{k\in N}\left(\frac{x_k}{b_{kj}}\right)$, то (2.2) запишется в виде $F_i x = P_i^1(x)-P_i^2(x)$, где P_i^1 и P_i^2 $(i\in N)$ суперлинейные функционалы. Следовательно, F определяется как разность двух суперлинейных операторов P^1 и P^2, действующих из R^n в R^n, т.е.

$$Fx = P^1x - P^2x \quad (x\in R^n). \tag{2.3}$$

По построению оператор F, определенный формулой (2.3), отличается от оператора $\bar{F}$, определенного формулой (I.I). Тем не менее оператор F можно привести к виду оператора $\bar{F}$. Поскольку нас интересует специфический вид оператора F, мы проведем все построения для этого оператора.

Выясним теперь, при каких условиях на коэффициенты a_{ij} и b_{ik} $(i,k=1,2,\dots,n;\ j=1,\dots,m)$ оператор F оставляет конус R^n_+ инвариантным.

Положим

$$b_j^i = \max_{k\in N} b_{kj} \quad (j\in M_i^+,\ i\in N),$$
$$\bar{b}_j^i = \min_{k\in N} b_{kj} \quad (j\in M_i^-,\ i\in N). \tag{2.4}$$

ЛЕММА 2.I. Если для оператора F, определенного формулой (2.2), выполнено неравенство

$$\sum_{j\in M_i^+} a_{ij}\frac{1}{b_j^i} - \sum_{j\in M_i^-} |a_{ij}|\frac{1}{\bar{b}_j^i} \geqslant 0 \qquad (i\in N), \tag{2.5}$$

то $F(R^n_+)\subset R^n_+$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $x\in R^n_+$. Из соотношения (2.2), используя (2.4), имеем

$$F_i(x) = \sum_{j\in M_i^+} a_{ij}\min_{k\in N}\left(\frac{x_k}{b_{kj}}\right) - \sum_{j\in M_i^-}|a_{ij}|\min_{k\in N}\left(\frac{x_k}{b_{kj}}\right) \geqslant$$
$$\geqslant\left(\sum_{j\in M_i^+} a_{ij}\frac{1}{b_j^i} - \sum_{j\in M_i^-}|a_{ij}|\frac{1}{\bar{b}_j^i}\right)\min_{k\in N}(x_k).$$

По условию леммы выражение, стоящее в скобках, неотрицательно. Следовательно, правая часть рассматриваемого неравенства неотрицательна (поскольку $x\in R^n_+$, то $\min_{k\in N}(x_k)\geqslant 0$). Лемма доказана.

В дальнейшем будем полагать условия леммы (2.I) выполненными.

Как было показано в пункте I^0, конус R^n_+ разбивается на конечное множество $\mathcal{A}$ выпуклых замкнутых телесных конусов, на каждом из которых F линеен. В рассматриваемом нами случае эти конусы имеют следующий вид

$$A_u = \bigcap_{j\in M,\ \bar{k}\in u} A_{\bar{k},j}\ , \qquad (2.6)$$

где

$$A_{\bar{k}j} = \left\{ x \in R^n_+ : \frac{x_{\bar{k}}}{b_{\bar{k}j}} = \min_{k\in N} \frac{x_k}{b_{kj}} \right\} \ (j\in M) \ .$$

(Из определения F (см. (2.2)) следует, что $A^1_{\bar{k}j} = A^2_{\bar{k}j} = \ldots, A^n_{\bar{k}j}$). Следовательно, конус A_u совпадает с множеством решений системы линейных неравенств

$$b_{\bar{k}j}\, x_k - b_{kj}\, x_{\bar{k}} \geqslant 0 \quad (j\in M\ ,\ k\in N\ )\ . \qquad (2.7)$$

Рассматривая всевозможные наборы u такие, что конусы A_u телесны, разобьем конус R^n_+ на конечное число выпуклых замкнутых конусов, на каждом из которых F линеен. Очевидно, для любого $x\in R^n_+$ существует конус A_u такой, что $x\in A_u$. Если для какого-либо $x\in R^n_+$ и для $j_0\in M$ минимум отношений $\frac{x_k}{b_{kj_0}}$ реализуется для нескольких элементов из u, то в качестве $\bar{k}$ берем первый из элементов, для которого этот минимум реализуется.

3^0. Рассмотрим для конуса A_u, определенного формулой (2.6), множество $\widetilde{T}\subset N$, где $\widetilde{T} = \{t\in N : t = \bar{k} = \bar{k}(j)$ хотя бы для одного $j\in M\}$. Очевидно, число элементов множества $\widetilde{T}$ не превосходит n. Не нарушая общности, можно полагать, что это множество совпадает с $\widetilde{T} = \{1,2,\ldots,\tau\}$. Легко видеть, что число неравенств системы (2.7) равно $m\cdot n$. Покажем, что система (2.7) равносильна подсистеме этой же системы, число неравенств которого не превышает $n\cdot\tau$. Пусть $n<m$. В этом случае, хотя бы для одного $t\in\widetilde{T}$ выполняются соотношения

$$t = \bar{k}(j_1) = \bar{k}(j_2) = \cdots = \bar{k}(j_\delta)\ , \qquad (3.I)$$

где $j\in M$. Определим теперь величину

$$\xi(k,t)=\max\left\{\frac{b_{k\bar{k}(j_1)}}{b_{t\bar{k}(j_1)}},\ldots,\frac{b_{k\bar{k}(j_\gamma)}}{b_{t\bar{k}(j_\gamma)}}\right\}. \qquad (3.2)$$

Положим, определенности ради, $\xi(k,t)=\frac{b_{kt}}{b_{tt}}(k\in N)$. Из системы (2.7) исключим $n(\gamma-1)$ неравенств, являющихся следствиями неравенств $b_{tt}x_k-b_{kt}x_t\geqslant 0\ (k\in N)$. Оставшаяся система, очевидно, равносильна системе (2.7). Поступая аналогичным образом с остальными $\tau-1$ элементами множества $\widetilde{T}$ из (2.7), можно исключить ровно $(m-\tau)\cdot n$ неравенств. Легко видеть, что оставшаяся система

$$b_{tt}x_k-b_{kt}x_t\geqslant 0 \quad (t=1,2,\ldots,\tau;\ k=1,2,\ldots n) \qquad (3.3)$$

равносильна системе (2.7).

ЛЕММА 3.I. Если хотя бы для одного $t=t_0\in\widetilde{T}$ выполняются неравенства

$$\frac{b_{pt_0}}{b_{t_0t_0}}-\frac{b_{pq}}{b_{t_0q}}\geqslant 0 \qquad (p,q\in N), \qquad (3.4)$$

то система (3.3) (а следовательно, и (2.7)) равносильна некоторой подсистеме системы (3.3) с числом неравенств $\sigma=(n+2)\tau-(\tau^2+2)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для всех $x_t\ (t\in\widetilde{T}\setminus\{t_0\})$ в силу системы (3.3) выполняются неравенства

$$\frac{b_{tt_0}}{b_{t_0t_0}}x_{t_0}\leqslant x_t\leqslant\frac{b_{tt}}{b_{t_0t_0}}x_{t_0}. \qquad (3.5)$$

Преобразуем неравенства

$$b_{qq}x_p-b_{pq}x_q\geqslant 0 \quad (p,q\in T\setminus\{t_0\}) \qquad (3.6)$$

с помощью (3.5). Имеем

$$b_{qq}x_p-b_{pq}x_q\geqslant b_{qq}\left(\frac{b_{pt_0}}{b_{t_0t_0}}-\frac{b_{pq}}{b_{t_0q}}\right)x_{t_0}. \qquad (3.7)$$

Правая часть (3.7) неотрицательна. Из (3.7) следует, что все неравенства вида (3.6) равносильны неравенству $x_{t_0}\geqslant 0$. Исключив все неравенства вида (3.6) из системы (3.3), мы получим систему, равносильную системе (3.3). Число неравенств $\bar{\sigma}$ полученной системы, очевидно, равно числу неравенств системы

(3.5) плюс $\tau(n-\tau)$ (где $\tau(n-\tau)$ - число неравенств из (3.3), которые нельзя представить в виде (3.6)). Полученную таким образом систему обозначим через $(*)$.

4⁰. Рассмотрим неравенство

$$b_{\bar{k}j} x_k - b_{kj} x_{\bar{k}} \geqslant 0 , \tag{4.1}$$

где $k \neq \bar{k}$, $k, \bar{k} \in N$, а $j \in M$. Это неравенство определяет полупространство. Пусть $u = (\bar{k}_1, \ldots, \bar{k}_m)$ - набор натуральных чисел, где $\bar{k}_j \in N$. Если неравенство

$$b_{\bar{k}j} F_k x - b_{kj} F_{\bar{k}} x \geqslant 0 \tag{4.2}$$

выполняется для всех $x \in A_u$, то неравенство (4.2) является следствием системы $(*)$ (или, что то же самое, (2.7)). Это означает, что оператор F переводит конус A_u в полупространство, определяемое соотношением (4.2).

Пронумеруем неравенства, входящие в систему $(*)$, числами от 1 до $\bar{\sigma}$. Обозначим через f_ℓ функционал, входящий в левую часть неравенства с номером ℓ . Из существования неотрицательных чисел $\lambda_\ell \ (\ell = 1, 2, \ldots, \bar{\sigma})$ таких, что

$$\sum_{\ell=1}^{\bar{\sigma}} \lambda_\ell f_\ell x = b_{\bar{k}j} F_k x - b_{kj} F_{\bar{k}} x \tag{4.3}$$

вытекает, что неравенство (4.2) является следствием системы $(*)$. Используя определение оператора F и проделав соответствующие преобразования, правую часть (4.3) запишем в виде

$$b_{qj} F_p x - b_{pj} F_q x = b_{qj} \sum_{j=1}^{m} a_{pj} \min_{k \in N} \left(\frac{x_k}{b_{kj}} \right) - b_{pj} \sum_{j=1}^{m} a_{qj} \min_{k \in N} \left(\frac{x_k}{b_{kj}} \right) = \tag{4.4}$$

$$= a_1 x_1 + a_2 x_2 + \ldots + a_\tau x_\tau$$

Левая же часть соотношения (4.3) примет вид

$$\sum_{\ell=1}^{\bar{\sigma}} \lambda_\ell f_\ell (x) = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \ldots + c_n x_n , \tag{4.5}$$

где $c_k = (b_k, \lambda) \ (k \in N)$ (где $b_k = (b_{k1}, \ldots, b_{k\bar{\sigma}})$ - вектор-столбец из коэффициентов матрицы системы неравенств $(*)$ при x_k).

Из соотношений (4.4) и (4.5) имеем

$$c_t - \sum_{\ell=1}^{\bar{\sigma}} b_{t\ell} \lambda_\ell = a_t \ , \quad t = 1, 2, \ldots, \tau \ ; \tag{4.6}$$

$$c_k = \sum_{\ell=1}^{\widetilde{\sigma}} b_{k\ell}\lambda_\ell = 0, \qquad k = \tau+1, \dots, n \tag{4.6}$$

Из системы неравенств $(*)$ следует, что $b_k \geq 0$ для любого $k \in N \setminus \widetilde{T}$, причем число положительных компонент вектора b_k равно τ. Из системы (4.6) следует, что все компоненты вектора $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_{\widetilde{\sigma}})$ с номерами, соответствующими $(n-\tau)\cdot\tau$ последним неравенствам системы $(*)$, равны нулю. Вектор-столбец b_t $(t \in \widetilde{T} \setminus \{t_0\})$ имеет две ненулевые компоненты; одна из которых положительна, а другая отрицательна. Вектор-столбец b_{t_0} имеет $2(\tau-1)$ не равных нулю компонент, причем $\tau-1$ из них положительны, остальные же $\tau-1$ отрицательны. Легко видеть, что система уравнений (4.6) равносильна системе

$$\sum_{\ell=1}^{2(\tau-1)} b_{t\ell}\lambda_\ell = a_t \qquad (t = 1, 2, \dots, \tau) \tag{4.7}$$

Используя последние $\tau-1$ равенств системы (4.7), из левой части уравнения

$$\sum_{\ell=1}^{2(\tau-1)} b_{t_0\ell}\lambda_\ell = a_{t_0} \tag{4.8}$$

можно исключить все числа λ_t, которым соответствуют отрицательные коэффициенты. После этих преобразований соотношение (4.8) запишется в виде

$$\sum_{\ell=1}^{2(\tau-1)} \widetilde{b}_{t_0\ell}\lambda_\ell = \widetilde{a}_{t_0}, \tag{4.9}$$

где $\widetilde{b}_{t_0\ell} \geq 0 \quad (\ell = 1, 2, \dots, 2(\tau-1))$.

Предположим теперь, что

$$\operatorname{sgn} \widetilde{a}_{t_0} = \operatorname{sgn} a_t \tag{4.10}$$

хотя бы для одного $t \in T \setminus \{t_0\}$, где

$$\operatorname{Sgn} a = \begin{cases} 1, & \text{если } a \geq 0, \\ -1, & \text{если } a < 0. \end{cases}$$

Если выполнено предположение (4.10), то система

$$\sum_{\ell=1}^{2(\tau-1)} b_{t\ell}\lambda_\ell = a_t \qquad (t \in \widetilde{T} \setminus \{t_0\}), \tag{4.11}$$

$$\sum_{\ell=1}^{2(\tau-1)} \tilde{b}_{t_0\ell}\lambda_\ell = \tilde{a}_{t_0} \qquad (4.11)$$

имеет неотрицательное решение $\lambda=(\lambda_1,\dots,\lambda_{2(\tau-1)})$. Это следует из того, что число уравнений в (4.9) равно τ, а число неизвестных $2(\tau-1)$ ($\tau-2$ из них можно выбрать произвольно). Таким образом, доказана

ТЕОРЕМА 4.1. Если коэффициенты a_{ij} и b_{kj} ($i,k=1,\dots,n$; $j=1,\dots,m$) таковы, что выполняется условие (4.10), то неравенство (4.2) является следствием системы (2.7).

Теорема 4.1 утверждает, что оператор F переводит любое множество $A_u\in\mathcal{A}$ в одно из полупространств, определенных гиперплоскостью

$$b_{\bar{k}j} F_k' x - b_{kj} F_{\bar{k}} x = 0,$$

причем если $sgn\, a_{t_0}=1$, то в полупространство $b_{\bar{k}j}F_k x - b_{kj}F_{\bar{k}}x \geqslant 0$, если же $sgn\,\tilde{a}_{t_0}=-1$, то в полупространство $b_{\bar{k}j}F_k x - b_{kj}F_{\bar{k}}x\leqslant 0$. Из теоремы 4.1 следует, что образ любого множества $A\in\mathcal{A}$ есть выпуклый замкнутый конус и F на этом образе линеен, т.е. $F(A)\subseteq A_u$, где $A_u\in\mathcal{A}$.

ЗАМЕЧАНИЕ. Величина $\tilde{a}_{t_0}$, определенная формулой (4.7), представляет собой определитель порядка $[(m+1)\times(n+1)]$, а именно:

$$\tilde{a}_{t_0}=\frac{1}{b_{11}\cdot b_{22}\cdots b_{\tau\tau}}\cdot\begin{vmatrix} b_{\tau\tau} & 0 & 0 & \dots & 0 & -b_{\tau t_0} & 0\\ 0 & b_{\tau-1\,\tau-1} & 0 & \dots & 0 & -b_{\tau-1\,t_0} & 0\\ 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots\\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots\\ 0 & 0 & \dots & \dots & b_{11} & -b_{1t_0} & 0\\ a_{k\tau} & a_{k\tau-1} & \dots & \dots & a_{k1} & a_{k t_0} & b_{\bar{k}j}\\ a_{\bar{k}\tau} & a_{\bar{k}\tau-1} & \dots & \dots & a_{\bar{k}1} & a_{\bar{k}t_0} & b_{kj}\end{vmatrix}, \qquad (4.12)$$

причем если $F(A_u)$ содержится в полупространстве (4.2), то $\tilde{a}_{t_0}\geqslant 0$, если же $F(A_u)$ содержится в полупространстве $b_{\bar{k}j}F_k x - b_{kj}F_{\bar{k}}x\leqslant 0$, то $\tilde{a}_{t_0}\leqslant 0$, и наоборот. Это следует из того, что если $a_{t_0}\leqslant 0$, то, поменяв местами последние две строки, мы получим для нового определителя $a_{t_0} \geq 0$. Легко видеть, что этот новый определитель $\hat{a}_{t_0}$ соответствует полупространству $b_{\bar{k}j} F_k x - b_{kj} F_{\bar{k}} x \geq 0$.

Заметим, что первые $r-1$ строк определителя (4.12) связаны с конусом A_u (областью определения), а последние две строки с полупространством, в которое F переводит A_u (областью значений).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Оператор F, действующий из R_+^n в R_+^n, назовем $\mathcal{A}$-циклическим, если для любого $A \in \mathcal{A}$ выполняется соотношение $F(A) \cap \mathring{A} = \emptyset$.

ТЕОРЕМА 4.2. Пусть $F: R_+^n \to R_+^n$, определенный формулой (2.3). Пусть, далее, выполнены условия:

а) для любого $A \in \mathcal{A}$ имеют место соотношения (3.4) и (4.10);

б) существует число $\ell \leq \bar{\sigma}$ такое, что неравенство $f_\ell(x) \geq 0$ содержится в системе неравенств, множество решений которой совпадает с A, и выполняется неравенство $\tilde{a}_{t_0} = \tilde{a}_{t_0(\ell)} < 0$. Тогда оператор F является $\mathcal{A}$-циклическим.

Из а) следует, что для любого $x \in A$ имеет место либо $f_\ell(Fx) \geq 0$, либо $f_\ell(Fx) \leq 0$. Если выполнено б), то, очевидно, выполняется неравенство $f_\ell(Fx) < 0$. Таким образом, $F(A) \cap \mathring{A} = \emptyset$.

СЛЕДСТВИЕ I. В силу конечности числа элементов множества $\mathcal{A}$, для любого $A \in \mathcal{A}$ существует натуральное число $r = r(A)$ такое, что $F^r(A) < A$ (где $r(A) = C_{m+n-1}^{n-1}$ см. [2]).

СЛЕДСТВИЕ 2. Если выполняется условие а) теоремы 4.2 и $\tilde{a}_{t_0(\ell)} \geq 0$ для всех $\ell = 1, 2, \ldots, \bar{\sigma}$, то $F(A) < A$.

ЗАМЕЧАНИЕ. В условиях теоремы 4.2 оператор F не имеет ни одного собственного вектора. Это следует из определения $\mathcal{A}$-цикличности оператора F.

Все результаты $I^0 - 4^0$ можно получить и в случае, когда вместо R^n_+ рассматривается любой многогранный конус из R^n_+.

Автор приносит благодарность А.М.Рубинову и С.С.Кутателадзе за внимание к работе.

Литература

I. Фан Цзи. О системах линейных неравенств. Сборник "Линейные неравенства и смежные вопросы", Изд. ИЛ, 1959, стр.214-261.

2. Гильдерман Ю.И., Кудрина К.Н., Полетаев И.А. Модели Λ - систем (системы с лимитирующими факторами). Сб. "Исследования по кибернетике", "Сов. радио," М., 1970, 165-211.

Поступила в редакцию
8.П. 1972 г.