УДК 512.87:519.12

О РАЗЛОЖЕНИИ МАТРИЦЫ С БЛОЧНОЙ СТРУКТУРОЙ В ПРОИЗВЕДЕНИЕ МАТРИЦ ТРЕУГОЛЬНОГО ТИПА

Р.А. Звягина

В работах [1,2] предложен универсальный метод решения задачи линейного программирования, основанный на принципе многоступенчатой декомпозиции и упорядочении блоков матрицы системы ограничений. Наиболее трудоемкой и чувствительной к ошибкам округления процедурой этого метода является разложение некоторой квадратной матрицы в произведение матриц треугольного типа. Предлагаемый способ разложения позволяет (в отличие от процесса, описанного в [1], избегать деления на малые числа, приводящего, как правило, к пропаданию знаков и к понижению точности вычислений.

§ 1. Постановка задачи, определения, обозначения

Пусть некоторая прямоугольная матрица $A[M,N]$ с множествами $M=\{1,2,\dots,m\}$ и $N=\{1,2,\dots,n\}$ ($m<n$) номеров строк и столбцов соответственно имеет блочную структуру

$$M_\kappa, N_\kappa\,,\ \kappa\in P=\{1,2,\dots,p\}.$$

Это значит, что все ненулевые элементы этой матрицы заключены в подматрицах (блоках) $A[M_\kappa,N_\kappa]$, $\kappa\in P$, причем $M_\kappa\ (\kappa\in P)$ – разбиение множества M, а $N_\kappa\subseteq N$ для любого $\kappa\in P$. Предположим, что некоторое отношение порядка $\preccurlyeq$ в множестве P номеров блоков матрицы $A[M,N]$ согласовано с её блочной структурой, т.е. обладает следующими свойствами: отношение сравнимости в этом порядке в множестве P является расширением симметричного бинарного отношения

$$R = \{ [\kappa, \tau] : N_\kappa \cap N_\tau \neq \emptyset ;\ \kappa \neq \tau ;\ \kappa, \tau \in P \}, \tag{I}$$

и для любого $\kappa \in P$ сечение

$$L(\kappa) = \{ \tau \in P : \tau \geq \kappa \}$$

упорядоченного множества P является цепью (линейно упорядоченным множеством).

Как показано в [I], для любого множества $\mathcal{J} \subset N$, при котором матрица $A[M, \mathcal{J}]$ квадратная и неособенная, существует разбиение $\mathcal{J}_\kappa\ (\kappa \in P)$, обладающее следующими свойствами:

I) $\mathcal{J}_\kappa \subseteq \bigcup_{\tau \leq \kappa} N_\tau$ и $|\mathcal{J}_\kappa| = |M_\kappa|$ для любого $\kappa \in P$ (здесь под $|I|$ понимается число элементов конечного множества I).

2) В разложении

$$A[M, \mathcal{J}] = B[M, \mathcal{J}] \cdot \lambda[\mathcal{J}, \mathcal{J}],$$

однозначно определяемом разбиением $\mathcal{J}_\kappa\ (\kappa \in P)$, матрица $B[M, \mathcal{J}]$ треугольного типа имеет блочную структуру M_κ, $(\bigcup_{\tau \leq \kappa} \mathcal{J}_\tau)$, $\kappa \in P$, и её квадратные подматрицы $B[M_\kappa, \mathcal{J}_\kappa]$, $\kappa \in P$, неособенные.

3) $\lambda[\mathcal{J}, \mathcal{J}] = E[\mathcal{J}, \mathcal{J}] + \Lambda[\mathcal{J}, \mathcal{J}]$,

где $E[\mathcal{J}, \mathcal{J}]$ – единичная матрица, а $\Lambda[\mathcal{J}, \mathcal{J}]$ – матрица треугольного типа с блочной структурой $\mathcal{J}_\kappa$, $(\bigcup_{\sigma > \kappa} \mathcal{J}_\sigma) \cap (\bigcup_{\tau \leq \kappa} N_\tau)$, $\kappa \in P$ (рис.I).

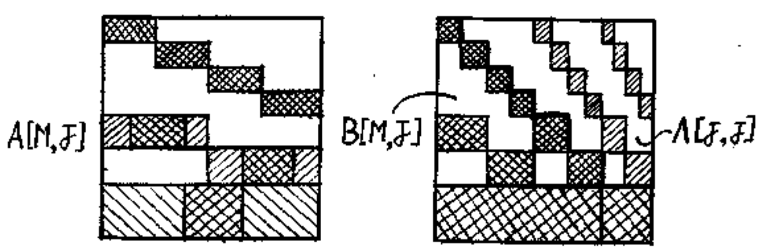

Рис. I

Матрицы $\Lambda[\mathcal{J}, \mathcal{J}]$ и $B[M, \mathcal{J}]$, обладающие перечисленными свойствами, будем называть **согласованными** с разбиением $\mathcal{J}_\kappa\ (\kappa \in P)$ множества $\mathcal{J}$, а само разбиение – **базисным** относительно матрицы $A[M, \mathcal{J}]$.

Рассмотрим прямоугольную матрицу $A[M,\bar{J}]$, где $\bar{J}=J\cup\{j'\}$ $(j'\in N\setminus J)$, и пусть для некоторого элемента $j_0\in J_{k_0}$ матрица $A[M,\bar{J}\setminus\{j_0\}]$ неособенная. Задача состоит в том, чтобы для множества $\bar{J}\setminus\{j_0\}$ построить разбиение $\bar{J}_k(k\in P)$, базисное относительно матрицы $A[M,\bar{J}\setminus\{j_0\}]$ и отличающееся от разбиения $J_k(k\in P)$ разве лишь множествами $\bar{J}_k$, $k\geqslant k_0$, а также построить матрицы $\bar{\Lambda}[\bar{J}\setminus\{j_0\},\bar{J}\setminus\{j_0\}]$ и $\bar{B}[M,\bar{J}\setminus\{j_0\}]$, согласованные с этим разбиением.

Прежде чем перейти к решению поставленной задачи, введем некоторые обозначения и определения. Отношение порядка $\prec$ в множестве P расширим на множество $\bar{P}=P\cup\{0\}$, считая $k\prec 0$ для любого $k\in P$. Для любого $k\in P$ через $(k+)$ обозначим элемент, непосредственно следующий за k в упорядоченном множестве $\bar{P}$, и положим

$$\bar{L}(k)=\{t\in\bar{P}:t\succ k\}=L(k)\cup\{0\}.$$

Разбиение $J_k(k\in\bar{P})$ множества $\bar{J}$ будем называть б а з и с н ы м относительно прямоугольной матрицы $A[M,\bar{J}]$, если её подматрица $A[M,\bar{J}\setminus J_0]$ квадратная и неособенная, а разбиение $J_k(k\in P)$ множества $\bar{J}\setminus J_0$ является базисным относительно этой квадратной подматрицы. Если при этом матрицы $\Lambda[\bar{J}\setminus J_0,\bar{J}\setminus J_0]$ и $B[M,\bar{J}\setminus J_0]$ согласованы с разбиением $J_k(k\in P)$ множества $\bar{J}\setminus J_0$, то матрицы $\Lambda[\bar{J},\bar{J}]$ и $B[M,\bar{J}]$, где столбец $\Lambda[\bar{J}\setminus J_0,J_0]$ является решением системы

$$B[M,\bar{J}\setminus J_0]\cdot\lambda[\bar{J}\setminus J_0,J_0]=A[M,J_0], \qquad (2)$$

а строка $\Lambda[J_0,\bar{J}]$ и столбец $B[M,J_0]$ нулевые, будем называть с о г л а с о в а н н ы м и с разбиением $J_k(k\in\bar{P})$ множества $\bar{J}$. Заметим, что в результате умножения матрицы $B[M,\bar{J}]$ справа на

$$\lambda[\bar{J},\bar{J}]=E[\bar{J},\bar{J}]+\Lambda[\bar{J},\bar{J}] \qquad (3)$$

получается матрица $A[M,\bar{J}]$.

Пусть некоторое разбиение $J_k(k\in P)$ множества J является базисным относительно матрицы $A[M,J]$, а матрицы $\Lambda[J,J]$ и $B[M,J]$ с ним согласованы. Полагая $J_0=\{j'\}$, получим разбиение множества $\bar{J}$, базисное относительно матрицы $A[M,\bar{J}]$ (согласованные с ним матрицы $\Lambda[\bar{J},\bar{J}]$ и $B[M,\bar{J}]$

получаются по правилу, описанному выше). Для решения поставленной задачи теперь нужно построить базисное относительно $A[M,\bar{J}]$ разбиение $\bar{J}_K\ (K\in P)$ множества $\bar{J}$, в котором $\bar{J}_0=\{j_0\}$, а $\bar{J}_K=J_K$ для $K\in P\setminus L_1(K_0)$, и привести матрицы $\Lambda[\bar{J},\bar{J}]$ и $B[M,\bar{J}]$ в соответствие с этим новым разбиением.

В [I] показано, что для решения системы линейных уравнений с матрицей $A[M,\bar{J}\setminus J_0]$ достаточно хранить матрицу $\Lambda[\bar{J},\bar{J}]$ и блоки $B[M_K,\bar{J}_K]$, $K\in P$, матрицы $B[M,\bar{J}]$. Поэтому в дальнейшем при описании вычислительной процедуры преобразования матрицы $B[M,\bar{J}]$ мы будем следить лишь за преобразованием указанных блоков.

§ 2. Последовательности допустимых перестановок

Перестановку номеров $j_\alpha\in J_\alpha$ и $j_\omega\in J_\omega$ $(\alpha<\omega\leq 0)$ в базисном относительно $A[M,\bar{J}]$ разбиении $J_K\ (K\in\bar{P})$ множества $\bar{J}$ будем называть допустимой, если разбиение

$$J_K,\ K\in\bar{P}\setminus\{\alpha,\omega\};\ (J_\alpha\setminus\{j_\alpha\})\cup\{j_\omega\},\ (J_\omega\setminus\{j_\omega\})\cup\{j_\alpha\} \qquad (4)$$

множества $\bar{J}$ также является базисным относительно $A[M,\bar{J}]$. Пусть с базисным разбиением $J_K\ (K\in\bar{P})$ множества $\bar{J}$ согласованы матрицы $\Lambda[\bar{J},\bar{J}]$ и $B[M,\bar{J}]$, и пусть $\omega_0=\min\{\omega,\ \max L(\alpha)\}$. Как будет показано ниже, признак базисности разбиения (4) зависит от величин

$$\Delta_\alpha^\omega(K)=1+v_K[J_K]\cdot\{\lambda[J_K,j_\omega]-\lambda[J_K,j_\alpha]\},\quad \alpha\leq K\leq\omega_0, \qquad (5)$$

где строки $v_K[\bar{J}]$ вычисляются по рекуррентным формулам

$$\begin{gathered} v_\alpha[\bar{J}]=E[j_\alpha,\bar{J}]-E[j_\omega,\bar{J}], \\ v_{(K+)}[\bar{J}]=\frac{1}{\Delta_\alpha^\omega(K)}\{v_K[\bar{J}]-v_K[J_K]\cdot\lambda[J_K,\bar{J}]\},\quad \alpha\leq K\leq\omega_0 \end{gathered} \qquad (6)$$

(отметим, что $\Delta_\alpha^\omega(\alpha)=\Lambda[j_\alpha,j_\omega]$). В силу блочной структуры матрицы $\Lambda[\bar{J},\bar{J}]$ векторы (6) при любом $K\geq\alpha$ имеют отличные от нуля части $v_K[J_\tau]$ разве лишь для $\tau\geq K$.

ЛЕММА I (признак допустимости перестановки). *Для того, чтобы разбиение (4) было базисным, необходимо и достаточ-*

н о , ч т о б ы

$$\Delta_{\alpha}^{\omega}(\kappa) \neq 0 \;, \quad \alpha \preccurlyeq \kappa \prec \omega. \tag{7}$$

<u>Достаточность</u>. Если $\omega = 0$, то условие (7) эквивалентно условию

$$\Delta_{\alpha}^{\omega}(\kappa) \neq 0 \;, \quad \alpha \preccurlyeq \kappa \preccurlyeq \omega_0 . \tag{8}$$

Покажем, что в этом случае разбиение $J_\kappa (\kappa \in \overline{P})$ множества $\overline{J}$ является базисным относительно матрицы

$$A'[M,\overline{J}] = A[M,\overline{J}] + \{A[M,j_\omega] - A[M,j_\alpha]\} v_\alpha[\overline{J}]. \tag{9}$$

Действительно, в силу условия (8) можно построить матрицу $\Lambda'[\overline{J}\,\overline{J}]$, полагая для каждого $\kappa \in \overline{P}$

$$\Lambda'[J_\kappa,\overline{J}] = \Lambda[J_\kappa,\overline{J}] + \{\lambda[J_\kappa,j_\omega] - \lambda[J_\kappa,j_\alpha]\} u_\kappa[\overline{J}], \tag{10}$$

где векторы-строки $u_\kappa[\overline{J}]$ вычисляются по формуле

$$u_\kappa[\overline{J}] = \begin{cases} v_\alpha[\overline{J}] \;, & \kappa \prec \alpha \;, \\ v_{(\kappa+)}[\overline{J}] \;, & \alpha \preccurlyeq \kappa \preccurlyeq \omega_0 \;, \\ 0, & \kappa \in \overline{P} \setminus (\{\tau \prec \alpha\} \cup \{\sigma : \alpha \preccurlyeq \sigma \preccurlyeq \omega_0\}), \end{cases} \tag{11}$$

и при любом $\kappa \succ \alpha$ имеют отличные от нуля части $u_\kappa[J_\tau]$ разве лишь для $\tau \succ \kappa$. Отсюда ясно, что матрицы $\Lambda[\overline{J},\overline{J}]$ и $\Lambda'[\overline{J},\overline{J}]$ имеют одну и ту же блочную структуру.

Нетрудно проверить, что в результате умножения матрицы

$$B'[M,\overline{J}] = B[M,\overline{J}] + \sum_{\alpha \preccurlyeq \kappa \preccurlyeq \omega_0} \{A_\kappa[M,j_\omega] - A_\kappa[M,j_\alpha]\} \cdot v_\kappa[J_\kappa] \cdot E[J_\kappa,\overline{J}] \tag{12}$$

справа на матрицу (3) с заменой $\Lambda[\overline{J},\overline{J}]$ на $\Lambda'[\overline{J},\overline{J}]$ получим матрицу (9). Здесь столбцы $A_\kappa[M,j]$ для $\alpha \preccurlyeq \kappa \preccurlyeq \omega_0$ вычисляются по формуле

$$A_\kappa[M,j] = A[M,j] - \sum_{\tau \in P \setminus L(\kappa)} B[M,J_\tau] \cdot \lambda[J_\tau,j], \; j \in \overline{J},$$

и имеют отличные от нуля части $A_\kappa[M_\sigma,j]$ разве лишь для $\sigma \succ \kappa$ (если $j \in J_\kappa$, то столбец $A_\kappa[M,j]$ совпадает с $B[M,j]$). Отсюда ясно, что матрица (12) имеет ту же блочную структуру, что и матрица $B[M,\overline{J}]$. Далее, для каждой из матриц

$$\begin{aligned} B'[M_\kappa, \mathcal{J}_\kappa] = B[M_\kappa, \mathcal{J}_\kappa] + \{A_\kappa[M_\kappa, j_\omega] - \\ - A_\kappa[M_\kappa, j_\alpha]\} v_\kappa[\mathcal{J}_\kappa], \quad \alpha \leqslant \kappa \leqslant \omega_0, \end{aligned} \tag{13}$$

в силу условия (8) существует обратная матрица

$$\begin{aligned} (B'[M_\kappa, \mathcal{J}_\kappa])^{-1} = B^{-1}[\mathcal{J}_\kappa, M_\kappa] - \frac{1}{\Delta_\alpha^\omega(\kappa)} \{\dot\lambda[\mathcal{J}_\kappa, j_\omega] - \\ - \lambda[\mathcal{J}_\kappa, j_\alpha]\} \cdot v_\kappa[\mathcal{J}_\kappa] \cdot B^{-1}[\mathcal{J}_\kappa, M_\kappa], \quad \alpha \leqslant \kappa \leqslant \omega_0 \end{aligned} \tag{14}$$

(см., например, [3], стр.192). Следовательно, блоки (13) являются неособенными матрицами, а для номеров $\kappa \in P \setminus \{\tau : \alpha \leqslant \tau \leqslant \omega_0\}$ блоки $B'[M_\kappa, \mathcal{J}_\kappa]$ совпадают с соответствующими (неособенными) подматрицами матрицы $B[M, \bar{\mathcal{J}}]$. Последнее означает также, что матрица $A'[M, \bar{\mathcal{J}} \setminus \mathcal{J}_0]$ неособенная.

Если $\omega < 0$, то матрица $A'[M, \bar{\mathcal{J}} \setminus \mathcal{J}_0]$ совпадает с $A[M, \bar{\mathcal{J}} \setminus \mathcal{J}_0]$ с точностью до порядка столбцов и, следовательно, является неособенной. Из условия (7) следует существование векторов $v_\kappa[\bar{\mathcal{J}}]$ для $\alpha \leqslant \kappa \leqslant \omega$, а вместе с представлениями (12-14) это влечет неособенность матриц $B'[M_\kappa, \mathcal{J}_\kappa]$, $\kappa \in P \setminus \{\omega\}$. Далее, поскольку в этом случае

$$\det B'[M, \bar{\mathcal{J}} \setminus \mathcal{J}_0] = -\frac{1}{\prod\limits_{\alpha < \kappa < \omega} \Delta_\alpha^\omega(\kappa)} \cdot \det B[M, \bar{\mathcal{J}} \setminus \mathcal{J}_0], \tag{15}$$

то и матрица $B'[M, \bar{\mathcal{J}} \setminus \mathcal{J}_0]$ неособенная. Поэтому блок (13) при $\kappa = \omega$ также является неособенной матрицей. Существование же и единственность обратной матрицы (14) при $\kappa = \omega$ влечет $\Delta_\alpha^\omega(\omega) \neq 0$, откуда следует (8) и тем самым существование матрицы $\Lambda'[\bar{\mathcal{J}}, \bar{\mathcal{J}}]$.

Таким образом, разбиение $\mathcal{J}_\kappa\ (\kappa \in \bar{P})$ множества $\bar{\mathcal{J}}$ является базисным относительно матрицы (9), отличающейся от матрицы $A[M, \bar{\mathcal{J}}]$ лишь порядком столбцов с номерами j_α и j_ω. Если теперь в разбиении $\mathcal{J}_\kappa\ (\kappa \in \bar{P})$ номера j_α и j_ω поменять местами, то матрицы $\Lambda'[\bar{\mathcal{J}}, \bar{\mathcal{J}}]$ и $B'[M, \bar{\mathcal{J}}]$ будут согласованы с этим разбиением, которое, очевидно, совпадает с (4) и является базисным относительно $A[M, \bar{\mathcal{J}}]$.

<u>Необходимость</u>. Из базисности разбиения (4) относительно

матрицы $A[M,\bar{\mathcal{J}}]$ следует существование и единственность матриц $\Lambda'[\mathcal{J},\bar{\mathcal{J}}]$ и $B'[M,\bar{\mathcal{J}}]$, с ним согласованных. При доказательстве достаточности показано, что при разбиении (4) матрица $B'[M,\bar{\mathcal{J}}]$ имеет вид (I2). Из неособенности матриц (I3) следует существование и единственность обратной к каждой из них, имеющей представление (I4), откуда и следует (7).

Заметим, что леммы I и 2 статьи [I] являются частными случаями доказанной леммы.

ТЕОРЕМА. Если $\Lambda[j_\alpha, j_\omega]\neq 0$ для некоторых $j_\alpha\in\mathcal{J}_\alpha$ и $j_\omega\in\mathcal{J}_\omega$ ($\alpha<\omega\leq 0$), то существуют такие последовательности

$$\alpha=\tau_1<\tau_2<\ldots<\tau_r=\omega \quad (1<r\leq|\bar{L}(\alpha)|), \tag{I6}$$

$$j_i\in\mathcal{J}_{\tau_i}, \quad i=1,2,\ldots,r \quad (j_1=j_\alpha,\ j_r=j_\omega), \tag{I7}$$

что разбиение

$$\bar{\mathcal{J}}_K^{(1)} \doteq \begin{cases} \mathcal{J}_K, & K\in\bar{P}'\setminus\{\tau_1,\ldots,\tau_r\}, \\ (\mathcal{J}_\alpha\setminus\{j_\alpha\})\cup\{j_\omega\}, & K=\alpha, \\ (\mathcal{J}_{\tau_i}\setminus\{j_i\})\cup\{j_{i-1}\}, & K=\tau_i \ (i=2,3,\ldots,r), \end{cases} \tag{I8}$$

множества $\bar{\mathcal{J}}$ является базисным относительно матрицы $A[M,\bar{\mathcal{J}}]$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, что для некоторого $S\geq 1$ определены такие последовательности

$$\alpha=\tau_1<\tau_2<\tau_3<\ldots<\tau_S<\omega \quad \text{и} \quad j_i\in\mathcal{J}_{\tau_i} \ (i=1,2,\ldots,S), \tag{I9}$$

что $\Lambda[j_S, j_\omega]\neq 0$. При $S=1$ это предположение, очевидно, справедливо. Предположим также, что существует базисное разбиение $\mathcal{J}_K^{(S)}$ $(K\in\bar{P})$ множества $\bar{\mathcal{J}}$, отличающееся от исходного разбиения $\mathcal{J}_K$ $(K\in\bar{P})$ разве лишь множествами $\mathcal{J}_K^{(S)}$, $K\geq\tau_S$, причем $\mathcal{J}_{\tau_S}^{(S)}=(\mathcal{J}_{\tau_S}\setminus\{j_S\})\cup\{j_\omega\}$, и в этом разбиении допустима последовательность попарных перестановок номеров j_σ, j_ω ($\sigma=S-1,\ldots,2,1$). Другими словами, в разбиении $\mathcal{J}_K^{(S)}$ $(K\in\bar{P})$ допустима циклическая перестановка

$$\underbrace{j_1 \to j_2 \longrightarrow j_3 \longrightarrow \cdots \longrightarrow j_{s-1} \longrightarrow j_\omega}_{} \qquad (20)$$

Если в исходном разбиении $\mathcal{J}_K (K \in \overline{P})$ перестановка номеров j_s и j_ω допустима (а во всяком случае при $(\tau +) = \omega$ это действительно так в силу условия $\Lambda [j_s, j_\omega] \neq 0$ и леммы I), то разбиение (4) с заменой α на τ_s и j_α на j_s дает разбиение $\mathcal{J}_K^{(s)} (K \in \overline{P})$, а циклическая перестановка (20) в этом разбиении дает искомое разбиение (I8) при $\tau = s+1$.

Предположим, что перестановка элементов j_s и j_ω в исходном разбиении $\mathcal{J}_K (K \in \overline{P})$ недопустима. Вместе с предположением $\Lambda [j_s, j_\omega] \neq 0$ и соотношением $\Delta_{\tau_s}^{\omega} (\tau_s) = \Lambda [j_s, j_\omega]$ это означает, что среди элементов $K \succ \tau_s$ найдется элемент $\tau_{s+1} \prec \omega$ такой, что $\Delta_{\tau_s}^{\omega} (\tau_{s+1}) = 0$, а

$$\Delta_{\tau_s}^{\omega} (K) \neq 0 \ , \ \tau_s \prec K \prec \tau_{s+1} \,. \qquad (2I)$$

Отметим, что величины (2I) зависят от j_ω, но не от ω. Из представления (5) при $K = \tau_{s+1}$ (с заменой α на τ_s и j_α на j_s) следует, что найдется элемент $j_{s+1} \in \mathcal{J}_{\tau_{s+1}}$ такой, что $\Lambda [j_{s+1}, j_\omega] \neq 0$, так как в противном случае $\Delta_{\tau_s}^{\omega} (\tau_{s+1}) = 1$. Отсюда ясно, что в последовательностях (I9) номер s можно увеличить на I, так как если существует разбиение $\mathcal{J}_K^{(s+1)} (K \in \overline{P})$ множества $\overline{\mathcal{J}}$, то в нем допустима последовательность попарных перестановок элементов j_σ и j_ω ($\sigma = s, s-1, \ldots, 2, 1$), т.е. допустима циклическая перестановка

$$\underbrace{\longrightarrow j_1 \to j_2 \to \cdots \to j_{s-1} \to j_s \longrightarrow j_\omega \longrightarrow}_{}$$

(перестановка элементов j_s и j_ω допустима в этом разбиении в силу условия (2I) и леммы I, а циклическая перестановка (20) в получившемся разбиении $\mathcal{J}_K^{(s)}$, $K \in \overline{P}$, допустима по индуктивному предположению).

Таким образом, в силу строгой монотонности последовательности $\tau_1 \prec \tau_2 \prec \ldots$ и конечности множества $\overline{L}_1 (\alpha)$ описанный процесс оборвется через $\tau \leq |\overline{L}(\alpha)|$ шагов. Теорема доказана.

§ 3. Приведение матриц $\Lambda[\bar{J}, J]$ и $B[M, \bar{J}]$ в соответствие с новым базисным разбиением

Предположим, что последовательности (I6) и (I7) определены и для некоторого $s \leq r$ матрицы $\Lambda^{(s)}[\bar{J} \bar{J}]$ и $B^{(s)}[M, \bar{J}]$ согласованы с разбиением

$$J_k^{(s)} = \begin{cases} J_k, & k \in \bar{P} \setminus \{\tau_s, \tau_{s+1}, \ldots, \tau_r\}, \\ (J_{\tau_s} \setminus \{j_s\}) \cup \{j_\omega\}, & k = \tau_s, \\ (J_{\tau_i} \setminus \{j_i\}) \cup \{j_{i-1}\}, & k = \tau_i \ (i = s+1, \ldots, r), \end{cases} \qquad (22)$$

множества $\bar{J}$, базисным относительно $A[M, \bar{J}]$, и отличаются от матриц $\Lambda[\bar{J}, \bar{J}]$ и $B[M, \bar{J}]$, согласованных с разбиением $J_k \ (k \in \bar{P})$, разве лишь блоками

$$\Lambda^{(s)}[J_k^{(s)}, \bar{J}] \quad \text{и} \quad B^{(s)}[\bigcup_{\tau \geq k} M_\tau, J_k^{(s)}], \ \tau_s \leq k \leq \omega_0,$$

(для $k < \tau_s$ блоки $\Lambda^{(s)}[J_k, \bar{J}]$ совпадают с соответствующими блоками матрицы $\Lambda[\bar{J}, \bar{J}]$ с точностью до порядка столбцов с номерами $j_s, j_{s+1}, \ldots, j_r$). При $s = r$ с разбиением (22), совпадающим с $J_k \ (k \in \bar{P})$, согласованы сами матрицы $\Lambda[\bar{J}, \bar{J}]$ и $B[M, \bar{J}]$, а при $s = 1$ разбиение (22) совпадает с (I8), и матрицы $\Lambda^{(1)}[\bar{J}, \bar{J}]$ и $B^{(1)}[M, \bar{J}]$, согласованные с ним, – искомые.

При $s > 1$ в формулах (22) требуется уменьшить номер s на I, т.е. в разбиении (22) переставить номера $j_{s-1} \in J_{\tau_{s-1}}^{(s)}$ и $j_\omega \in J_{\tau_s}^{(s)}$, и привести матрицы $\Lambda^{(s)}[\bar{J}, \bar{J}]$ и $B^{(s)}[M, \bar{J}]$ в соответствие с этим новым разбиением. Для этого достаточно в формулы (4–I4) вместо матриц $\Lambda[\bar{J}, \bar{J}]$, $B[M, \bar{J}]$, разбиения $J_k \ (k \in \bar{P})$ и номеров α, j_α, ω подставить матрицы $\Lambda^{(s)}[\bar{J}, \bar{J}]$, $B^{(s)}[M, \bar{J}]$, разбиение (22) и номера τ_{s-1}, j_{s-1}, τ_s соответственно. Если теперь в (22) номер s заменить на $s-1$, то полученные по формулам (I0) и (I2) матрицы $\Lambda'[\bar{J}, \bar{J}]$ и $B'[M, \bar{J}]$ будут согласованы с разбиением (22), базисным относительно $A[M, \bar{J}]$. Кроме того, из (II) и (I2) следует, что матрицы $\Lambda'[\bar{J}, \bar{J}]$ и $B'[M, \bar{J}]$ отличаются от матриц $\Lambda^{(s)}[\bar{J}, \bar{J}]$ и $B^{(s)}[M, \bar{J}]$ разве лишь блоками

$$\Lambda'[\mathcal{J}_\kappa^{(s-1)}, \bar{\mathcal{J}}] \quad \text{и} \quad B'[\bigcup_{\tau \geq \kappa} M_\tau, \mathcal{J}_\kappa^{(s-1)}], \; \tau_{s-1} \leq \kappa \leq \min\{\tau_s, \max L(\tau_{s-1})\}$$

(для $\kappa < \tau_{s-1}$, как следует из определения (6) вектора $v_{\tau_{s-1}}[\bar{\mathcal{J}}]$, блоки $\Lambda'[\mathcal{J}_\kappa, \bar{\mathcal{J}}]$ совпадают с соответствующими блоками матрицы $\Lambda^{(s)}[\bar{\mathcal{J}}, \bar{\mathcal{J}}]$ с точностью до порядка столбцов с номерами j_{s-1} и j_ω). Следовательно, матрицы $\Lambda'[\bar{\mathcal{J}}, \bar{\mathcal{J}}]$ и $B'[M, \bar{\mathcal{J}}]$ можно принять в качестве матриц $\Lambda^{(s)}[\bar{\mathcal{J}}, \bar{\mathcal{J}}]$ и $B^{(s)}[M, \bar{\mathcal{J}}]$, согласованных с разбиением $\mathcal{J}_\kappa^{(s-1)} (\kappa \in \bar{P})$ множества $\bar{\mathcal{J}}$. Полагая $s = \tau, \tau-1, \ldots, 2$, получим таким образом разбиение (I8) и согласованные с ним матрицы $\Lambda^{(1)}[\bar{\mathcal{J}}, \bar{\mathcal{J}}]$ и $B^{(1)}[M, \bar{\mathcal{J}}]$.

Описанные преобразования можно проводить в иной последовательности, а именно: сначала для всех $s = 2, 3, \ldots, \tau$ в интервалах $\tau_{s-1} \leq \kappa < \tau_s$ делаются преобразования блоков $\Lambda[\mathcal{J}_\kappa, \bar{\mathcal{J}}]$ и $B[M_\kappa, \mathcal{J}_\kappa]$, которые соответствовали бы перестановке номеров $j_{s-1} \in \mathcal{J}_{\tau_{s-1}}$ и $j_\omega \in \mathcal{J}_\omega$ в исходном разбиении $\mathcal{J}_\kappa (\kappa \in \bar{P})$ множества $\bar{\mathcal{J}}$, если бы она была допустима (фактически такая перестановка не производится). Затем делаются остальные необходимые преобразования. При таком порядке вычислений определение последовательностей (I6) и (I7) заранее не обязательно: переход от номера τ_{s-1} $(s \geq 2)$ к номеру $\tau_s > \tau_{s-1}$ совершается в тот момент, когда величина $\Delta^\omega_{\tau_{s-1}}(\tau_s)$ оказывается равной нулю (элемент $j_s \in \mathcal{J}_{\tau_s}$ в этом случае выбирается из условия $\Lambda[j_s, j_\omega] \neq 0$).

Таким образом, исходя из разбиения $\mathcal{J}_\kappa (\kappa \in \bar{P})$ множества $\bar{\mathcal{J}}$ и согласованных с ним матриц $\Lambda[\bar{\mathcal{J}}, \bar{\mathcal{J}}]$ и $B[M, \bar{\mathcal{J}}]$, при каждом фиксированном $s = 2, 3, \ldots, \tau$ в интервалах $\tau_{s-1} \leq \kappa < \tau_s$ сначала вычисляются блоки $B'[M_\kappa, \mathcal{J}_\kappa]$ по формуле (I3) с заменой α на τ_{s-1} и j_α на j_{s-1} и подставляются в матрицу $B[M, \bar{\mathcal{J}}]$ вместо соответствующих блоков $B[M_\kappa, \mathcal{J}_\kappa]$, а затем для номеров $\kappa < \tau_s$ вычисляются блоки $\Lambda'[\mathcal{J}_\kappa, \bar{\mathcal{J}}]$ по формуле (I0) также с заменой α на τ_{s-1} и j_α на j_{s-1} и подставляются в матрицу $\Lambda[\bar{\mathcal{J}}, \bar{\mathcal{J}}]$ вместо соответствующих блоков $\Lambda[\mathcal{J}_\kappa, \bar{\mathcal{J}}]$. Далее, для каждого $\tau_s < 0$ $(s = 2, 3, \ldots, \tau)$ блоки $B[M_{\tau_s}, \mathcal{J}_{\tau_s}]$ и $\Lambda[\mathcal{J}_{\tau_s}, \bar{\mathcal{J}}]$ полученных матриц $B[M, \bar{\mathcal{J}}]$ и $\Lambda[\bar{\mathcal{J}}, \bar{\mathcal{J}}]$ еще раз преобразуются соответственно по формулам (I3) и (I0) с заменой ω на τ_s и j_ω на j_s. Блоки

$$B[M_\kappa, \mathcal{J}_\kappa], \; \kappa \in P \setminus \{\tau : \alpha \leq \kappa \leq \omega_0\} \quad \text{и} \quad \Lambda[\mathcal{J}_\kappa, \bar{\mathcal{J}}], \kappa \in P \setminus \{\tau : \tau \leq \omega_0\}$$

матриц $B[M,\bar{\bar{J}}]$ и $\Lambda[\bar{\bar{J}},\bar{\bar{J}}]$ остаются без изменения. Если теперь в исходном разбиении $J_K\ (K\in P)$ множества $\bar{\bar{J}}$ произвести циклическую перестановку

$$\circlearrowleft\ j_1 \longrightarrow j_2 \longrightarrow \cdots \longrightarrow j_{z-1} \longrightarrow j_z ,$$

то преобразованные таким образом матрицы $\Lambda[\bar{J},\bar{J}]$ и $B[M,\bar{J}]$ будут согласованы с разбиением (18).

Как видно из построения последовательности (16), условия

$$\Delta^{\omega}_{\tau_s}(K)\neq 0\ ,\ \tau_s\leqslant K<\tau_{s+1}\ ;\quad \Lambda[J_{\tau_{s+1}},j_\omega]\neq 0$$

являются необходимыми и достаточными для перехода от элемента τ_s к элементу τ_{s+1} ($s\geqslant 1$). Поэтому для повышения точности вычислений в описанном процессе при построении последовательностей (16) и (17) можно придерживаться следующей тактики. Исходя из номера $j_\alpha\in J_\alpha$ такого, что в строке $\Lambda[j_\alpha,\bar{J}]$ хотя бы одна компонента отлична от нуля, номер j_ω выбирается из условия

$$|\Lambda[j_\alpha,j_\omega]| = \max_{j\in J_K,\ K>\alpha}|\Lambda[j_\alpha,j]|. \qquad (23)$$

Далее, для каждой из пар подпоследовательностей (19) при $s\geqslant 1$ в качестве τ_{s+1} выбирается наименьший из элементов $K>\tau_s$, для которых

$$|\Delta^{\omega}_{\tau_s}(K)| < \max_{j\in J_K}|\Lambda[j,j_\omega]| \qquad (24)$$

(напомним, что $\Delta^{\omega}_{\tau_s}(\tau_s)=\Lambda[j_s,j_\omega]\neq 0$). В качестве $j_{s+1}\in J_{\tau_{s+1}}$ в этом случае выбирается один из номеров, на котором достигается максимум в правой части соотношения (24) при $K=\tau_{s+1}$.

Для построения искомого разбиения $J_K\ (K\in\bar{P})$ множества $\bar{J}$, в котором $J_0=\{j_0\}$, осталось показать, что справедлива

ЛЕММА 2. Если разбиение $J_K\ (K\in\bar{P})$ множества $\bar{\bar{J}}$ является базисным относительно $A[M,\bar{J}]$ и матрица $A[M,\bar{J}\setminus\{j_0\}]$ неособенная ($j_0\in J_{K_0}$, $K_0<0$), то в строке $\Lambda[j_0,\bar{J}]$ хотя бы одна компонента отлична от нуля.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из базисности разбиения $J_K\ (K\in\bar{P})$ следует совместность системы линейных уравнений

$$A[M,\bar{J}\setminus J_0]\cdot g[\bar{J}\setminus J_0, J_0] = A[M, J_0],$$

а из неособенности матрицы $A[M,\bar{J}\setminus\{j_0\}]$ следует, что в решении этой системы компонента $g[j_0, J_0]$, имеющая, как показано в [I], при $K_0<0$ представление

$$g[j_0,J_0] = \Lambda[j_0,J_0] - \Lambda[j_0,\bar{J}\setminus J_0]\cdot g[\bar{J}\setminus J_0, J_0],$$

отлична от нуля. В силу блочной структуры матрицы $\Lambda[\bar{J},\bar{J}]$ последнее означает, что найдется такой номер $j_\omega \in J_\omega\ (K_0<\omega\leq 0)$, что $\Lambda[j_0, j_\omega]\neq 0$. Лемма доказана.

Таким образом, процесс построения искомого разбиения $\bar{J}_K$ $(K\in\bar{P})$ множества $\bar{J}$ начинается с разбиения $J_K\ (K\in\bar{P})$, в котором $J_0=\{j'\}$, а $j_0\in J_{K_0}$ и $K_0<0$. Полагая $\alpha=K_0$, $j_\alpha=j_0$ и выбирая $j_\omega\in J_\omega$ из условия (23), построим последовательности (I6) и (I7). Если $\tau_2=0$, то разбиение (I8) искомое. В противном случае процесс следует продолжить, исходя из разбиения (I8), в котором $j_0\in \bar{J}^{(1)}_{\tau_2}$ $(\tau_2\succ K_0)$, и матриц $\Lambda^{(1)}[\bar{J},\bar{J}]$ и $B^{(1)}[M,\bar{J}]$, согласованных с этим разбиением.

§ 4. Некоторые замечания

В этом параграфе рассматривается возможность некоторого повышения эффективности процесса перехода от матрицы $A[M,\bar{J}]$ к $A[M,\bar{J}\setminus\{j_0\}]$: сокращение максимальной длины цепи упорядоченного множества P, которое достигается за счет построения на каждом шаге в множестве P отношения порядка $\preccurlyeq_{\bar{J}}$, зависящего от $\bar{J}$.

Наряду с отношением (I) и отношением порядка $\preccurlyeq$ в множестве P, согласованным с блочной структурой матрицы $A[M,N]$, для каждой квадратной неособенной матрицы $A[M,\bar{J}]$, $\bar{J}\subset N$, рассмотрим симметричное бинарное отношение

$$R(\bar{J}) = \{[K,\tau]\in R : N_K\cap N_\tau\cap\bar{J}\neq\emptyset : K\neq\tau;\ K,\tau\in P\}.$$

Пусть

$$P_i,\ i\in S(\bar{J}) = \{1,2,\dots,s(\bar{J})\}\quad (s(\bar{J})\geq 1) \qquad (25)$$

– разбиение множества P, определяемое неориентированным графом (P, $R(\mathcal{J})$) с множествами P и $R(\mathcal{J})$ вершин и ребер соответственно и компонентами связности (P_i, $R_i(\mathcal{J})$), $i \in S(\mathcal{J})$. Если $s(\mathcal{J}) > 1$, это значит, что система линейных уравнений с матрицей $A[M,\mathcal{J}]$ – а тем самым и с матрицами $B[M,\mathcal{J}]$ и $\lambda[\mathcal{J},\mathcal{J}]$ – распадается на $s(\mathcal{J})$ независимых подсистем. В частности, если $A[M,\mathcal{J}]$ – единичная матрица, то

$$P_i = \{i\},\ i = 1, 2, \ldots, p;\ \Lambda[\mathcal{J},\mathcal{J}] = 0,\ B[M,\mathcal{J}] = A[M,\mathcal{J}].$$

В каждом из подмножеств P_i множества P введем отношение порядка $\preccurlyeq_i$, индуцированное порядком $\preccurlyeq$ в множестве P, и получившийся таким образом новый порядок в множестве P обозначим через $\preccurlyeq_{\mathcal{J}}$. На рис. 2 порядок $\preccurlyeq_{\mathcal{J}}$ в множестве P задается сплошными, а порядок $\preccurlyeq$ – пунктирными и сплошными стрелками.

Порядок $\preccurlyeq_{\mathcal{J}}$ в множестве P, очевидно, согласован с блочной структурой M_k, $N_k \cap \mathcal{J}$ $(k \in P)$ матрицы $A[M,\mathcal{J}]$, и, кроме того, разбиение $\mathcal{J}_k$ $(k \in P)$ множества $\mathcal{J}$, базисное относительно $A[M,\mathcal{J}]$ и порядка $\preccurlyeq_{\mathcal{J}}$, является базисным относительно порядка $\preccurlyeq$. Это значит, что при определении последовательности (16) можно (и естественно) поль-

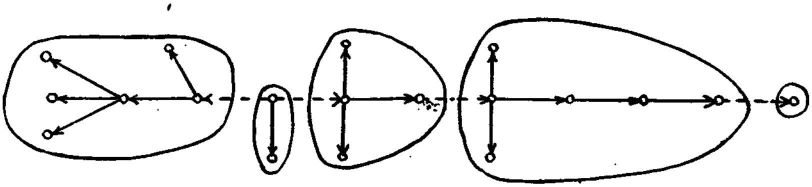

Рис. 2

зоваться порядком $\preccurlyeq_{\mathcal{J}}$ вместо $\preccurlyeq$, поскольку для любого $k \in P$

$$|L_{\mathcal{J}}(k)| \equiv |\{\tau \in P:\ k \preccurlyeq_{\mathcal{J}} \tau\}| \leq |L(k)|.$$

Перейдем теперь к построению порядка $\preccurlyeq_{\mathcal{J} \setminus \{j_0\}}$, согласованного с блочной структурой матрицы $A[M, \mathcal{J} \setminus \{j_0\}]$. Для этого достаточно построить разбиение множества P, определяемое графом (P, $R(\mathcal{J} \setminus \{j_0\})$), и ввести в множестве P порядок по правилу, описанному выше. Прежде всего построим

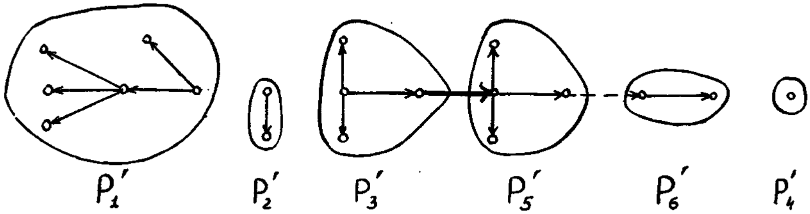

Рис. 3

разбиение P_i' , $i \in S(\mathcal{J} \setminus \{j_0\})$, множества P , определяемое подграфом (P , $R(\mathcal{J} \setminus \{j_0\})$), графа (P , $R(\mathcal{J})$). В этом разбиении каждое из множеств P_i' содержится в некотором множестве $P_{t(i)}$ разбиения (25), т.е. в результате удаления номера j_0 из множества $\mathcal{J}$ компоненты связности графа (P, $R(\mathcal{J})$) могут разве лишь "рассыпаться" (на рис. 2, 3 : $P_5 = P_5' \cup P_6'$). Полагая теперь

$$S' = \{ i \in S(\mathcal{J} \setminus \{j_0\}) : j' \in \bigcup_{k \in P_i'} N_k \},$$

построим разбиение

$$P_i', \ i \in S(\mathcal{J} \setminus \{j_0\}) \setminus S', \ \bigcup_{k \in S'} P_k'$$

множества P , определяемое графом (P, $R(\mathcal{J} \setminus \{j_0\})$). На рис. 3 : $S' = \{3, 5\}$.

Литература

1. Звягина Р.А. Об общем методе решения задач линейного программирования блочной структуры. Оптимизация, 1(18), (1971).
2. Звягина Р.А. О построении иерархических порядков при заданных условиях на сравнимость. Оптимизация, 1(18),(1971).
3. Фаддеев Д.К., Фаддеева В.Н. Вычислительные методы линейной алгебры. Физматгиз, М., 1960.

Поступила в редакцию
10.УШ. 1971 г.