УДК 512.25/26

ВЫЧИСЛЕНИЕ ПЕРВЫХ И ВТОРЫХ МАРГИНАЛЬНЫХ ЗНАЧЕНИЙ В ЗАДАЧАХ МАТЕМАТИЧЕСКОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ. I

В.Ф.Демьянов, А.Б.Певный

1°. Пусть

$$\varphi(t) = \max_{x\in\Omega(t)} f(x,t). \tag{1}$$

где $\Omega(t)$ – замкнутые множества из E_n, зависящие от параметра $t\in[0,\bar{t}]$. Задача (1) есть параметрическая задача математического программирования.

Производная $\varphi'(0)$, если она существует, называется первым маргинальным значением задачи (1). В [1] установлено существование $\varphi'(0)$ для случая, когда $f(x,t)$ вогнута по x, а множества $\Omega(t)$ выпуклы и заданы формулой (2). В настоящей работе рассматривается задача (1) без предположения о вогнутости f.

Пусть точка $x\in\Omega(0)$. Введем множество $\gamma(x) = \{v\in E_n : \exists t_0>0 : x+tv\in\Omega(t)$ при $0\le t\le t_0\}$. Замыкание $\gamma(x)$ обозначим $\Gamma(x)$ и назовем множеством допустимых направлений для семейства $\{\Omega(t)\}$ в точке $[x,0]$. В случае, когда $\Omega(t)$ не зависит от t, аналогичное множество рассмотрено в [2]. Множество $\Gamma(x)$ может оказаться пустым.

Ниже в лемме 1 рассматривается один частный случай.

ЛЕММА 1. Пусть $\Omega(t)$ имеет вид

$$\Omega(t) = \Omega\cap\{x : h_i(x,t)\le 0,\quad i=1,\dots,N\}, \tag{2}$$

где Ω – выпуклое замкнутое множество в E_n, не зависящее от t, а функции $h_i(x,t)$ непрерывно дифференцируемы по $[x,t]$. Пусть, кроме того, при $t=0$ функции $h_i(x,0)$ выпуклы по x и удовлетворяют условию Слейтера, т.е. существует $x_0 \in \Omega$ такое, что

$$h_i(x_0, 0) < 0, \quad i=1,\dots,N. \tag{3}$$

Тогда $\Gamma(x)$ непусто и имеет вид

$$\Gamma(x) = \Gamma(\Omega, x) \cap \{v : (h_{ix}(x,0), v) + h_{it}(x,0) \le 0, \ i \in Q(x)\}, \tag{4}$$

где $Q(x) = \{i : h_i(x,0) = 0\}$, а $\Gamma(\Omega,x)$ – конус допустимых направлений для множества Ω в точке x.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Введем множества

$$K = \Gamma(\Omega, x) \cap \{v : (h_{ix}, v) + h_{it} < 0, \ i \in Q(x)\};$$

$$K_1 = \Gamma(\Omega, x) \cap \{v : (h_{ix}, v) + h_{it} \le 0, \ i \in Q(x)\}.$$

(Здесь и в дальнейшем все производные берутся в точке $[x,0]$.)

В силу наложенных выше условий $\overline{K} = K_1$. При $Q(x) = \varnothing$ это соотношение очевидно. Пусть $Q(x) \ne \varnothing$. Ясно, что $\overline{K} \subset K_1$. Докажем обратное включение. Пусть $v \in K_1$. По условию (3) для $i \in Q(x)$

$$(h_{ix}(x,0), x_0 - x) \le h_i(x_0, 0) - h_i(x,0) < 0. \tag{5}$$

Поэтому

$$(h_{ix}, v + \varepsilon(x_0 - x)) + h_{it} < 0$$

при любом $\varepsilon > 0$. Пусть $\varepsilon_k \to 0$, $\varepsilon_k > 0$. Положим $v_k = v + \varepsilon_k(x_0 - x)$. Ясно, что $v_k \in K$, $v_k \to v$. Поэтому $v \in \overline{K}$. Включение $K_1 \subset \overline{K}$ доказано.

Пусть $v \in K$, тогда для $i \in Q(x)$

$$h_i(x + tv, t) = t[(h_{ix}, v) + h_{it}] + o(t) < 0$$

при малых t. Значит, $K \subset \gamma(x)$. Отсюда $K_1 = \overline{K} \subset \Gamma(x)$. Обратно, пусть $v \in \Gamma(x)$, тогда

$$v = \lim v_k, \quad v_k \in \gamma(x),$$

и поэтому $(h_{ix}, v_k) + h_{it} \le 0$ для $i \in Q(x)$. Отсюда $v \in K_1 = \overline{K}$, т. е. $\Gamma(x)\subset\bar{K}=K_1$. Лемма доказана.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ I. Будем говорить, что семейство $\{\Omega(t)\}$ допускает аппроксимацию первого порядка, если для любой сходящейся последовательности $\{x_k\}$ такой, что

$$x_k\in\Omega(t_k)\ ,\quad t_k\to+0, \tag{6}$$

справедливо представление

$$x_k=x+t_k v_k+o(t_k), \tag{7}$$

где $x\in\Omega(0)$, $v_k\in\Gamma(x)$, $t_k v_k\to 0$.

ЛЕММА 2. Если выполнены условия леммы I, то семейство $\{\Omega(t)\}$ допускает аппроксимацию первого порядка.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть выполнено (6). Представим x_k в виде $x_k=x+t_k v_k'$, $t_k v_k'\to 0$. Ясно, что $x\in\Omega(0)$, $v_k'\in\Gamma(\Omega,x)$. Для $i\in Q(x)$ имеем

$$0\geqslant h_i(x_k,t_k)=t_k[(h_{ix},v_k')+h_{it}]+o(t_k),$$
$$(h_{ix},v_k')+h_{it}\leqslant\varepsilon_k\ ,\ \varepsilon_k\to 0.$$

В силу (5) существует $v_0\in\Gamma(\Omega,x)$ такое, что $(h_{ix},v_0)\leqslant\leqslant-1$, $i\in Q(x)$. Положим теперь $v_k=v_k'+|\varepsilon_k|v_0$. Тогда (7) будет выполнено.

Перейдем к разысканию первого маргинального значения для задачи (I). В дальнейшем всюду будем предполагать, что точечно-множественное отображение $\Omega(t)$ непрерывно при $t=0$, все множества $\Omega(t)$ содержатся в некотором ограниченном множестве $\mathcal{D}$, а функция $f(x,t)$ непрерывна на $\mathcal{D}\times[0,\bar{t}]$. Эти условия обеспечивают непрерывность функции $\varphi(x)$ при $t=0$.

Введем множества

$$R(t)=\{x\in\Omega(t):\varphi(t)=f(x,t)\}.$$

Предположим теперь, что $f(x,t)$ непрерывно дифференцируема и выполнено условие: если $x_k=\bar{x}+t_k v_k+o(t_k)$, $t_k\to+0$, $\bar{x}\in R(0)$, $t_k v_k\to 0$, $v_k\in\Gamma(\bar{x})$, то справедливо соотношение

$$f(x_k,t_k)-f(\bar{x},0)\leqslant t_k[(f_x(\bar{x},0),v_k)+f_t(\bar{x},0)]+o(t_k).$$

Это условие выполнено, например, если функция $f(x,0)$ вогнута в окрестности точки $\bar{x}$.

ТЕОРЕМА I. Если при сделанных предположениях семейство $\{\Omega(t)\}$ допускает аппроксимацию первого порядка, то существует первое маргинальное значение и

$$\varphi'(0)=\sup_{x\in R(0)}\ \sup_{v\in\Gamma(x)}[(f_x(x,0),v)+f_t(x,0)]\ . \tag{8}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Фиксируем $x\in R(0)$ и $v\in\gamma(x)$. Тогда $x+tv\in\Omega(t)$ при малых t и

$$\varphi(t)\geqslant f(x+tv,t)=\varphi(0)+t[(f_x(x,0),v)+f_t(x,0)]+o(t),$$

$$\underline{\varphi'(0)}=\varliminf_{t\to+0}\frac{1}{t}[\varphi(t)-\varphi(0)]\geqslant(f_x(x,0),v)+f_t(x,0).$$

Если обозначить через A правую часть (8), то $\underline{\varphi'(0)}\geqslant A$. Положим

$$\overline{\varphi'(0)}=\varlimsup_{t\to+0}\frac{1}{t}[\varphi(t)-\varphi(0)]\ .$$

Выберем $\{x_k\}$ и $\{t_k\}$ так, чтобы

$$\frac{\varphi(t_k)-\varphi(0)}{t_k}\longrightarrow\overline{\varphi'(0)}\ ,\ x_k\in R(t_k),\ x_k\to x,\ t_k\to+0.$$

В силу (7) имеем $x_k=x+t_kv_k+o(t_k)$. Ясно, что $x\in R(0)$,

$$\varphi(t_k)-\varphi(0)=f(x_k,t_k)-f(x,0)=t_k[(f_x,v)+f_t]+o(t_k)\ .$$

Так как $v_k\in\Gamma(x)$, то

$$\overline{\varphi'(0)}\leqslant\sup_{v\in\Gamma(x)}[(f_x,v)+f_t]\leqslant A. \tag{9}$$

Теорема доказана.

ЛЕММА 3. Если выполнены условия леммы I, причём в (2) $\Omega=E_n$, то в формуле (8) значение $\varphi'(0)$ конечно и супремумы достигаются.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу (9) супремум по $x\in R(0)$ достигается. Для $x\in R(0)$ по необходимому условию максимума (см. [2]) существуют $\lambda_i\geqslant 0$ и $A_1\in E_n$ такие, что

$$-f_x(x,0)=A_1-\sum_{i\in Q(x)}\lambda_i h_{ix}(x,0),$$

причём $(A_1,v)\geqslant 0$ для всех $v\in\Gamma(\Omega,x)$. С учётом (4) для $v \in \Gamma(x)$ имеем

$$(f_x(x,0), v) = -(A_1, v) + \sum_{i \in Q(x)} \lambda_i (h_{ix}(x,0), v) \leq -\sum_{i \in Q(x)} \lambda_i h_{it}(x,0) < \infty.$$

Поэтому $\varphi'(0)$ конечно. В данном случае из конечности $\varphi'(0)$ следует, что супремум по $v \in \Gamma(x)$ достигается. Лемма доказана.

ПРИМЕР I. Пусть в задаче (I) $\Omega(t) = \{x : 0 \leq x \leq a(t)\}$ и при малых $t > 0$ максимум $f(x,t)$ по $x \in \Omega(t)$ достигается при $x = a(t)$, т.е. $R(t) = \{a(t)\}$. Тогда

$$\varphi(t) = f(a(t), t), \quad \varphi'(0) = f_x(a(0), 0)\, a'(0) + f_t(a(0), 0).$$

При $x = a(0)$ из (4) имеем $\Gamma(x) = \{v : v - a'(0) \leq 0\}$. По формуле (8) получаем

$$\varphi'(0) = \sup_{v \leq a'(0)} [f_x(a(0), 0)\, v + f_t(a(0), 0)].$$

В силу необходимого условия максимума $f_x(a(0),0) \geq 0$. Поэтому

$$\varphi'(0) = f_x(a(0), 0)\, a'(0) + f_t(a(0), 0),$$

что совпадает со значением, вычисленным непосредственно.

2^0. Пусть первое маргинальное значение $\varphi'(0)$ для задачи (I) существует и конечно. Предел

$$\varphi''(0) = \lim_{t \to +0} \frac{2}{t^2} [\varphi(t) - \varphi(0) - t\varphi'(0)],$$

если он существует, будем называть вторым маргинальным значением для задачи (I). Если $|\varphi''(0)| < \infty$, то справедливо разложение

$$\varphi(t) = \varphi(0) + \varphi'(0)\, t + \frac{1}{2} \varphi''(0)\, t^2 + o(t^2).$$

Фиксируем $x \in \Omega(0)$ и $v \in \Gamma(x)$. Введем множество $\gamma^2(x, v) = \{w : \exists t_0 > 0 : x + tv + t^2 w \in \Omega(t)$ при $0 \leq t \leq t_0$. Замыкание $\gamma^2(x, v)$ обозначим через $\Gamma^2(x, v)$ и назовем множеством допустимых направлений второго порядка для семейства $\Omega(t)$. В случае, когда $\Omega(t)$ не зависит от t, аналогичное множество было рассмотрено в [2]. Множество $\Gamma^2(x, v)$ может оказаться пустым.

ЛЕММА 4. Пусть $\Omega(t)$ имеет вид

$$\Omega(t) = \{x : h_i(x,t) \leq 0, \ i = 1, \dots, N\},$$

где функции $h_i(x,t)$ дважды непрерывно дифференцируемы по $[x,t]$ и при $t=0$ выпуклы по x и удовлетворяют условию Слейтера (3).

Тогда $\Gamma^2(x,v)$ непусто и имеет вид

$$\Gamma^2(x,v)=\{w: 2(h_{ix},w)+(h_{ixx}v,v)+2(h_{ixt},v)+h_{itt}\le 0,\ i\in Q_2(x,v)\},$$

где

$$Q_2(x,v)=\{i: h_i(x,0)=0,\ (h_{ix},v)+h_{it}=0\},$$

а все производные берутся в точке $[x,0]$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО такое же, как в лемме I, только для $i\in Q_2(x,v)$ используется разложение

$$h_i(x+tv+t^2w)=\frac{1}{2}t^2[2(h_{ix},w)+(h_{ixx}v,v)+2(h_{ixt},v)+h_{itt}]+o(t^2). \qquad (10)$$

Через T обозначим множество пар $[x,v]$, на которых достигается супремум в (8):

$$T=\{[x,v]: x\in R(0),\ v\in\Gamma(x),\ \varphi'(0)=(f_x(x,0),v)+f_t(x,0)\}.$$

По лемме 3 множество T непусто.

ТЕОРЕМА 2. Пусть выполнены условия леммы 4, множества $\Omega(t)$ ограничены в совокупности, функция $f(x,t)$ дважды непрерывно дифференцируема и для любого $x\in R(0)$ матрица $f_{xx}(x,0)$ отрицательно определена. Тогда существует второе маргинальное значение $\varphi''(0)$ и

$$\varphi''(0)=\sup_{[x,v]\in T}\ \sup_{w\in\Gamma^2(x,v)}[2(f_x,w)+(f_{xx}v,v)+2(f_{xt},v)+f_{tt}], \qquad (II)$$

где все производные берутся в точке $[x,0]$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Введем обозначение

$$\Phi(x,v,w)=2(f_x,w)+(f_{xx}v,v)+2(f_{xt},v)+f_{tt}.$$

Фиксируем $[x,v]\in T$ и $w\in\gamma^2(x,v)$. Тогда $x+tv+t^2w\in\Omega(t)$ при малых t. Поэтому

$$\varphi(t) \geq f(x+tv+t^2w,\, t) = \varphi(0) + t\varphi'(0) + \frac{t^2}{2}\Phi(x,v,w) + o(t^2),$$
$$\underline{\varphi''(0)} = \lim_{t\to+0}\frac{2}{t^2}[\varphi(t)-\varphi(0)-t\varphi'(0)] \geq \Phi(x,v,w).$$

Отсюда

$$\underline{\varphi''(0)} \geq \sup_{[x,v]\in T}\ \sup_{w\in\Gamma^2(x,v)} \Phi(x,v,w). \tag{I2}$$

Положим

$$\overline{\varphi''(0)} = \overline{\lim_{t\to+0}}\ \frac{2}{t^2}[\varphi(t)-\varphi(0)-t\varphi'(0)].$$

Выберем $\{x_k\}$ и $\{t_k\}$ так, чтобы $t_k \to +0$,

$$\overline{\varphi''(0)} = \lim_{k\to\infty}\frac{2}{t_k^2}[\varphi(t_k)-\varphi(0)-t_k\varphi'(0)],\ x_k\in R(t_k),\ x_k\to\bar{x}.$$

Ясно, что $\bar{x}\in R(0)$. По лемме 2 $x_k = \bar{x} + t_k v_k + o(t_k)$, где $v_k \in \Gamma(\bar{x})$, $t_k v_k \to 0$. В силу (8) $(f_x(\bar{x},0), v_k) + f_t(\bar{x},0) \leq \varphi'(0)$.

Кроме того,

$$\varphi(t_k) = \varphi(0) + t_k\varphi'(0) + o(t_k),$$
$$\varphi(t_k) = f(x_k, t_k) = \varphi(0) + t_k[(f_x, v_k) + f_t] + o(t_k).$$

Отсюда

$$(f_x, v_k) + f_t \to \varphi'(0) \quad \text{при } k\to\infty . \tag{I3}$$

Докажем, что $\{v_k\}$ ограничена. Имеем

$$\varphi(t_k) \leq \varphi(0) + t_k\varphi'(0) + \frac{1}{2}t_k^2[(f_{xx}v_k, v_k) + (f_{xt}, v_k) + f_{tt}] + o(t_k^2) \leq$$
$$\leq \varphi(0) + t_k\varphi'(0) + \frac{1}{2}t_k^2[-m\|v_k\|^2 + (f_{xt}, v_k) + f_{tt}] + o(t_k^2), \tag{I4}$$

где $m>0$ в силу отрицательной определенности матрицы $f_{xx}(\bar{x},0)$. Возьмем произвольные $[x_0, v_0]\in T$ и $w_0 \in \gamma^2(x_0,v_0)$.
Тогда

$$f(x_0 + tv_0 + t^2w_0,\, t) = \varphi(0) + t\varphi'(0) + \frac{1}{2}t^2\Phi(x_0, v_0, w_0) + o(t^2) \tag{I5}$$

Если предположить, что $\{v_k\}$ не ограничена, то найдутся t_k такие, что $f(x_0 + t_k v_0 + t_k^2 w_0,\, t_k) > \varphi(t_k)$, что противоречит (I). Итак, $\{v_k\}$ ограничена. Выделим сходящуюся подпоследовательность. Можно считать, что $v_k \to \bar{v}$, $\bar{v}\in\Gamma(\bar{x})$, $[\bar{x},\bar{v}]\in T$ в силу (I3). Представим теперь x_k в виде

$$x_k = \bar{x} + t_k\bar{v} + o(t_k) = \bar{x} + t_k\bar{v} + t_k^2 w_k',\quad t_k^2 w_k' \to 0.$$

Используя разложение (I0), для $i\in Q_2(\bar{x},\bar{v})$ имеем

$$2(h_{ix}, w_k') + (h_{ixx}, \bar v, \bar v) + 2(h_{ixt}, \bar v) + h_{itt} \le \varepsilon_k, \ \varepsilon_k \to 0.$$

В силу условия Слейтера существует v_0 такое, что $(h_{ix}, v_0) \le -1$, $i \in Q(\bar x)$. Положим теперь $w_k = w_k' + |\varepsilon_k| v_0$. По лемме 4 $w_k \in \Gamma^2(\bar x, \bar v)$. Окончательно имеем

$$\varphi(t_k) = f(x_k, t_k) = \varphi(0) + t_k \varphi'(0) + \frac{1}{2} t_k^2 \Phi(\bar x, \bar v, \bar w_k) + o(t_k^2).$$

$$\overline{\varphi''(0)} \le \sup_{[x,v]\in T} \ \sup_{w\in \Gamma^2(x,v)} \Phi(x, v, w), \qquad (16)$$

где $$x_k = \bar x + t_k \bar v + t_k^2 w_k + o(t_k^2).$$

Из (12) и (16) следует утверждение теоремы.

ЗАМЕЧАНИЯ. 1. Если $\Omega(t) \equiv \Omega$ не зависит от t, то множество T непусто и имеет вид

$$T = \{[x, v] : x \in R(0),\ \varphi'(0) = f_t(x, 0),\ v \in \Gamma(x),\ (f_x(x,0), v) = 0\} \qquad (17)$$

где $\Gamma(x)$ – обычный конус допустимых направлений для Ω.
2. Если $\Omega(t) \equiv \Omega$ и Ω задано линейными неравенствами, то $\Gamma^2(x,v)$ совпадает с $\Gamma(x)$ и для $x \in R(0)$ в силу необходимого условия максимума

$$\sup_{w\in\Gamma^2(x,v)} (f_x(x,0), w) = 0 .$$

Поэтому формула (11) принимает вид

$$\varphi''(0) = \sup_{[x,v]\in T} [(f_{xx} v, v) + 2(f_{xt}, v) + f_{tt}], \qquad (18)$$

где T задается равенством (17). Формула (18) была получена в [5].

ПРИМЕР 2. В условиях примера 1 непосредственное дифференцирование $\varphi(t)$ дает

$$\varphi''(0) = f_x a''(0) + f_{xx} [a'(0)]^2 + 2 f_{xt} a'(0) + f_{tt}, \qquad (19)$$

где все производные берутся в точке $[a(0), 0]$. Используем формулу (14). Множество T состоит из одной точки $[x, v] = [a(0), a'(0)]$. Для этой точки по лемме 4

$$\Gamma^2(x, v) = \{ w : \ 2w - a''(0) \le 0 \}.$$

По формуле (11) имеем

$$\varphi''(0) = \sup_{2w \le a''(0)} [2 f_x w + f_{xx} v^2 + 2 f_{xt} v + f_{tt}] \Big|_{v = a'(0)}$$

В силу необходимого условия максимума $f_x(a(0),0) \geq 0$. Поэтому

$$\varphi''(0) = f_x a''(0) + f_{xx}[a'(0)]^2 + 2f_{xt}a'(0) + f_{tt},$$

что совпадает с (19).

Примеры 1 и 2 показывают, что в формулах (8) и (11) все слагаемые существенны, т.е. формулы (8) и (11) нельзя упростить путем отбрасывания некоторых слагаемых. Если это сделать, то формула станет давать неверные результаты. В формуле (11) все слагаемые существенны даже в случае, когда $\Omega(t)$ не зависит от t, что можно показать на соответствующих примерах.

ЗАКЛЮЧИТЕЛЬНЫЕ ЗАМЕЧАНИЯ. 1. Изложенный выше метод позволяет получать не только первое и второе маргинальные значения, но и маргинальные значения более высокого порядка.

2. Результаты переносятся и на бесконечномерный случай, причём структура доказательств не меняется.

3. Полученные выше результаты могут быть применены для решения задачи минимизации функции вида

$$\varphi(y) = \max_{x \in \Omega(y)} f(x,y)$$

на множестве $G \subset E_m$. По формулам (8) и (11) можно находить производные функции $\varphi(y)$ первого и второго порядков по направлениям, и с их помощью строить методы последовательных приближений. Так, если $\Omega(y)$ задано с помощью неравенств

$$\Omega(y) = \{x \in E_n : h_i(x,y) \leq 0, \; i = 1,\dots,N\},$$

то первая производная $\varphi(y)$ по направлению $g \in E_m$, $\|g\| = 1$, имеет вид

$$\frac{\partial \varphi(y)}{\partial g} = \sup_{x \in R(y)} \; \sup_{v \in \Gamma(x,g)} [(f_x(x,y),v) + (f_y(x,y),g)],$$

где

$$\Gamma(x,g) = \{v \in E_n : (h_{ix}(x,y),v) + (h_{ig}(x,y),g) \leq 0, \; i \in Q(y)\}.$$

Литература

1. Гольштейн Е.Г. Выпуклое программирование. (Элементы теории), М., Наука, 1971.

2. Дубовицкий А.Я., Милютин А.А. Задачи на экстремум при наличии ограничений. Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 5 : 3 (1965), 395-453.

3. Демьянов В.Ф., Малоземов В.Н. К теории нелинейных минимаксных задач, УМН, 26 : 3 (1971), 54-104.

4. Пшеничный Б.Н. Необходимые условия экстремума, М., Наука, 1969.

5. Демьянов В.Ф. К задаче о минимаксе, ДАН СССР, 187 : 2 (1969), 255-258.

Поступила в редакцию
30.XI. 1971 г.