1972 г. ОПТИМИЗАЦИЯ Выпуск 5(22)

УДК 512.25/26

МЕТОД ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОГО УЛУЧШЕНИЯ ДЛЯ ВЫПУКЛЫХ ЗАДАЧ С ЛИНЕЙНЫМИ ОГРАНИЧЕНИЯМИ

В.А.Булавский, М.А.Яковлева

В этой работе излагается метод решения задач выпуклого программирования с линейными ограничениями, в известном смысле обобщающий метод последовательного улучшения допустимого решения [I, 2], применяемый в линейном программировании. Используемый в статье подход является модификацией разработанной ранее с участием одного из авторов идеи [3] о непрерывном изменении допустимого решения таким образом, что оно все время является точкой оптимума функции цели на некотором специально выбираемом аффинном многообразии. Следует отметить, что трудоемкость метода существенно зависит от размерности подпространства, на котором функция цели нелинейна. На это обстоятельство было обращено внимание в связи с другим методом [4].

§ I. Класс решаемых задач

Пусть заданы m -мерные вещественные столбцы P и A_j, $j=1,2,\ldots,n$, и вогнутая функция f, определенная в арифметическом пространстве R^n. Мы предположим, что функция f дважды непрерывно дифференцируема, причем для первых и вторых ее частных производных в точке x примем соответственно обозначения: $f_i(x)$ и $f_{ij}(x)$, $i,j=1,2,\ldots,n$.

Рассмотрим следующую задачу выпуклого программирования. Требуется найти вектор

$$x = (x_1, x_2, \ldots, x_n), \quad x_j \geq 0, \ j = 1, 2, \ldots, n, \tag{I}$$

удовлетворяющий системе уравнений

$$\sum_{j=1}^{n} x_j A_j = P \tag{2}$$

и доставляющий максимум величине $f(x)$. Как обычно, при выполнении условий (I) и (2) вектор x мы будем называть допустимым решением, а искомый – оптимальным.

В силу вогнутости функции f для любого $x \in R^n$ и любого направления $s = (s_1, s_2, \ldots, s_n)$ выполняется неравенство:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial s^2}(x) \equiv \sum_{i,j=1}^{n} f_{ij}(x) s_i s_j \leq 0. \tag{3}$$

Всюду в статье мы будем дополнительно предполагать, что выполнено следующее условие.

ж) Если для данного направления s, удовлетворяющего равенству $\sum_{j=1}^{n} s_j A_j = 0$, при некотором $x \in R^n$ в (3) достигается равенство, то и при любом другом x и при том же s в (3) имеет место знак равенства.

При выполнении условия ж) из равенства $\frac{\partial^2 f}{\partial s^2}(x) = 0$ следует, что $\frac{\partial f}{\partial s}(x)$ не зависит от x Заметим, что при выполнении условия ж) для всех s из R^n существует разложение R^n в прямую сумму таких подпространств $\mathcal{L}$ и M, что функция f линейна на $\mathcal{L}$, строго вогнута на M и $f(x'+x'') = f(x') + f(x'')$ при $x' \in \mathcal{L}$, $x'' \in M$. Помимо квадратичной и строго вогнутой функции этим свойством обладает, например, функция вида

$$f(x) = -\sum_{K} \exp\left[\sum_{j=1}^{n} c_{kj} x_j + d_k\right],$$

где c_{kj}, d_k – произвольные вещественные числа.

ТЕОРЕМА I. *При выполнении условия ж) для существования оптимального решения необходимо и достаточно существование допустимого решения и отсутствие допустимого луча (состоящего из допустимых решений), на котором* функция f строго возрастает.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Необходимость. Пусть x^0 – оптимальное решение и пусть для некоторых x и $s \neq 0$ луч $\{x+\lambda s : \lambda \in [0, +\infty)\}$ является допустимым, причем функция f на этом луче возрастает. Положим при $\lambda \in (0, +\infty)$

$$x^\lambda = \frac{\lambda}{1+\lambda} x^0 + \frac{1}{1+\lambda}(x+\lambda s) = \frac{\lambda}{1+\lambda}(x^0+s) + \frac{1}{1+\lambda} x .$$

В силу вогнутости функции f имеем:

$$f(x^\lambda) \geqslant \frac{\lambda}{1+\lambda} f(x^0) + \frac{1}{1+\lambda} f(x+\lambda s) > \frac{\lambda}{1+\lambda} f(x^0) + \frac{1}{1+\lambda} f(x).$$

Но $\lim\limits_{\lambda \to +\infty} x^\lambda = x^0 + s$, так что в пределе получим:

$$f(x^0+s) \geqslant f(x^0). \tag{4}$$

Поскольку луч $\{x^0+\lambda s : \lambda \in [0, +\infty)\}$ состоит из допустимых решений, то $f(x^0+\lambda s) \leqslant f(x^0)$ при $\lambda \in [0, +\infty)$. В силу (4) и вогнутости функция f постоянна на отрезке $\{x^0+\lambda s : \lambda \in [0, 1]\}$, а в силу условия ж) и ограниченности f сверху на допустимых решениях она постоянна и на параллельном луче $\{x+\lambda s : \lambda \in [0, +\infty)\}$, что противоречит ранее сделанному предположению о возрастании f на этом луче.

Достаточность. Нормируем пространство R^n. Пусть $\{x^k\}$ – максимизирующая последовательность, то есть такая последовательность допустимых решений, что $\{f(x^k)\}$ монотонно стремится к супремуму функции f на множестве неотрицательных решений системы (2). Если последовательность $\{x^k\}$ не ограничена, то, не умаляя общности, можно считать, что $\lim \|x^k\| = +\infty$ и что существует $\lim x^k/\|x^k\| = s$. Предельное направление $s = (s_1, s_2, \ldots, s_n)$ неотрицательно, отлично от нуля и является при этом решением однородной системы:

$$\sum_{j=1}^{n} s_j A_j = 0. \tag{5}$$

Для всех $k = 1, 2, \ldots$ положим $\lambda_k = \min\{x_j^k/s_j : s_j > 0\}$ и $z^k = x^k - \lambda_k s$. В силу (5) и выбора чисел λ_k векторы z^k являются допустимыми решениями, причем, начиная с некоторого k, z^k имеет больше нулевых компонент, чем x^k.

Пусть теперь x – допустимое решение и $\lambda \geqslant 0$. В силу вогнутости функции f при достаточно больших k имеем:

$$f\left(\left(1-\frac{\lambda}{\|x^k\|}\right)x + \frac{\lambda}{\|x^k\|} x^k\right) \geqslant \left(1-\frac{\lambda}{\|x^k\|}\right)f(x) + \frac{\lambda}{\|x^k\|} f(x^k).$$

Учитывая, что $\lim f(x^k) \geq f(x)$, в пределе получим:

$$f(x+\lambda s) \geq f(x).$$

Таким образом, функция f ограничена снизу на луче $\{x+\lambda s : \lambda \geq 0\}$ и в силу вогнутости не убывает на нем. С другой стороны, по условию теоремы функция f не может строго возрастать вдоль всего луча, и ввиду условия ж) она на этом луче постоянна. Если теперь в качестве x взять x^k, то получим, что $f(\bar{x}^k)=f(x^k)$, $k=1,2,\dots$. Мы построили, таким образом, новую максимизирующую последовательность $\{\bar{x}^k\}$, каждый член которой имеет больше нулевых компонент, чем соответствующий член последовательности $\{x^k\}$. Повторив описанное построение нужное число раз, заведомо конечное, получим ограниченную максимизирующую последовательность. Можно считать, что такой была уже последовательность $\{x^k\}$, и что x^0 – ее предельная точка. Так как x^0 – допустимое решение и $f(x^0)=\lim f(x^k)$, то x^0 является оптимальным решением. Теорема доказана.

Пусть задано некоторое аффинное многообразие V решений системы (2) и пусть H – гиперплоскость в V, вдоль которой функция f строго вогнута. Ввиду условия ж) вторая производная по любому направлению, параллельному H, строго отрицательна. Выберем базис $\{s^\tau : \tau \in T\}$ в параллельном многообразию H подпространстве и выберем направление s так, чтобы $V=\bigcup_{\varepsilon\in(-\infty,+\infty)}(H+\varepsilon s)$. Отметим, что как s, так и s^τ, $\tau\in T$, являются решениями системы (5).

ТЕОРЕМА 2. Если $x\in H$ (единственная) точка максимума функции f на H, то при любом $\varepsilon\in(-\infty,+\infty)$ функция f на многообразии $H+\varepsilon s$ достигает максимума в единственной точке $x(\varepsilon)$. При этом функция $x(\cdot)$ непрерывно дифференцируема.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Единственность $x(\varepsilon)$ следует из строгой вогнутости f на H и свойства ж). Докажем существование $x(\varepsilon)$. Нормируем пространство R^n. Для того, чтобы $x(\varepsilon)\in H+\varepsilon s$ доставлял на $H+\varepsilon s$ максимум функции f, необходимо и достаточно, чтобы

$$\sum_{j=1}^{n} f_j(x(\varepsilon))s_j^k = 0, \quad k\in T. \qquad (6)$$

Рассмотрим систему относительно вещественных переменных ε и z_τ, $\tau \in T$:

$$\varphi_\kappa(\varepsilon, z) \equiv \sum_{j=1}^{n} f_j(x+\varepsilon s + \sum_{\tau \in T} z_\tau s^\tau) s_j^\kappa = 0 , \quad \kappa \in T.$$

Левые части уравнений этой системы непрерывно дифференцируемы по ε и z и обращаются в ноль при $\varepsilon = 0$, $z_\tau = 0$, $\tau \in T$. Якобиан системы функций φ_κ, $\kappa \in T$, по системе переменных z_τ, $\tau \in T$, отличен от нуля при любых ε и z_τ, $\tau \in T$, в силу строгой вогнутости функции f вдоль многообразий, параллельных H, и свойства ж). Поэтому для некоторых $a > 0$, $b > 0$ на промежутке $(-b, a)$ существует система функций c_τ, $\tau \in T$, такая, что вектор

$$x(\varepsilon) = x + \varepsilon s + \sum_{\tau \in T} c_\tau(\varepsilon) s^\tau \tag{7}$$

удовлетворяет равенствам (6). При этом функции c_τ непрерывно дифференцируемы и $c_\tau(0) = 0$, $\tau \in T$. Будем считать, что a и b выбраны наибольшими из возможных (что допустимо, так как в силу единственности c_τ при расширении области определения новая система функций является продолжением исходной). Мы должны показать, что $a = b = +\infty$.

Заметим, что если a конечно и функции c_τ ограничены на $[0, a)$, то предельная точка $c_\tau(a)$, $\tau \in T$, набора функций c_τ, $\tau \in T$, порождает вектор $x(a) = x + as + \sum_{\tau \in T} c_\tau(a) s^\tau$, удовлетворяющий равенствам (6) (при $\varepsilon = a$). В силу единственности такого вектора функции c_τ в точке a имеют конечные пределы. Так как при этом в точке $x(a)$ функция f достигает максимума на многообразии $H + as$, то границу a можно было бы увеличить.

Предположим теперь, что a конечно, а набор функций c_τ, $\tau \in T$, не ограничен на $[0, a)$. Тогда существует последовательность $\{\varepsilon_p\}$ такая, что $\varepsilon_p \in [0, a)$, $\lim \varepsilon_p = a$, $\lim \|x(\varepsilon_p)\| = +\infty$ и $\lim x(\varepsilon_p)/\|x(\varepsilon_p)\| = v$. При этом согласно (7) направление v параллельно многообразию H, причем $\|v\| = 1$. Отметим также, что при всех $\varepsilon \in [0, a)$

$$f(x(\varepsilon)) \geqslant f(x + \varepsilon s) \geqslant \min\{ f(x + \varepsilon s) : \varepsilon \in [0, a] \} = \gamma .$$

Положим

$$u_p = \left(1 - \frac{1}{\|x(\varepsilon_p)\|}\right) x + \frac{1}{\|x(\varepsilon_p)\|} x(\varepsilon_p).$$

Тогда $\lim u_p = x+v$. С другой стороны, при достаточно больших p

$$f(u_p) \geq \left(1-\frac{1}{\|x(\varepsilon_p)\|}\right)f(x)+\frac{1}{\|x(\varepsilon_p)\|}f(x(\varepsilon_p)) \geq \left(1-\frac{1}{\|x(\varepsilon_p)\|}\right)f(x)+\frac{\gamma}{\|x(\varepsilon_p)\|},$$

и в пределе получим, что $f(x+v) \geq f(x)$. Но это противоречит единственности максимума функции f на H, так как $x+v\in H$. Полученное противоречие показывает, что $a=+\infty$. Равенство $b=+\infty$ получается заменой S на $-S$. Теорема доказана.

Продифференцировав (6) по ε с учетом (7), для определения производных c'_τ получим систему

$$\sum_{\tau\in T}\left(\sum_{i,j=1}^{n} f_{ij}(x(\varepsilon))s_i^\tau s_j^\kappa\right)c'_\tau(\varepsilon) = -\sum_{i,j=1}^{n} f_{ij}(x(\varepsilon))s_j^\kappa s_i, \quad \kappa\in T, \tag{8}$$

с ненулевым определителем. Систему функций c_τ, $\tau\in T$, можно получить, интегрируя систему (8) при начальных данных $c_\tau(0)=0$, $\tau\in T$.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Если $x\in H$ и, вообще говоря, не является точкой максимума функции f на H, то теорему 2 можно применить к функции g, задаваемой равенством:

$$g(z)=f(z)-f'(x)(z-x), \quad z\in R^n.$$

Здесь через $f'(x)$ обозначена производная функции f в точке x. Мы снова получим векторнозначную функцию (7) и систему (8). Как нетрудно убедиться, векторы $x(\varepsilon)$ при этом удовлетворяют соотношениям:

$$\sum_{j=1}^{n} f_j(x(\varepsilon))s_j^\kappa = \sum_{j=1}^{n} f_j(x)s_j^\kappa = const, \quad \kappa\in T. \tag{6'}$$

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Продифференцировав (7), с учетом (6) получим:

$$\frac{d}{d\varepsilon}f(x(\varepsilon)) = \sum_{j=1}^{n} f_j(x(\varepsilon))s_j.$$

Предположим, что в начальной точке $\sum_{j=1}^{n} f_j(x)s_j>0$. Это, в частности, означает, что x не является точкой максимума на V функции f, и потому f имеет в V не более одной точки максимума. Кроме того, при каждом $\varepsilon\in[0,+\infty)$ найдется такое число $\lambda(\varepsilon)$, что

$$\sum_{j=1}^{n} f_j(x(\varepsilon))s_j = (1-\lambda(\varepsilon))\sum_{j=1}^{n} f_j(x)s_j. \tag{9}$$

Ввиду (6) и для любого другого направления s, параллельного многообразию V (и, следовательно, линейно выражающегося через s^{τ}, $\tau \in T$, и s),

$$\sum_{j=1}^{n} f_j(x(\varepsilon))\bar{s}_j = (1-\lambda(\varepsilon))\sum_{j=1}^{n} f_j(x)\bar{s}_j$$

Заметим, что по теореме 2 и ввиду непрерывности вторых производных функции f функция λ непрерывно дифференцируема по ε

Могут встретиться два случая. Либо при некотором $\varepsilon_0 \in (0,+\infty)$ точка $x(\varepsilon_0)$ доставляет максимум функции f на V, и тогда $\lambda(\varepsilon_0)=1$, либо такого ε_0 не найдется. Во втором случае мы положим $\varepsilon_0=+\infty$. Поскольку $\lambda(0)=0$ и λ непрерывно зависит от ε, то $\lambda(\varepsilon)<1$ при $\varepsilon \in [0,\varepsilon_0)$. Таким образом, величина $f(x(\varepsilon))$ возрастает на $[0,\varepsilon_0)$. Продифференцировав (9) по ε, получим:

$$\sum_{k\in T}\Big(\sum_{i,j=1}^{n} f_{ij}(x(\varepsilon))s_j s_i^k\Big)c_k'(\varepsilon) + \sum_{i,j=1}^{n} f_{ij}(x(\varepsilon))s_j s_i = -\Big[\sum_{j=1}^{n} f_j(x)s_j\Big]\cdot\lambda'(\varepsilon).$$

Умножив равенства (8) на соответствующие $c_k'(\varepsilon)$ и добавив к последнему равенству, найдем, что

$$\frac{\partial^2 f}{\partial \ell_\varepsilon^2}(x(\varepsilon)) = -\lambda'(\varepsilon)\sum_{j=1}^{n} f_j(x)s_j\,; \tag{10}$$

где для краткости положено $\ell_\varepsilon = s + \sum_{k\in T} c_k'(\varepsilon)s^k$. Из (10) видно, что $\lambda(\varepsilon)$ не убывает при возрастании ε. Если функция f строго вогнута на V, то ввиду условия ж) левая часть (10) строго отрицательна, и λ строго возрастает на $(-\infty,+\infty)$. Если же по некоторому направлению $\bar{s}=s+\sum_{\tau\in T}\gamma_\tau s^\tau$ функция f линейна, то нетрудно видеть, что в (8) можно положить $c_\tau'(\varepsilon)=\gamma_\tau$, $\tau\in T$. Таким образом, в этом случае $x(\varepsilon)=x+\varepsilon\bar{s}$, $\lambda(\varepsilon)=0$ при $\varepsilon\in(-\infty,+\infty)$.

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Пусть функция f строго вогнута вдоль многообразия V и $\{\bar{s}^\tau, \tau\in\bar{T}\}$ – базис параллельного многообразию V подпространства. Пусть также $x\in V$ не является точкой максимума функции f на V. Обозначим через H аффинное многообразие, состоящее из векторов $x+\sum_{\tau\in\bar{T}}\alpha_\tau\bar{s}^\tau$, где коэффициенты α_τ удовлетворяют равенству:

$$\sum_{\tau\in T}\alpha_\tau\Big(\sum_{j=1}^{n} f_j(x)\,\bar s_j^{\tau}\Big)=0 .$$

Поскольку не все коэффициенты при α_τ равны нулю, то размерность H на единицу меньше размерности V. Кроме того, в точке x функция f достигает максимума на H. Определим $x(\varepsilon)$ согласно теореме 2, и пусть ε_0 и $\lambda(\varepsilon)$ выбраны как в замечании 2. Ввиду строгой монотонности функции λ мы можем вместо переменной ε ввести переменную $\lambda=\lambda(\varepsilon)$, обозначив $\bar x(\lambda(\varepsilon))=x(\varepsilon)$. Вектор $\bar x(\lambda)$ можно выразить через базис $\{\bar s^{\tau},\ \tau\in\overline{T}\}$:

$$\bar x(\lambda)=x+\sum_{\tau\in T}\bar c_\tau(\lambda)\,\bar s^{\tau} .$$

Поскольку $\bar c_\tau$ линейно выражаются через c_τ, а функция λ непрерывно дифференцируема, причем $\lambda'(\varepsilon)>0$ при $\varepsilon\in(-\infty,+\infty)$, то функции $\bar c_\tau$ непрерывно дифференцируемы по λ. Кроме того,

$$\sum_{j=1}^{n} f_j(\bar x(\lambda))\,\bar s_j^{\kappa}=(1-\lambda)\sum_{j=1}^{n} f_j(x)\,\bar s_j^{\kappa},\quad \kappa\in\overline{T}.$$

Продифференцировав эти равенства по λ, получим:

$$\sum_{\tau\in T}\Big(\sum_{i,j=1}^{n} f_{ij}(\bar x(\lambda))\,\bar s_j^{\kappa}\,\bar s_i^{\tau}\Big)\bar c_\tau'(\lambda)=-\sum_{j=1}^{n} f_j(x)\,\bar s_j^{\kappa},\quad \kappa\in\overline{T}. \qquad (11)$$

Отметим, что матрица коэффициентов при $\bar c_\tau'$ неособенная и что для получения максимума функции f на V нужно систему (11) проинтегрировать на промежутке $[0,1]$ при начальных данных $\bar c_\tau(0)=0$, $\tau\in\overline{T}$. Если функция f не достигает максимума на V, то при интегрировании решение уйдёт на бесконечность при $\lambda\to\lambda_0=\lim\limits_{\varepsilon\to+\infty}\lambda(\varepsilon)$. Отметим, что при этом $\lambda_0\le 1$.

§ 2. Метод однопараметрического интегрирования

Излагаемый ниже метод решения начинается с нахождения множества $J_0\subset\{1,2,\dots,n\}$, для которого семейство столбцов $\{A_j: j\in J_0\}$ является базисом арифметического пространства R^m, а решение системы (2) при дополнительных условиях $x_j=0$, $j\bar\in J_0$, неотрицательно. При линейной зависимости уравнений системы (2) такого множества J_0 подобрать, конечно, не удастся. Однако в этом случае можно добавить в систему (2) неотрицательные неизвестные так, что уравнения станут линейно независимыми, а добавленные неизвестные равны нулю на любом допустимом решении. К этому приводит некоторая модификация стандартного поиска начального базиса в методе последовательного улучшения допустимого решения [5]. Поэтому мы будем в дальнейшем считать, что система (2) имеет ранг m и что упомянутое множество $\mathcal{J}_0$ найти удалось. Для удобства дальнейшего изложения введем два определения.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ I. Множество $\mathcal{J} \subset \{1,2,\dots,n\}$ будем называть базисным для рассматриваемой задачи на максимум, если семейство столбцов $\{A_j : j \in \mathcal{J}\}$ имеет ранг m, а функция f строго вогнута по направлениям s, удовлетворяющим условиям:

$$\sum_{j=1}^{n} s_j A_j = 0, \qquad s_j = 0, \quad j \bar{\in} \mathcal{J}. \tag{12}$$

Если функция f линейная, то множество $\mathcal{J}$ будет базисным в том и только в том случае, если семейство $\{A_j : j \in \mathcal{J}\}$ является базисом R^m. В более общем случае, когда функция f линейна по направлениям из $(n-r)$-мерного подпространства, число элементов базисного множества, очевидно, не может превзойти $m+r$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Базисное множество $\mathcal{J}$ будем называть допустимым, если функция f достигает максимума (в единственной точке) на множестве решений системы

$$\sum_{j=1}^{n} x_j A_j = P, \quad x_j = 0, \quad j \bar{\in} \mathcal{J}, \tag{13}$$

причем компоненты вектора, на котором достигается максимум, неотрицательны. Этот вектор будем называть $\mathcal{J}$-оптимальным.

Легко проверяется следующая

ТЕОРЕМА 3. Если существует оптимальное решение, то можно найти такое допустимое базисное множество $\mathcal{J}^*$, что $\mathcal{J}^*$-оптимальный вектор является оптимальным.

Отметим, что упомянутое выше исходное множество $\mathcal{J}_0$ является допустимым базисным множеством. Мы построим последовательность допустимых базисных множеств $\{\mathcal{J}_\sigma\}$ и последовательность $\mathcal{J}_\sigma$-оптимальных векторов $\{x^\sigma\}$ таким образом, чтобы последовательность $\{f(x^\sigma)\}$ возрастала. Поскольку допустимых базисных множеств конечное число, а x^σ однозначно определяется множеством $\mathcal{J}_\sigma$, то последовательности $\{\mathcal{J}_\sigma\}$ и $\{x^\sigma\}$ конечные. При этом мы предполагаем, что выполнено следующее условие невырожденности.

жж) Для любого допустимого решения x ранг семейства столбцов $\{A_j : x_j > 0\}$ равен m.

При нарушении этого условия так же, как и в линейном программировании, мы не сможем гарантировать строгого возрастания последовательности $\{f(x^\sigma)\}$.

Пусть имеется базисное допустимое множество $\mathcal{J}_\sigma$ и $\mathcal{J}_\sigma$-оптимальный вектор x^σ. Ввиду базисности множества $\mathcal{J}_\sigma$ и $\mathcal{J}_\sigma$-оптимальности вектора x^σ найдется и при том единственная строка y, удовлетворяющая равенствам

$$yA_j = f_j(x^\sigma), \quad j \in \mathcal{J}_\sigma .$$

Если для этого y выполнены неравенства $yA_j \geqslant f_j(x^\sigma)$, $j = 1, 2, \ldots, n$, то вектор x^σ оптимальный. В противном случае найдется номер $j' \in \{1, 2, \ldots, n\} \setminus \mathcal{J}_\sigma$, для которого $yA_{j'} < f_{j'}(x^\sigma)$.

Переход от $\mathcal{J}_\sigma$ к $\mathcal{J}_{\sigma+1}$ осуществляется за один основной и, возможно, несколько дополнительных шагов, на протяжении которых растет значение j'-ой компоненты допустимого решения. К началу каждого из этих шагов предполагается заданным некоторое базисное множество $\mathcal{J}$ и допустимое решение x, у которого $x_j = 0$ при $j \bar{\in} \mathcal{J}$. Кроме того, мы будем считать, что имеется фундаментальная совокупность решений системы (12).

Опишем основной шаг. Положим $\mathcal{J} = \mathcal{J}_\sigma$, $x = x^\sigma$, и пусть $\{s^\tau : \tau \in T\}$—базис пространства решений системы (12). Выберем в качестве направления s некоторое решение следующей системы:

$$\sum_{j=1}^{n} s_j A_j = 0, \quad s_{j'} > 0, \quad s_j = 0, \quad j \bar{\in} \mathcal{J} \cup \{j'\}.$$

Заметим, что $\sum_{j=1}^{n} f_j(x) s_j = f_{j'}(x) s_{j'} + \sum_{j \in \mathcal{J}} f_j(x) s_j > s_{j'} y A_{j'} + {}$ $+ \sum_{j \in \mathcal{J}} s_j y A_j = y \sum_{j=1}^{n} s_j A_j = 0$. Если в качестве H взять множество решений системы (13), то мы окажемся в условиях теоремы 2. Проинтегрировав систему (8) при начальных условиях $c_\tau(0) = 0$, мы найдем интегральную кривую (7). При этом могут встретиться следующие случаи.

1. При всех $\varepsilon \geqslant 0$ компоненты вектора $x(\varepsilon)$ неотрицательны и $\sum_{j=1}^{n} f_j(x(\varepsilon)) s_j > 0$. Согласно замечанию 2 функция f не достигает максимума на множестве решений системы

$$\sum_{j=1}^{n} x_j A_j = P, \; x_j \geqslant 0, \; j \in \mathcal{J} \cup \{j'\}, \; x_j = 0, \; j \bar{\in} \mathcal{J} \cup \{j'\}. \quad (14)$$

По теореме I (достаточность) найдется луч, состоящий из решений системы (14), вдоль которого функция f строго возрастает. Тогда по теореме I (необходимость) функция f не достигает максимума и на более широком (вообще говоря) множестве решений системы (1)-(2), то есть искомое решение не существует.

II. Найдется $\varepsilon_0 > 0$ такое, что $x_j(\varepsilon) \geqslant 0$ при $\varepsilon \in [0, \varepsilon_0]$, $j \in \mathcal{J}$, а $\sum_{j=1}^{n} f_j(x(\varepsilon_0)) s_j = 0$. Согласно замечанию 2 функция f в точке $x(\varepsilon_0)$ достигает максимума на множестве V решений системы (13), если заменить в (13) $\mathcal{J}$ на $\mathcal{J} \cup \{j'\}$. Так как $\sum_{j=1}^{n} f_j(x) s_j > 0$, то это возможно лишь в том случае, если функция f строго вогнута вдоль многообразия V. Поэтому можно положить $\mathcal{J}_{d+1} = \mathcal{J} \cup \{j'\}$ и $x^{d+1} = x(\varepsilon_0)$. При этом $f(x^{d+1}) > f(x^d)$, так как x^{d+1} – точка максимума функции f на V, а x^d таковой не являлась.

III. Найдутся $\bar{\varepsilon} \geqslant 0$ и $j'' \in \mathcal{J}$ такие, что $x_{j''}(\bar{\varepsilon}) = 0$, $x_{j''}(\bar{\bar{\varepsilon}}) < 0$ для некоторого $\bar{\bar{\varepsilon}} > \bar{\varepsilon}$, $\sum_{j=1}^{n} f_j(x(\bar{\varepsilon})) s_j > 0$ и $x(\varepsilon) \geqslant 0$ при $\varepsilon \in [0, \bar{\varepsilon}]$. В этом случае поступим следующим образом. Переобозначим $s = s^{\tau_0}$, где $\tau_0 \bar{\in} T$, и пусть $|s_{j''}^{\bar{\tau}}| = \max_{\tau \in T \cup \{\tau_0\}} |s_{j''}^{\tau}|$. Заметим, что $|s_{j''}^{\bar{\tau}}| > 0$, так как в противном случае было бы $x_{j''}(\varepsilon) \equiv const$. Положим $\bar{T} = (T \cup \{\tau_0\}) \setminus \{\bar{\tau}\}$, причем не исключено, что $\bar{\tau} = \tau_0$. Положим также

$$\bar{s}^{\kappa} = s^{\kappa} - \frac{s_{j''}^{\kappa}}{s_{j''}^{\bar{\tau}}} s^{\bar{\tau}}, \; \kappa \in \bar{T}, \quad (15)$$

и перейдем к выполнению дополнительных шагов, заменив соответственно $\mathcal{J}$ и x на $\bar{\mathcal{J}} = (\mathcal{J} \setminus \{j''\}) \cup \{j'\}$ и $\bar{x} = x(\bar{\varepsilon})$. Покажем, что это возможно. Прежде всего отметим, что семейство $\{\bar{s}^{\kappa}, \kappa \in \bar{T}\}$ линейно независимо, так как линейно независимо семейство $\{s^{\kappa}, \kappa \in T \cup \{\tau_0\}\}$. Так как столбец $A_{j''}$ выражается линейно через столбцы A_j, $j \in \mathcal{J} \cup \{j'\}$ (иначе бы $|s_{j''}^{\bar{\tau}}| = 0$), то ранг семейства $\{A_j, j\in\bar{\mathcal{J}}\}$ равен рангу семейства $\{A_j, j\in \in \mathcal{J}\cup\{j'\}\}$, то есть m. Так что семейство $\{\bar{s}^\kappa, \kappa\in\bar{T}\}$ является фундаментальной совокупностью решений системы

$$\sum_{j=1}^{n} s_j A_j = 0 \quad , \; s_j = 0 \quad , \; j \bar{\in} \bar{\mathcal{J}}. \tag{I6}$$

Предположим теперь, что функция f линейна вдоль некоторого решения системы (I6). Этим решением могло бы быть лишь направление $\bar{s}$ в замечании 2. Но при этом $x(\varepsilon)=x+\varepsilon\bar{s}$, а $j''\bar{\in}\bar{\mathcal{J}}$, и мы имели бы $x_{j''}(\varepsilon)=const$. Поскольку это не так, то функция f строго вогнута по решениям системы (I6) и множество $\bar{\mathcal{J}}$ базисное.

Итак, к началу дополнительного шага мы имеем базисное множество $\mathcal{J}$, фундаментальную совокупность $\{\bar{s}^\kappa, \kappa\in\bar{T}\}$ решений системы (I2) и допустимое решение x, для которого $x_j=0$ при $j\bar{\in}\mathcal{J}$. Обозначим через V аффинное многообразие, проходящее через x и параллельное подпространству решений системы (I2). Если $\sum_{j=1}^{n} f_j(x)\bar{s}_j^\kappa = 0$ при $\kappa\in\bar{T}$, то x является точкой максимума функции f на V и можно положить $x^{\sigma+1}=x$, $\mathcal{J}_{\sigma+1}=\mathcal{J}$. В противном случае мы оказываемся в условиях замечания 3. При интегрировании системы (II) могут встретиться случаи аналогичные случаям I, П, Ш.

I′. При некотором $\lambda_0 \leq 1$ на промежутке $[0,\lambda_0)$ решение уходит на бесконечность, причем $\bar{x}(\lambda)\geqslant 0$ при $\lambda\in[0,\lambda_0)$. Как и раньше, убеждаемся, что решаемая задача не имеет оптимального решения.

П′. На промежутке $[0,1]$ интегральная кривая $\bar{x}(\lambda)$ ограничена и неотрицательна. В этом случае можно положить $\mathcal{J}_{\sigma+1}=\mathcal{J}$, $x^{\sigma+1}=\bar{x}(1)$. Заметим, что при этом $f(x^{\sigma+1})>f(x)$ и, следовательно, $f(x^{\sigma+1})>f(x^{\sigma})$, так как на основном и дополнительных шагах значение функции f не убывает.

Ш′. При некотором $\bar{\lambda}\in[0,1)$ оказывается $\bar{x}_{j''}(\bar{\lambda})=0$ и $\bar{x}_{j''}(\bar{\bar{\lambda}})<0$ при некотором $\bar{\bar{\lambda}}\in(\bar{\lambda},1]$. Найдем $\max_{\tau\in\bar{T}}|\bar{s}_{j''}^{\tau}|=|\bar{s}_{j''}^{\bar{\tau}}|$, который заведомо положителен. Заменим множество $\mathcal{J}$ на $\mathcal{J}\setminus\{j''\}$, вектор x на $\bar{x}(\bar{\lambda})$, семейство $\{\bar{s}^\kappa, \kappa\in\bar{T}\}$ на семейство

$$\left\{\bar{s}^\kappa - \frac{\bar{s}_{j''}^\kappa}{\bar{s}_{j''}^{\bar{\tau}}}\bar{s}^{\bar{\tau}} \; , \quad \kappa\in\bar{T}\setminus\{\bar{\tau}\}\right\}$$

и перейдем к следующему дополнительному шагу. Заметим, что в случае Ш$'$ множество $\overline{T}$ заведомо не пусто, и что базисность множества $\mathcal{J}\setminus\{j''\}$ следует из базисности множества $\mathcal{J}$ и представления

$$A_{j''} = -\sum_{j\in\mathcal{J}\setminus\{j''\}} \frac{s_j^{\overline{\tau}}}{s_{j''}^{\overline{\tau}}} A_j$$

В заключение этого параграфа отметим, что после каждого основного шага может следовать лишь конечное число дополнительных шагов ввиду убывания числа элементов в базисном множестве. Кроме того, $f(x^{\sigma+1}) \geq f(x^{\sigma})$. Так как при движении по интегральным кривым на всех шагах значение функции f строго возрастает, то $f(x^{\sigma+1}) > f(x^{\sigma})$, если $x^{\sigma+1} \neq x^{\sigma}$. Мы докажем, что равенство $x^{\sigma+1} = x^{\sigma}$ возможно лишь при нарушении условия жж).

Обозначим через H множество решений системы (13) при $\mathcal{J} = \mathcal{J}_{\sigma}$, через V множество решений той же системы при $\mathcal{J} = \mathcal{J}_{\sigma} \cup \{j'\}$, а через $\overline{H}$ – при $\mathcal{J} = \mathcal{J}_{\sigma+1}$. Поскольку в точке $x = x^{\sigma+1} = x^{\sigma}$ функция f достигает максимума на H и на $\overline{H}$, не достигает максимума на V, и размерность V лишь на единицу больше размерности H, то $\overline{H} < H$. Поэтому равенство $x_{j'} = 0$, которому удовлетворяют все точки H, является следствием системы

$$\sum_{j=1}^{n} x_j A_j = P \ , \ x_j = 0 \ , \ j \in \mathcal{J}_{\sigma+1} \ .$$

Это, в частности, означает, что существует такая строка z, что

$$z A_{j'} = 1 \ , \ \ z A_j = 0 \ , \ j \in \mathcal{J}_{\sigma+1} \setminus \{j'\} .$$

Поэтому ранг семейства $\{A_j \ , j \in \mathcal{J}_{\sigma+1} \setminus \{j'\}\}$ меньше m. Но $\{j : x_j^{\sigma} > 0\} \subset \mathcal{J}_{\sigma+1} \cap \mathcal{J}_{\sigma} \subset \mathcal{J}_{\sigma+1} \setminus \{j'\}$, что и означает нарушение условия жж) на векторе x^{σ}.

§ 3. Метод оправданных смещений

Описанный в предыдущем параграфе метод в своей формулировке содержит операции интегрирования систем обыкновенных дифференциальных уравнений и потому не может быть отнесен к эффективным. Теперь мы изложим и обоснуем метод, в известном смысле реализующий метод предыдущего параграфа, но формулируемый лишь в терминах операций линейной алгебры. При этом мы откажемся от сколько-нибудь точного интегрирования систем (8) и (II). Вместо этого мы будем двигаться вдоль касательной в начальной точке к интегральным кривым этих систем до тех пор, пока это смещение оправдывается достаточным увеличением функции f. В обосновании метода нам удобно будет считать пространство R^n нормированным, хотя сам метод от выбора нормы не зависит.

Прежде всего отметим, что из базисного множества J_σ можно выделить такое подмножество I_σ, что семейство $\{A_i, i\in I_\sigma\}$ является базисом R^m. Аналогичное подмножество в J мы будем обозначать через I. Тогда можно принять $T = J\setminus I$ и для $\tau\in T$ выбрать направления s^τ, положив $s_j^\tau = 0$ при $j\bar\in I\cup\{\tau\}$, $s_\tau^\tau = 1$, и определив остальные компоненты из системы

$$\sum_{j\in I_\sigma} s_j^\tau A_j = -A_\tau .$$

Строку y в этом случае можно найти из системы

$$y^\sigma A_j = f_j(x^\sigma), \quad j\in I_\sigma, \tag{17}$$

а в качестве направления s взять $s^{j'}$.

Как это обычно делается, мы в качестве номера j' будем на σ-ом шаге выбирать не любой номер, для которого $y^\sigma A_{j'} < f_{j'}(x^\sigma)$, а лишь такой, что $y^\sigma A_{j'} < f_{j'}(x^\sigma) - Б_\sigma$, где "барьер" $Б_\sigma > 0$. При этом мы полагаем $Б_{\sigma+1} = Б_\sigma$, если номер j' найти удалось, и

$$Б_{\sigma+1} = \theta_1 \max\{\max_{j\bar\in J_\sigma}\{f_j(x^\sigma) - y^\sigma A_j\}, \max_{j\in J_\sigma}\{|f_j(x^\sigma) - y^\sigma A_j|\}\} \tag{18}$$

в противном случае. Здесь $0<\theta_1<1$. Переход от x^σ к $x^{\sigma+1}$ во втором случае будет осуществляться несколько иначе, чем в первом. Могут, впрочем, применяться и более квалифицированные алгорифмы изменения барьера. Мы для простоты изложения остановимся на описанном. Помимо барьера $Б_\sigma$ в методе используются еще коэффициенты $d_\sigma > 0$, роль которых будет видна из дальнейшего. В начале $Б_0 > 0$ и $0 < d_0 < 1$. Один шаг метода, реализующий переход от x^σ к $x^{\sigma+1}$, в свою очередь состоит из серии дополнительных шагов и, возможно, одного основного шага, которые мы опишем несколько ниже.

Пусть теперь имеется базисное множество J_σ и допустимый вектор x^σ, у которого $x_j^\sigma = 0$ при $j \bar{\in} \mathcal{J}_\sigma$. Пусть также семейство $\{s^\tau, \tau \in T\}$ выбрано так, как это указано в начале параграфа, и из системы (I7) найдена строка y^σ. Положим

$$\Delta_\tau^\sigma = \sum_{j=1}^{n} f_j(x^\sigma) s_j^\tau, \quad \tau \in T.$$

Мы откажемся от предположения, что $\Delta_\tau^\sigma = 0$, $\tau \in T$, и, следовательно, вектор x^σ, вообще говоря, не является $\mathcal{J}_\sigma$ -оптимальным. Могут встретиться шаги трех типов.

А. При всех $j \bar{\in} \mathcal{J}_\sigma$ оказалось $f_j(x^\sigma) - y^\sigma A_j \leq Б_\sigma$. В этом случае полагаем $d_{\sigma+1} = d_\sigma$, вычисляем $Б_{\sigma+1}$ по формуле (I8) и, если $Б_{\sigma+1} > 0$, переходим к выполнению серии дополнительных шагов, приняв $\bar{\mathcal{J}} = \mathcal{J}_\sigma$, $\bar{x} = x^\sigma$, $\bar{T} = T$, $\bar{s}^\tau = s^\tau$ при $\tau \in \bar{T}$. Если же $Б_{\sigma+1} = 0$, то $y^\sigma A_j \leq f_j(x^\sigma)$ при $j \bar{\in} \mathcal{J}_\sigma$, и $y^\sigma A_j = f_j(x^\sigma)$ при $j \in \mathcal{J}_\sigma$. Поэтому вектор x^σ является оптимальным решением, и работа заканчивается.

Пусть найден номер $j' \bar{\in} \mathcal{J}_\sigma$, для которого $f_{j'}(x^\sigma) - y^\sigma A_{j'} > Б_\sigma$. Положим $Б_{\sigma+1} = Б_\sigma$ и решим систему

$$\sum_{\tau \in T} \Big(\sum_{i,j=1}^{n} f_{ij}(x^\sigma) s_i^\tau s_j^\kappa \Big) u_\tau^\sigma = - \sum_{i,j=1}^{n} f_{ij}(x^\sigma) s_j^\kappa s_i^{j'}, \quad \kappa \in T, \tag{19}$$

относительно коэффициентов u_τ^σ.

В. Если

$$\sum_{\tau \in T} u_\tau^\sigma \Delta_\tau^\sigma \geq -\delta Б_\sigma, \tag{20}$$

то полагаем $d_{\sigma+1} = d_\sigma$ и переходим к выполнению основного шага, приняв $\mathcal{J} = \mathcal{J}_\sigma$, $x = x^\sigma$. Здесь $\delta \in (0, 1)$.

С. Если неравенство (20) нарушено, то полагаем $d_{\sigma+1} = \theta_2 d_\sigma$, где константа $\theta_2 \in (0, 1)$, и переходим к выполнению серии дополнительных шагов, приняв $\bar{\mathcal{J}} = \mathcal{J}_\sigma$, $\bar{x} = x^\sigma$, $\bar{T} = T$, $\bar{s}^\tau = s^\tau$ при $\tau \in \bar{T}$.

Опишем основной шаг. Положим

$$\ell = \sum_{\tau \in T \cup \{j'\}} u_\tau^\sigma s^\tau \tag{21}$$

и подсчитаем

$$\frac{\partial f}{\partial \ell}(x) = \sum_{\tau \in T \cup \{j'\}} u_\tau^\sigma \Delta_\tau^\sigma, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial \ell^2}(x) = \sum_{\tau \in T \cup \{j'\}} \Big(\sum_{i,j=1}^{n} f_{ij}(x) s_i^\tau s_j^{j'} \Big) u_\tau^\sigma,$$

где для удобства записи мы положили $u^{\sigma}_{j'} = 1$ и $\Delta^{\sigma}_{j'} = f_{j'}(x^{\sigma}) - y^{\sigma} A_{j'} = \sum_{j=1}^{n} f_j(x) s^{j'}_j$. Так как $\Delta^{\sigma}_{j'} > Б_{\sigma}$, то ввиду (20) $\frac{\partial f}{\partial \ell}(x) > (1-\delta) Б_{\sigma}$. Положим $\varepsilon_0 = +\infty$, если $\frac{\partial^2 f}{\partial \ell^2}(x) = 0$, и $\varepsilon_0 = -\frac{\partial f}{\partial \ell}(x) \Big/ \frac{\partial^2 f}{\partial \ell^2}(x)$ – в противном случае. Определим также

$$\varepsilon_1 = \min\left\{ \frac{x_j}{-\ell_j} : \ell_j < 0 \right\}$$

и положим $\varepsilon_2 = \min\{\varepsilon_0, \varepsilon_1\}$. Если $\varepsilon_2 = +\infty$, то это означает, что луч $\{x + \lambda \ell : \lambda \in [0, +\infty)\}$ допустимый, и так как при этом $\frac{\partial^2 f}{\partial \ell^2} = 0$, а $\frac{\partial f}{\partial \ell} > 0$, то вдоль указанного луча функция f растет до бесконечности. Работа на этом заканчивается, так как оптимального решения не существует.

Пусть $\varepsilon_2 < +\infty$. Мы положим $\varepsilon = 2^{-\alpha} \varepsilon_2$, где в качестве α выбрано наименьшее целое неотрицательное число, при котором

$$f(x + \varepsilon \ell) - f(x) \geq q\left(\varepsilon \frac{\partial f}{\partial \ell}(x) + \frac{\varepsilon^2}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial \ell^2}(x) \right). \tag{22}$$

Здесь $q \in (0, 1)$. Затем мы перейдем к выполнению серии дополнительных шагов, положив $\bar{x} = x + \varepsilon \ell$. При этом возможны два случая.

Если $\varepsilon = \varepsilon_1$, то найдется такой номер $j'' \in \mathcal{J}$, что $\bar{x}_{j''} = 0$ и $\ell_{j''} < 0$. Как и в случае Ш предыдущего параграфа, мы найдем

$$|s^{\bar{\tau}}_{j''}| = \max_{\tau \in T \cup \{j'\}} |s^{\tau}_{j''}|$$

и положим $\bar{T} = (T \cup \{j'\}) \setminus \{\bar{\tau}\}$, $\bar{\mathcal{J}} = (\mathcal{J} \setminus \{j''\}) \cup \{j'\}$, а семейство $\{\bar{s}^{\kappa}, \kappa \in \bar{T}\}$ получим по формулам (I5). Заметим, что при нашем выборе направлений s^{κ} преобразования (I5) фактически делать не придется, если $j'' \in \mathcal{J} \setminus I$, так как в этом случае $s^{\kappa}_{j''} = 0$ при $\kappa \in \bar{T}$. Кроме того, в этом случае можно принять $\bar{I} = I$. Если же $j'' \in I$, то нужно будет выполнить преобразования (I5) и положить $\bar{I} = (I \setminus \{j''\}) \cup \{\bar{\tau}\}$. Базисность множества $\bar{\mathcal{J}}$ устанавливается, как и в предыдущем параграфе: направление ℓ, по которому только и могла бы обратиться в ноль вторая производная функции f, не удовлетворяет системе (I6), так как $\ell_{j''} \neq 0$.

Если $\varepsilon < \varepsilon_1$, то либо $\varepsilon = \varepsilon_0$ и тогда $\frac{\partial^2 f}{\partial \ell^2}(x) = -\frac{1}{\varepsilon}\frac{\partial f}{\partial \ell}(x) \leq$ $\leq -\frac{(1-\delta)}{\varepsilon} Б_\delta$, либо $\varepsilon < \varepsilon_2$ и, следовательно, $\varepsilon > 0$ и

$$f(x+2\varepsilon\ell) - f(x) < q\left(2\varepsilon \frac{\partial f}{\partial \ell}(x) + 2\varepsilon^2 \frac{\partial^2 f}{\partial \ell^2}(x)\right).$$

Но $f(x+2\varepsilon\ell) - f(x) = 2\varepsilon \frac{\partial f}{\partial \ell}(x) + 2\varepsilon^2 \frac{\partial^2 f}{\partial \ell^2}(x + 2\beta\varepsilon\ell)$ при некотором $\beta \in (0,1)$. Поэтому $\frac{\partial^2 f}{\partial \ell^2}(x+2\beta\varepsilon\ell) < -\frac{1-q}{\varepsilon}\frac{\partial f(x)}{\partial \ell} +$ $+ q\frac{\partial^2 f}{\partial \ell^2}(x) \leq -\frac{(1-q)(1-\delta)Б_\delta}{\varepsilon}$. Так что

$$\min\left\{\frac{\partial^2 f}{\partial \ell^2}(x^\sigma),\ \frac{\partial^2 f}{\partial \ell^2}(x^\sigma + 2\beta\varepsilon\ell)\right\} \leq -\frac{(1-q)(1-\delta)Б_\delta}{\varepsilon} \qquad (23)$$

и множество $\mathcal{J} \cup \{j'\}$ является базисным, и можно положить $\bar{\mathcal{J}} = \mathcal{J} \cup \{j'\}$. Кроме того, мы положим $\bar{T} = T \cup \{j'\}$, $\bar{S}^k = S^k$ при $k \in \bar{T}$. Отметим, что хотя рассмотренный случай аналогичен случаю II предыдущего параграфа, после него нужно все равно перейти к выполнению серии дополнительных шагов, чтобы обеспечить достаточную малость невязок $\Delta_\tau^{\sigma+1}$.

Поскольку на основном шаге $\varepsilon \leq \varepsilon_0$, то $\frac{\partial^2 f}{\partial \ell^2}(x) \geq -\frac{1}{\varepsilon}\frac{\partial f}{\partial \ell}(x)$ при $\varepsilon > 0$. Поэтому из (22) находим

$$f(\bar{x}) - f(x) \geq \frac{1}{2} q\varepsilon \frac{\partial f}{\partial \ell}(x) \geq \frac{1}{2} q\varepsilon(1-\delta) Б_\delta . \qquad (24)$$

Положим $|u^\sigma| = \sum_{\tau \in T} |u_\tau^\sigma|$.

ЛЕММА I. Если последовательность $\{x^\sigma\}$ ограничена, то существует число $\mathcal{D} > 0$ такое, что $|u^\sigma| \leq \mathcal{D}$ при всех σ .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим противное. Пусть существует последовательность $\{\sigma_\mu\}$ такая, что $\lim_\mu |u^{\sigma_\mu}| = +\infty$. Не умаляя общности, можно считать, что все $\mathcal{J}_{\sigma_\mu}$ совпадают, все I_{σ_μ} совпадают и что существуют пределы:

$$\tilde{x} = \lim_\mu x^{\sigma_\mu}, \quad \tilde{\ell} = \lim_\mu \sum_{\tau \in T} \frac{u_\tau^{\sigma_\mu}}{|u^{\sigma_\mu}|} S^\tau ,$$

причем $\tilde{\ell} \neq 0$ ввиду линейной независимости семейства $\{S^\tau, \tau \in T\}$. Тогда из (19) в пределе получим $\frac{\partial^2 f}{\partial \ell^2}(\tilde{x}) = 0$, что противоречит базисности множества $\mathcal{J} = \mathcal{J}_{\sigma_\mu}$. Лемма доказана.

СЛЕДСТВИЕ. Если последовательность $\{x^\sigma\}$ ограничена, то найдется число $\mathcal{L}_1 > 0$ такое, что $\|\ell\| \leq \mathcal{L}_1$ на всех основных шагах.

Опишем теперь дополнительный шаг, к началу которого имеется базисное множество $\bar{J}$, базис $\{\bar{s}^\tau, \tau \in \bar{T}\}$ пространства решений системы (16) и допустимое решение $\bar{x}$, у которого $\bar{x}_j = 0$ при $j \bar{\in} \bar{J}$. Вычислим $\bar{\Delta}_\tau = \sum_{j=1}^{n} f_j(\bar{x}) \bar{s}_j^\tau$. Если

$$|\bar{\Delta}_\tau| \leq d_{\sigma+1} B_{\sigma+1}, \quad \tau \in \bar{T},$$

и либо уже был сделан в этой серии один дополнительный шаг, либо перед этим был основной шаг, на котором реализовался случай $\varepsilon < \varepsilon_1$, то положим $J_{\sigma+1} = \bar{J}$ и $x^{\sigma+1} = \bar{x}$. В противном случае решим систему

$$\sum_{\tau \in \bar{T}} \Big(\sum_{i,j=1}^{n} f_{ij}(\bar{x}) \bar{s}_i^\tau \bar{s}_j^\kappa \Big) v_\tau = -\bar{\Delta}_\kappa, \quad \kappa \in \bar{T}, \tag{25}$$

относительно коэффициентов v_τ, положим

$$\bar{\ell} = \sum_{\tau \in \bar{T}} v_\tau \bar{s}^\tau, \tag{26}$$

найдем $\bar{\varepsilon}_1 = \min\left\{\frac{\bar{x}_j}{-\bar{\ell}_j} : \bar{\ell}_j < 0\right\}$ и $\bar{\varepsilon}_2 = \min\{1, \bar{\varepsilon}_1\}$. Как и на основном шаге, выберем в качестве α наименьшее целое неотрицательное число, при котором

$$f(\bar{x} + 2^{-\alpha}\bar{\varepsilon}_2 \bar{\ell}) - f(\bar{x}) \geq q\Big(2^{-\alpha}\bar{\varepsilon}_2 \frac{\partial f}{\partial \bar{\ell}}(\bar{x}) + 2^{-2\alpha-1}\bar{\varepsilon}_2^2 \frac{\partial^2 f}{\partial \bar{\ell}^2}(\bar{x})\Big). \tag{27}$$

Поскольку, однако, в данном случае $\frac{\partial f}{\partial \bar{\ell}}(\bar{x}) = -\frac{\partial^2 f}{\partial \bar{\ell}^2}(\bar{x}) = \sum_{\tau \in \bar{T}} v_\tau \bar{\Delta}_\tau$, то

$$f(\bar{x} + \bar{\varepsilon}\bar{\ell}) - f(\bar{x}) \geq q\bar{\varepsilon}\Big(1 - \frac{\bar{\varepsilon}}{2}\Big)\frac{\partial f}{\partial \bar{\ell}}(\bar{x}), \tag{28}$$

где мы положили $\bar{\varepsilon} = 2^{-\alpha}\bar{\varepsilon}_2$. Существование нужного α следует из неравенства $\frac{\partial f}{\partial \bar{\ell}}(\bar{x}) > 0$. У нас снова может встретиться два случая: либо $\bar{\varepsilon} < \bar{\varepsilon}_1$ и тогда $\bar{\varepsilon} > 0$, либо $\bar{\varepsilon} = \bar{\varepsilon}_1$ и тогда найдется номер $j'' \in \bar{J}$, при котором $\bar{x}_{j''} + \bar{\varepsilon}\bar{\ell}_{j''} = 0$, а $\bar{\ell}_{j''} < 0$. При переходе к следующему дополнительному шагу мы заменим $\bar{x}$ на $\bar{x} + \bar{\varepsilon}\bar{\ell}$, и если $\bar{\varepsilon} = \bar{\varepsilon}_1$, то заменим множество $\bar{J}$ на $\bar{J} \setminus \{j''\}$. Кроме того, во втором случае нужно подправить множество $\bar{T}$ и семейство $\{\bar{s}^\tau, \tau \in \bar{T}\}$ подобно тому, как это было сделано на основном шаге.

Отметим, что как на основном, так и на дополнительных шагах значения функции f не убывают. Кроме того, дополнительный шаг фактически не делается, если все $\bar{\Delta}_k = 0$ (в частности, если $\bar{T} = \varnothing$).

ЛЕММА 2. Если последовательность $\{x^\sigma\}$ ограничена, то число шагов типа С конечно и, следовательно, $inf\{d_\sigma\} = d > 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Найдем число $\mathcal{D}$ согласно лемме I. Если $d_\sigma \leq \frac{\delta}{\mathcal{D}}$, то $-\sum_{\tau \in T} u_\tau^\sigma \Delta_\tau^\sigma \leq \mathcal{D} \cdot \max_\tau |\Delta_\tau^\sigma| \leq \mathcal{D} d_\sigma Б_\sigma \leq \delta Б_\sigma$.
Так что при достижении коэффициентами d_σ достаточной малости их дальнейшее уменьшение прекратится. Лемма доказана.

ЛЕММА 3. Для всякого ограниченного множества $Q \subset R^n$ найдется число $\mathcal{L}_2 > 0$ такое, что на дополнительном шаге $\|\bar{\ell}\| \leq \mathcal{L}_2$, если $\bar{x} \in Q$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для последовательности $\{\bar{x}^\nu\}$ будем обозначать через $\bar{\Delta}_\tau^\nu$, $\bar{\ell}^\nu$, v_τ^ν, ε^ν соответствующие величины, получающиеся на дополнительном шаге, если в качестве $\bar{x}$ взять $\bar{x}^\nu$.

Предположим, что в Q нашлась последовательность $\{\bar{x}^\nu\}$, для которой $\lim \|\bar{\ell}^\nu\| = +\infty$. Не умаляя общности, можно считать, что все $\bar{\mathcal{J}}^\nu$ и $\bar{T}^\nu$ одни и те же, именно $\bar{\mathcal{J}}$ и $\bar{T}$, и что существуют пределы $\lim_\nu \bar{x}^\nu = \bar{x}^*$ и $\lim \frac{\bar{\ell}^\nu}{\|\bar{\ell}^\nu\|} = \lambda$. Написав систему (25) для $\bar{x}^\nu$, умножим ее уравнения на соответствующие v_k^ν и сложим. Получим равенство:

$$\sum_{i,j=1}^{n} f_{ij}(\bar{x}^\nu)\, \bar{\ell}_i^\nu \bar{\ell}_j^\nu = -\sum_{j=1}^{n} f_j(\bar{x}^\nu)\, \bar{\ell}_j^\nu .$$

Разделив это равенство на $\|\bar{\ell}^\nu\|^2$,в пределе получим:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial \lambda^2}(\bar{x}^*) = \sum_{i,j=1}^{n} f_{ij}(\bar{x}^*)\, \lambda_i \lambda_j = 0 ,$$

что противоречит базисности $\bar{\mathcal{J}}$, так как направление λ удовлетворяет системе (16). Лемма доказана.

ЛЕММА 4. Для всякого $\Delta > 0$ и всякого ограниченного множества $Q \subset R^n$ найдутся числа $\delta_0 > 0$ и $\delta_1 > 0$ такие, что на дополнительном шаге $\frac{\partial f}{\partial \bar{\ell}}(\bar{x}) \geq \delta_0$, если $\bar{x} \in Q$ и $\max_\tau \{|\bar{\Delta}_\tau|\} \geq \Delta$, а если к тому же реализуется случай $\bar{\varepsilon} < \bar{\varepsilon}_1$, то $\bar{\varepsilon} \geq \delta_1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, что для некоторого базисного $\bar{J}$ и некоторого $\bar{T} \subset \bar{J}$ найдется последовательность $\{\bar{x}^\nu\}$ в Q такая, что $\max_\tau \{\bar{\Delta}_\tau^\nu\} \geq \Delta$, но $\lim_\nu \frac{\partial f}{\partial \bar{\ell}^\nu}(\bar{x}^\nu) = 0$. Так как на дополнительном шаге $\frac{\partial f}{\partial \bar{\ell}}(\bar{x}) = -\frac{\partial^2 f}{\partial \bar{\ell}^2}(\bar{x})$, то ввиду базисности $\bar{J}$ и ограниченности $\{\bar{x}^\nu\}$ это возможно лишь если $\lim_\nu \bar{\ell}^\nu = 0$. Но тогда по (25) $\lim_\nu \bar{\Delta}_k^\nu = -\lim_\nu \left(\sum_{i,j=1}^n f_{ij}(\bar{x}^\nu)\bar{\ell}_i^\nu \bar{s}_j^k\right) = 0$ при всех $k \in \bar{T}$, что противоречит принятому ранее соглашению. Поскольку возможных $\bar{J}$ и $\bar{T}$ конечное число, то этим доказано существование δ_0.

Пусть теперь для некоторого базисного $\bar{J}$ и $\bar{T}$ найдется последовательность $\{\bar{x}^\nu\}$ в Q такая, что $\max_\tau \{|\bar{\Delta}_\tau^\nu|\} \geq \Delta$, $\lim_\nu \bar{\varepsilon}^\nu = 0$ и $\bar{\varepsilon}^\nu < \bar{\varepsilon}_1^\nu$. Не умаляя общности, можно считать, что $\lim_\nu \bar{x}^\nu = \bar{x}^*$. По лемме 3 последовательность векторов $\{\bar{\ell}^\nu\}$ ограничена, и можно считать, что $\lim_\nu \bar{\ell}^\nu = \bar{\ell}^*$. Если $\bar{\varepsilon}^\nu < 1$, то

$$f(\bar{x}^\nu + 2\bar{\varepsilon}^\nu \bar{\ell}^\nu) - f(\bar{x}^\nu) < 2q\bar{\varepsilon}^\nu(1-\bar{\varepsilon}^\nu)\frac{\partial f}{\partial \bar{\ell}^\nu}(\bar{x}^\nu).$$

Разделив это равенство на $2\bar{\varepsilon}^\nu > 0$ и перейдя к пределу, получим

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{\ell}^*}(\bar{x}^*) \leq q\frac{\partial f}{\partial \bar{\ell}^*}(\bar{x}^*),$$

что противоречит неравенствам $q < 1$ и $\frac{\partial f}{\partial \bar{\ell}^*}(\bar{x}^*) = \lim_\nu \frac{\partial f}{\partial \bar{\ell}^\nu}(\bar{x}^\nu) \geq \delta_0 > 0$. Полученное противоречие доказывает существование δ_1. Лемма доказана.

ЛЕММА 5. Если последовательность $\{x^\sigma\}$ ограничена и на бесконечном числе шагов типа B на основном шаге $\varepsilon < \varepsilon_1$ (или, что то же, $\bar{J} \supset J$), то $\lim_\sigma Б_\sigma = 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, что условия леммы выполнены, но $Б_\sigma \geq Б > 0$. Если $\varepsilon \leq 1$, то по следствию из леммы I и ввиду ограниченности $\{x^\sigma\}$ левая часть (23) для каждого базисного $\bar{J}$ не меньше некоторого $-\mathcal{L}_{\bar{J}}$, где $\mathcal{L}_{\bar{J}} > 0$. Если обозначить через $\mathcal{L}$ наибольшее из чисел $\mathcal{L}_{\bar{J}}$ (напомним, что базисных множеств конечное число), то мы получим, что либо $\varepsilon > 1$, либо $-\mathcal{L} \leq -\dfrac{(1-q)(1-\delta)Б}{\varepsilon}$. Таким образом, $\varepsilon \geq \min\left\{1, \dfrac{(1-q)(1-\delta)Б}{\mathcal{L}}\right\} = \varepsilon_0 > 0$. Но это противоречит ограничённости последовательности $\{f(x^\sigma)\}$, так как ввиду (24) $f(x^{\sigma+1}) - f(x^\sigma) \geq \frac{1}{2} q \varepsilon_0 (1-\delta) Б$. Лемма доказана.

ЛЕММА 6. На шаге с номером σ либо число дополнительных шагов конечно, либо получающаяся на них последовательность допустимых решений не имеет конечной точки сгущения.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, что число дополнительных шагов на шаге с номером σ бесконечно. Тогда, начиная с некоторого дополнительного шага, стабилизируется базисное множество $\bar{J}$ и система направлений $\{\bar{s}^\tau, \tau \in \bar{T}\}$. Обозначим через $\{\bar{x}^\mu\}$ полученную на этих шагах последовательность допустимых решений и предположим, что существует сходящаяся подпоследовательность $\{\bar{x}^{\mu_\nu}\}$. Обозначим через $\bar{\ell}^\nu$, $\bar{\varepsilon}^\nu$ и $\bar{\Delta}_\tau^\nu$ соответствующие величины $\bar{\ell}$, $\bar{\varepsilon}$ и $\bar{\Delta}_\tau$. Так как $\max_\tau |\Delta_\tau^\nu| \geq d_{\sigma+1} Б_{\sigma+1}$, а последовательность $\{\bar{x}^{\mu_\nu}\}$ ограничена, то по лемме 4 найдутся $\delta_0 > 0$ и $\delta_1 > 0$ такие, что $\bar{\varepsilon}^\nu \geq \delta_1$ и $\dfrac{\partial f}{\partial \bar{\ell}^\nu} \geq \delta_0$. Согласно (28) приращение функции f на шаге μ_ν не меньше, чем $q\,\delta_0\,\delta_1(1-\frac{1}{2}\delta_1) > 0$. Так как на остальных дополнительных шагах значение функции f не убывает, то последовательность $\{f(\bar{x}^{\mu_\nu})\}$ неограничена, что противоречит ограниченности $\{\bar{x}^{\mu_\nu}\}$. Лемма доказана.

Обозначим через $\mathcal{F}$ совокупность базисных множеств и для каждого $J \in \mathcal{F}$ через Q_J обозначим множество допустимых решений x, для которых $x_j = 0$ при $j \bar{\in} J$.

ЛЕММА 7. Если существует оптимальное решение, то при всяком $J \in \mathcal{F}$

и любом вещественном α множество $Q_{\mathcal{J}}^{\alpha}=\{x\in Q_{\mathcal{J}}: f(x)\geqslant\alpha\}$ ограничено.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Множество $Q_{\mathcal{J}}^{\alpha}$ выпукло и замкнуто. Если $Q_{\mathcal{J}}^{\alpha}$ не ограничено, то оно содержит некоторый луч, на котором вогнутая функция f ограничена снизу. Ввиду условия ж) на этом луче функция f либо постоянна, что противоречит базисности $\mathcal{J}$, либо строго возрастает, что по теореме I противоречит существованию оптимального решения. Лемма доказана.

СЛЕДСТВИЕ. Если существует оптимальное решение, то последовательность полученных на основных и дополнительных шагах допустимых решений ограничена.

Действительно, если положить $\alpha=f(x^0)$, то все эти допустимые решения принадлежат множеству

$$\bigcup_{\mathcal{J}\in\mathcal{F}} Q_{\mathcal{J}}^{\alpha}$$

которое ограничено ввиду конечности множества $\mathcal{F}$.

ТЕОРЕМА 4. Пусть выполнены условия жж) и ж).

а) Если существует оптимальное решение, то последовательность $\{x^{\sigma}\}$ ограничена.

б) Если для некоторого σ число дополнительных шагов бесконечно, то полученная на них последовательность допустимых решений неограничена, а решаемая задача не имеет оптимального решения.

в) Если число дополнительных шагов при каждом σ конечно и последовательность $\{x^{\sigma}\}$ бесконечна и ограничена, то $\lim\limits_{\sigma} Б_{\sigma}=0$ и последовательность $\{x^{\sigma}\}$ сходится к некоторому оптимальному решению.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Утверждение а) содержится в следствии из леммы 7. Утверждение б) получается из леммы 6 и следствия из леммы 7. Осталось доказать утверждение в).

Докажем сначала, что $\lim_{\sigma} Б_{\sigma} = 0$, если последовательность $\{x^{\sigma}\}$ ограничена. Предположим противное. Пусть $Б_{\sigma} \geq Б > 0$ при всех σ. Тогда число шагов типа А конечно. По лемме 2 число шагов типа С тоже конечно. Значит, начиная с некоторого, все шаги оказываются шагами типа В. По лемме 5 лишь на конечном числе шагов $\varepsilon < \varepsilon_1$, и, следовательно, начиная с некоторого, на основных шагах реализуется случай $\varepsilon = \varepsilon_1$ (то есть $\overline{\mathcal{J}} \neq \mathcal{J}$). Поэтому число элементов в множествах $\mathcal{J}_{\sigma}$, начиная с некоторого, стабилизируется.

Обозначим через ε^{σ} величину ε на основном шаге с номером σ. Так как $Б_{\sigma} \geq Б > 0$, а последовательность $\{f(x^{\sigma})\}$ не убывает и ограничена, то ввиду (24) ряд $\sum_{\sigma} \varepsilon^{\sigma}$ сходится. Обозначим через $\bar{x}^{\sigma}$ векторы, получающиеся после основных шагов. По следствию из леммы I последовательность $\{\bar{x}^{\sigma}\}$ ограничена, а ввиду стабилизации числа элементов множеств $\mathcal{J}_{\sigma}$ на дополнительных шагах реализуется случай $\bar{\varepsilon} < \bar{\varepsilon}_1$. Ввиду (28) по лемме 4 $\lim_{\sigma} \max_{\tau} \{|\bar{\Delta}_{\tau}^{\sigma}|\} \leq 0$.

Для каждого σ мы получаем номера j'_{σ} и j''_{σ}, участвовавшие на основном шаге под названиями j' и j''. При этом $\mathcal{J}_{\sigma+1} = \overline{\mathcal{J}}_{\sigma} = (\mathcal{J}_{\sigma} \setminus \{j''_{\sigma}\}) \cup \{j'_{\sigma}\}$, $\bar{x}^{\sigma}_{j''_{\sigma}} = 0$ и $\bar{x}^{\sigma}_{j'_{\sigma}} = \varepsilon^{\sigma}$. Кроме того, из множеств $\mathcal{J}_{\sigma}$ выделены подмножества I_{σ}. Выделим последовательность $\{\sigma_{\nu}\}$ так, чтобы подпоследовательность $\{x^{\sigma_{\nu}}\}$ сходилась. Ввиду конечности числа возможных комбинаций можно считать, что $I_{\sigma_{\nu}} = I$, $\mathcal{J}_{\sigma_{\nu}} = \mathcal{J}$, $j'_{\sigma_{\nu}} = j'$, $j''_{\sigma_{\nu}} = j''$, $\overline{\mathcal{J}}_{\sigma_{\nu}} = \overline{\mathcal{J}} = \mathcal{J}_{\sigma_{\nu}+1}$, $\bar{I}_{\sigma_{\nu}} = \bar{I}$. Положим $x^* = \lim_{\nu} x^{\sigma_{\nu}}$. Так как $\lim \varepsilon^{\sigma} = 0$, то по следствию из леммы I $\lim_{\nu} \bar{x}^{\sigma_{\nu}} = x^*$. Но $\sum_{j=1}^{n} f_j(x^*) s_j^{\tau} = \lim_{\nu} \bar{\Delta}_{\tau}^{\sigma_{\nu}} = 0$ при $\tau \in \overline{T}$. Поэтому x^* доставляет максимум функции f на многообразии $\overline{H}$ решений системы

$$\sum_{j=1}^{n} x_j A_j = P, \quad x_j = 0, \quad j \bar{\in} \overline{\mathcal{J}}. \tag{29}$$

Поскольку $f(x^{\sigma_{\nu}+1}) \geq f(\bar{x}^{\sigma_{\nu}})$, $\mathcal{J}_{\sigma_{\nu}+1} = \overline{\mathcal{J}}$ и точка $x^{\sigma_{\nu}+1}$ удовлетворяет системе (29), то $\lim_{\nu} x^{\sigma_{\nu}+1} = x^*$ ввиду строгой вогнутости функции f на $\overline{H}$. Поэтому $\lim_{\nu} \Delta_{\tau}^{\sigma_{\nu}+1} = \lim_{\nu} \sum_{j=1}^{n} f_j(x^{\sigma_{\nu}+1}) \bar{s}_j^{\tau} = \sum_{j=1}^{n} f_j(x^*) \bar{s}_j^{\tau} = 0$ при $\tau \in \overline{T}$.

Таким образом, исходную подпоследовательность $\{x^{\sigma_\nu}\}$ мы могли выбрать так, что $\lim_\nu \Delta_\tau^{\sigma_\nu}=0$ при $\tau\in T$. Пусть это и было сделано. Тогда вектор x^* доставляет максимум функции f на многообразии H решений системы

$$\sum_{j=1}^n x_j A_j = P, \quad x_j=0, \; j\bar{\in} \mathcal{J}.$$

В то же время $\lim_\nu \sum_{j=1}^n f_j(x^{\sigma_\nu}) s_j^{j'} = \sum_{j=1}^n f_j(x^*) s_j^{j'} \geq Б > 0$, и x^* не является точкой максимума функции f на многообразии V решений системы

$$\sum_{j=1}^n x_j A_j = P, \quad x_j=0, \quad j\bar{\in}\mathcal{J}\cup\{j'\}.$$

Повторив рассуждения конца второго параграфа, найдем, что на векторе x^* нарушено условие невырожденности мм). Поскольку это условие предполагается выполненым, то $\lim_\sigma Б_\sigma=0$.

Таким образом, имеется бесконечная подпоследовательность $\{x^{\sigma_\nu}\}$ шагов типа А. Можно считать, что существует предел $\lim_\nu x^{\sigma_\nu}=x^*$ и совпадают множества $\mathcal{J}_{\sigma_\nu}=\mathcal{J}$ и $I_{\sigma_\nu}=I$. Тогда существует предел $\lim_\nu y^{\sigma_\nu}=y^*$ решений системы (I7). Для y^* имеем:

$$f_j(x^*)-y^*A_j = \lim_\nu (f_j(x^{\sigma_\nu})-y^{\sigma_\nu}A_j) \leq \lim_\nu Б_{\sigma_\nu}=0, \; j\bar{\in}\mathcal{J},$$

$$f_j(x^*)-y^*A_j = \lim_\nu (f_j(x^{\sigma_\nu})-y^{\sigma_\nu}A_j) = 0, \quad j\in I,$$

$$|f_\tau(x^*)-y^*A_\tau| = \lim_\nu |\Delta_\tau^{\sigma_\nu}| \leq d_0 \lim_\nu Б_{\sigma_\nu}=0, \; \tau\in T.$$

Таким образом, x^* является оптимальным решением. Поэтому и любая предельная точка последовательности $\{x^\sigma\}$ является оптимальным решением.

Покажем теперь, что последовательность $\{x^\sigma\}$ не может иметь более одной предельной точки. Каждая предельная точка x^* является $\mathcal{J}^*$-оптимальной для базисного множества $\mathcal{J}^*=\{j: x_j^*>0\}$. Поэтому число различных предельных точек конечно. Если имеется несколько предельных точек, то найдется подпоследовательность $\{x^{\sigma_\nu}\}$ такая, что $\lim_\nu x^{\sigma_\nu}=x^*$, $\lim_\nu x^{\sigma_\nu+1}=x^{**}$, причем $x^*\neq x^{**}$. Положим $\mathcal{J}^{**}=\{j: x_j^{**}>0\}$. Тогда $\mathcal{J}_{\sigma_\nu}\supset\mathcal{J}^*$ и $\mathcal{J}_{\sigma_\nu+1}\supset\mathcal{J}^{**}$ при достаточно больших ν.

Так как по направлению $x^{**}-x^{*} \neq 0$ первая и вторая производные функции f равны нулю, то множество $J^{*} \cup J^{**}$ не является базисным. Поэтому шаги с номерами σ_ν являются шагами типа В, причем множество $J_{\sigma_\nu} \cup \{j'_{\sigma_\nu}\} \supset J_{\sigma_\nu} \cup J_{\sigma_\nu+1}$ не является базисным. В этом случае на основном шаге в качестве ℓ выбирается (единственное с точностью до множителя) направление, вдоль которого функция f линейна. Но тогда ℓ пропорционально $x^{**}-x^{*}$, что невозможно, так как $\frac{\partial f}{\partial \ell} > 0$ на основном шаге. Теорема полностью доказана.

Таким образом, если задача имеет решение, то в конечное число арифметических действий мы получим допустимое (и при том "базисное") решение, для которого условия оптимальности будут выполнены с заранее заданной точностью. Если же задача не имеет решения, то либо на каком-нибудь основном шаге выяснится, что функция f неограничена, либо получаемая последовательность допустимых решений неограничена. Последнее выяснить за конечное число шагов не удастся. Однако если заменить условие ограниченности принадлежностью некоторому (сколь угодно большому, но фиксированному) шару, то через конечное число шагов последовательность выйдет из него.

При нарушении условия невырожденности **) в процессе может наблюдаться зацикливание, как это имеет место в линейном программировании. Борьбу с этим явлением можно вести так же, как и в линейном программировании: либо не принимать специальных мер, считая, что зацикливание в задачах, которые не специально подобраны, мало вероятно, либо вводить полиномиальные добавки в правую часть системы (2) (см., напр., [6]).

Если для нахождения $s^{j'}$ и решения системы (17) используется матрица, обратная к матрице этой системы, то при изменении множества I на основном и дополнительных шагах эту обратную матрицу нужно пересчитывать. Необходимые коэффициенты разложения нового столбца содержатся среди компонент векторов семейства $\{s^{\tau}, \tau \in T\}$.

Литература

1. Канторович Л.В. Экономический расчет наилучшего использования ресурсов, Изд. АН СССР, М., 1959.
2. Юдин Д.Б., Гольштейн Е.Г. Линейное программирование, Физматгиз, М., 1969.

3. Булавский В.А., Рубинштейн Г.Ш. О решении задач выпуклого программирования с линейными ограничениями методом последовательного улучшения допустимого вектора, ДАН СССР, I50 : 2 (I963).
4. Рубинштейн Г.Ш., Шмырев В.И. Методы минимизации квазивыпуклой функции на выпуклом многограннике, Оптимизация I(I8), I97I.
5. Булавский В.А. Замечание о начале счета в линейном программировании, Оптимальное планирование I5, I970.
6. Рубинштейн Г.Ш. Конечномерные модели оптимизации, Изд. НГУ, М., I970.

Поступила в редакцию
28.XII. I97I г.