1972 г. ОПТИМИЗАЦИЯ Выпуск 5(22)

УДК 512.25/26 + 519.3

ОБ ОДНОМ ТИПЕ ПРОЕКЦИОННЫХ МЕТОДОВ В МАТЕМАТИЧЕСКОМ ПРОГРАММИРОВАНИИ

В.А.Булавский

Статья посвящена итеративным методам решения задач математического программирования. В первом параграфе рассматривается метод повышенной точности для нахождения решения совместной системы выпуклых неравенств в предположении, что их число сравнительно невелико. Во втором параграфе излагается метод решения больших систем неравенств, отличающийся от ранее рассмотренных методов этого типа (см., например, [1-4]) тем, что после проектирования на множестве решений систем, аппроксимирующих подсистемы заданной системы, каждая из этих подсистем заменяется линейным неравенством и производится проектирование на множество решений системы этих неравенств. Третий параграф посвящен модификации метода, позволяющей находить решение системы неравенств, ближайшее к данной точке. На мысль о возможности такой модификации автора навело знакомство с работой Лобырева А.И. (см. наст. выпуск). В этом же параграфе рассмотрено решение задачи выпуклого программирования в общем виде.

§ 1. Метод повышенной точности для решения системы выпуклых неравенств

В этом параграфе мы рассмотрим вопрос о нахождении решения системы неравенств в предположении, что основная трудность состоит не в количестве ограничений общего вида, а в наличии нелинейных (выпуклых) левых частей. В качестве основной операции мы будем использовать нахождение решения системы линейных неравенств, ближайшего к некоторой заданной точке. Как показано автором [5], сложность решения такой задачи зависит лишь от числа ограничений общего вида и не зависит от размерности пространства. При этом под ограничениями общего вида, как обычно, подразумеваются все ограничения, кроме ограничений сверху и снизу на отдельные переменные. Поскольку здесь мы не будем описывать алгорифм нахождения ближайшего решения системы, нам удобнее будет не выделять эти простейшие ограничения из общего числа.

Рассмотрим следующую задачу. Требуется найти вектор x в евклидовом пространстве R^q, удовлетворяющий системе неравенств

$$g_k(x) \le 0 \quad , \quad k \in \mathcal{K} , \tag{I}$$

где функции g_k заданы во всем пространстве, непрерывно дифференцируемы, выпуклы при всех k и линейны при $k \in \mathcal{K}' \subset \mathcal{K}$. Для сокращения обозначений мы в системе (I) не допускаем наличия линейных уравнений. Теоретически каждое такое уравнение всегда можно заменить двумя неравенствами. При практическом же применении метода этой замены можно и не делать.

Построим итерационный процесс. Задавшись произвольным $x_0 \in R^q$, образуем последовательность $\{x_n\}$, взяв в качестве x_{n+1} решение задачи

$$\min\{|x-x_n|^2 : g_k(x_n) + (\nabla g_k(x_n), x-x_n) \le 0, k \in K\}. \tag{2}$$

Через $\nabla g(x)$ здесь обозначен градиент функции g в точке x. Обозначим также через Q множество решений системы (I).

ТЕОРЕМА I. Если множество Q не пустое, то существует $\lim\limits_n x_n = \bar{x}$, причем $\bar{x} \in Q$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если $z \in Q$, то $g_k(x_n) + (\nabla g_k(x_n), z - x_n) \le g_k(z) \le 0$ в силу выпуклости функций g_k, так что точка z допустима в задаче (2), и потому $|x_{n+1} - z|^2 + |x_{n+1} - x_n|^2 \le |x_n - z|^2$. Это показывает, что последовательность $\{x_n\}$ ограничена, причем $\lim\limits_n |x_{n+1} - x_n| = 0$. Но $g_k(x_n) \le |\nabla g_k(x_n)||x_{n+1} - x_n|$

в силу определения x_{n+1}. Поэтому для предельной точки $\bar{x}$ последовательности $\{x_n\}$ получим, что $g_k(\bar{x}) \le 0$ при $k \in K$ и, следовательно, $\bar{x} \in Q$. Если в качестве z взять $\bar{x}$, то из монотонного убывания последовательности $\{|x_n - \bar{x}|\}$ и из того, что $\bar{x}$ является предельной точкой последовательности $\{x_n\}$, можно заключить, что $\lim\limits_n x_n = \bar{x}$. Теорема доказана.

Сформулируем обычное для математического программирования условие невырожденности системы (I).

УСЛОВИЕ C. Существует точка $\bar{z} \in Q$ такая, что

$$\max\{g_k(\bar{z}) : k \in K \setminus K'\} = -c < 0.$$

Мы можем теперь оценить скорость сходимости построенного итеративного метода.

ТЕОРЕМА 2. Если выполнено условие C и градиенты ∇g_k, $k \in K \setminus K'$, удовлетворяют условию Липшица: $|\nabla g_k(x') - \nabla g_k(x'')| \le \le \mathcal{L}|x' - x''|^{\alpha}$ при всех x' и x'' в некоторой окрестности $\bar{x}$, то либо решение $\bar{x}$ системы (I) получается в конечное число шагов, либо

$$\overline{\lim}\,(|x_{n+1} - \bar{x}| / |x_n - \bar{x}|^{1+\alpha}) \le \frac{\mathcal{L}|\bar{x} - \bar{z}|}{C(1+\alpha)}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Можно считать номер n настолько большим, что точки x_{n+k}, $k = 0, 1, 2, \ldots$, лежат в выпуклой окрестности точки $\bar{x}$, в которой выполнено условие Липшица. Отметим также, что $g_k(x_n) \le 0$ при $k \in K'$. Поэтому если $x_n \ne \bar{x}$, то хотя бы для одного $k \in K \setminus K'$ оказывается $g_k(x_n) > 0$. Таким образом, если решение $\bar{x}$ не получается в конечное число шагов, то $\bar{x} \ne \bar{z}$.

Поскольку x_{n+1} является решением задачи (2), то найдутся числа $\alpha_k^{(n)} \ge 0$, $k \in K$, такие, что $x_{n+1} = x_n - \sum\limits_{k \in K} \alpha_k^{(n)} \nabla g_k(x_n)$, причем $\alpha_k^{(n)} = 0$, если $g_k(x_n) + (\nabla g_k(x_n), x_{n+1} - x_n) < 0$. Поэтому

$$|x_{n+1} - x_n| \cdot |\bar{z} - x_{n+1}| \ge (x_{n+1} - x_n, \bar{z} - x_{n+1}) = \sum_{k \in K} \alpha_k^{(n)} (\nabla g_k(x_n), x_{n+1} - \bar{z}) =$$

$$= \sum_{k \in K} \alpha_k^{(n)} (\nabla g_k(x_n), x_{n+1} - x_n) + \sum_{k \in K} \alpha_k^{(n)} (\nabla g_k(x_n), x_n - \bar{z}) =$$

$$= -\sum_{k \in K} \alpha_k^{(n)} [g_k(x_n) + (\nabla g_k(x_n), \bar{z} - x_n)] \ge -\sum_{k \in K} \alpha_k^{(n)} g_k(\bar{z}) \ge c \sum_{k \in K \setminus K'} \alpha_k^{(n)}.$$

Таким образом,

$$\sum_{k\in K\setminus K'} \alpha_k^{(n)} \le \frac{|x_{n+1}-x_n|\cdot|x_{n+1}-\bar{z}|}{C} \tag{3}$$

Далее, $g_k(x_{n+1})=g_k(x_n)+\int_0^1(\nabla g_k(x_n+\lambda(x_{n+1}-x_n)),\ x_{n+1}-x_n)\,d\lambda\le$

$$\le\int_0^1(\nabla g_k(x_n+\lambda(x_{n+1}-x_n))-\nabla g_k(x_n),x_{n+1}-x_n)\,d\lambda\le\frac{\mathcal{L}|x_{n+1}-x_n|^{1+\alpha}}{1+\alpha}.$$

С другой стороны, $|x_{n+1}-x_n|^2=-\sum_{k\in K}\alpha_k^{(n)}(\nabla g_k(x_n),\ x_{n+1}-x_n)=$

$$=\sum_{k\in K}\alpha_k^{(n)}g_k(x_n)\le\sum_{k\in K\setminus K'}\alpha_k^{(n)}g_k(x_n)\le\Big(\sum_{k\in K\setminus K'}\alpha_k^{(n)}\Big)\ \frac{\mathcal{L}|x_n-x_{n-1}|^{1+\alpha}}{1+\alpha}.$$

Используя (3), получим

$$|x_{n+1}-x_n|\le\frac{|x_{n+1}-\bar{z}|\cdot\mathcal{L}}{C(1+\alpha)}|x_n-x_{n-1}|^{1+\alpha}.$$

Положим для краткости $\mathcal{D}_n=\frac{|x_{n+1}-\bar{z}|\cdot\mathcal{L}}{C(1+\alpha)}$. Как было отмечено в доказательстве теоремы I, $\mathcal{D}_n>\mathcal{D}_{n+1}>\dots$ и $\lim_n|x_{n+1}-x_n|=0$. Поэтому при достаточно больших n имеем

$$|x_{n+1}-\bar{x}|\le\sum_{k=n}^{\infty}|x_{k+1}-x_k|\le\sum_{\tau=1}^{\infty}\mathcal{D}_n^{\frac{(1+\alpha)^{\tau}-1}{\alpha}}\ |x_{n+1}-x_n|^{(1+\alpha)^{\tau}}=$$

$$=\mathcal{D}_n|x_{n+1}-x_n|^{1+\alpha}\sum_{\tau=1}^{\infty}(\mathcal{D}_n^{\frac{1}{\alpha}}|x_{n+1}-x_n|)^{(1+\alpha)^{\tau}-(1+\alpha)}\le\frac{\mathcal{D}_n\cdot|x_{n+1}-x_n|^{1+\alpha}}{1-\mathcal{D}_n^{1+\alpha}\cdot|x_{n+1}-x_n|^{\alpha(1+\alpha)}}.$$

Учитывая, что $|x_n-\bar{x}|\ge|x_{n+1}-x_n|$, найдем

$$\overline{\lim_n}(|x_{n+1}-\bar{x}|/|x_n-\bar{x}|^{1+\alpha})\le\lim_n\frac{\mathcal{D}_n}{1-\mathcal{D}_n^{1+\alpha}|x_{n+1}-x_n|^{\alpha(1+\alpha)}}=\frac{\mathcal{L}|\bar{x}-\bar{z}|}{C(1+\alpha)}.$$

Теорема доказана.

§ 2. Метод раздельного проектирования для больших систем

Здесь мы рассмотрим случай, когда число ограничений общего вида в системе (I) достаточно велико, так что точно решить задачу (2) оказывается невозможно. Разобьем множество индексов K на p подмножеств: $K=K_1\cup K_2\cup\dots\cup K_p$. Мы будем считать эти подмножества непересекающимися, что не является ограничением, так как всегда в системе (I) можно считать некоторые неравенства повторенными нужное число раз. При $\tau=1,2,\dots,p$

обозначим

$$Q_\tau=\{x\in R^q:\ g_k(x)\le 0,\ \ k\in K_\tau\},$$

$$Q_\tau(z)=\{x\in R^q:\ g_k(z)+(\nabla g_k(z),\ x-z)\le 0,\ k\in K_\tau\}$$

и предположим, что число p и число ограничений общего вида в подсистемах, определяющих множества Q_τ, не слишком велики, так что мы в состоянии решать встречающиеся ниже задачи о нахождении ближайшей точки.

Построим итерационный процесс. Предположим, что уже получена некоторая точка $x_n\in R^q$. Если $x_n\in Q_\tau$ (или, что то же, $x_n\in Q_\tau(x_n)$), то выберем числа $v_k^{(n)}\ge 0$ при $k\in K_\tau$ произвольно, потребовав лишь, чтобы $v_k^{(n)}=0$ для тех k, для которых $g_k(x_n)<0$. Если же $x_n\notin Q_\tau$, то обозначим через $x_{n,\tau}$ решение задачи

$$\min\{|x-x_n|^2:\ x\in Q_\tau(x_n)\}, \tag{4}$$

и числа $v_k^{(n)}\ge 0$ при $k\in K_\tau$ выберем так, что

$$x_{n,\tau}=x_n-\sum_{k\in K_\tau} v_k^{(n)}\nabla g_k(x_n) \tag{5}$$

и $v_k^{(n)}=0$ при $g_k(x_n)+(\nabla g_k(x_n),\ x_{n,\tau}-x_n)<0$. Нужные $v_k^{(n)}$ получаются попутно с решением задачи (4). Положим теперь при $\tau=1,2,\dots,p$

$$a_\tau^{(n)}=\sum_{k\in K_\tau} v_k^{(n)}\nabla g_k(x_n),\qquad \alpha_\tau^{(n)}=\sum_{k\in K_\tau} v_k^{(n)} g_k(x_n) \tag{6}$$

и в качестве x_{n+1} возьмем решение задачи

$$\min\{|x-x_n|^2:\ \alpha_\tau^{(n)}+(a_\tau^{(n)},\ x-x_n)\le 0,\ \tau=1,2,\dots,p\}. \tag{7}$$

ЛЕММА I. Если $Q_\tau\ne\emptyset$, $w=\lim\limits_s w_s$ и при каждом s вектор y_s решает задачу: $\min\{|x-w_s|^2:\ x\in Q_\tau(w_s)\}$, то последовательность $\{y_s\}$ ограничена, причем $\underline{\lim}\,|y_s-w_s|\ge|y-w|$, где y решает задачу: $\min\{|x-w|^2:\ x\in Q_\tau(w)\}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если некоторый вектор $\bar w\in Q_\tau$, то $\bar w\in Q_\tau(w_s)$ при всех s. Поэтому $|y_s-w_s|\le|\bar w-w_s|$, и последовательность $\{y_s\}$ ограничена. Пусть $\lim\limits_\nu y_{s_\nu}=\tilde y$, причем $\lim\limits_\nu|y_{s_\nu}-w_{s_\nu}|=\underline{\lim\limits_s}\,|y_s-w_s|$. В силу непрерывной дифференцируемости функций g_k вектор $\tilde{y} \in Q_\tau(w)$ и, следовательно, $|y-w| \le |\tilde{y}-w| = \lim\limits_s |y_s - w_s|$. Лемма доказана.

ТЕОРЕМА 3. Если множество Q непустое, то существует $\lim\limits_n x_n = \bar{x}$, причем $\bar{x} \in Q$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $z \in Q$. Так как при этом $z \in Q_\tau(x_n)$, то $\alpha_\tau^{(n)} + (a_\tau^{(n)}, z - x_n) \le 0$ при всех τ. Как и в доказательстве теоремы I, отсюда следует, что последовательность $\{x_n\}$ ограничена и

$$\lim_n |x_{n+1} - x_n| = 0. \tag{8}$$

Пусть $\bar{x}$ – некоторая предельная точка последовательности $\{x_n\}$ и $\lim\limits_\nu x_{n_\nu} = \bar{x}$. Покажем, что $\bar{x} \in Q = \bigcap\limits_{\tau=1}^{p} Q_\tau$. Предположим противное. Пусть $\bar{x} \bar{\in} Q_{\tau_0}$. Тогда $\bar{x} \bar{\in} Q_{\tau_0}(\bar{x})$ и $x_{n_\nu} \bar{\in} Q_{\tau_0}$, начиная с некоторого ν. Обозначим через x^* решение задачи: $\min\{|x-\bar{x}| : x \in Q_{\tau_0}(\bar{x})\}$. По лемме I $\lim\limits_\nu |x_{n_\nu} - x_{n_\nu,\tau_0}| \ge |x^* - \bar{x}| > 0$. Но тогда $|x_{n_\nu+1} - x_{n_\nu}| \ge |x_{n_\nu} - x_{n_\nu,\tau_0}| \ge \frac{1}{2}|x^* - \bar{x}|$ при достаточно больших ν, что противоречит (8). Таким образом, $\bar{x} \in Q$. Взяв в качестве z точку $\bar{x}$, как и при доказательстве теоремы I, найдем, что $\bar{x} = \lim\limits_n x_n$. Теорема доказана.

Даже при достаточной гладкости функций g_k ожидать столь же быстрой сходимости построенного процесса, как и в первом параграфе, конечно, нельзя. Доказываемая ниже теорема 4, однако, показывает, что процесс сходится со скоростью геометрической прогрессии.

ЛЕММА 2. Для всякого конечного конуса $\Gamma \subset R^q$ с образующими $w_s \ne 0$, $s = 1, 2, \ldots, r$, существует число $\gamma > 0$ такое, что $\max\limits_{s=1,\ldots,r} (h, w_s) \ge \gamma |h|$ при любом $h \in \Gamma$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, что для каждого n найдется $z_n \in \Gamma$ такой, что $|z_n| = 1$ и $(z_n, w_s) \le \frac{1}{n}$ при $s = 1, \ldots, r$. Для предельной точки z^* последовательности $\{z_n\}$ тогда получим: $z^* \in \Gamma$, $|z^*| = 1$, $(z^*, w_s) \le 0$ при $s = 1, 2, \ldots, r$. Но

$z^* = \sum_{\sigma=1}^{z} \delta_\sigma w_\sigma$ при некоторых $\delta_\sigma \geqslant 0$. Так что $|z^*|^2 = \sum_{\sigma=1}^{z} \delta_\sigma (z^*, w_\sigma) \leqslant 0$. Полученное противоречие доказывает лемму.

Обозначим через Γ коническую оболочку семейства векторов $\{\nabla g_k(\bar{x}) : g_k(\bar{x}) = 0\}$ и определим число γ согласно лемме 2. Положим также $\eta = \max\{|\nabla g_k(\bar{x})| : k \in K\}$ и предположим, что $x_n \neq \bar{x}$ при всех n.

ТЕОРЕМА 4. Если выполнено условие C, то

$$\overline{\lim_n} (|x_{n+1} - \bar{x}| / |x_n - \bar{x}|) \leqslant \sqrt{1 - \left(\frac{\gamma}{\eta}\right)^2}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поскольку $\bar{x} = \lim_n x_n$, а $|x_{n,\tau} - \bar{x}| \leqslant |x_n - \bar{x}|$, то при достаточно больших n окажется $v_k^{(n)} = 0$ для тех k, для которых $g_k(\bar{x}) < 0$, так что соответствующие ограничения, начиная с некоторого шага, фактически в процессе участвовать не будут. Чтобы не усложнять обозначений, предположим поэтому, что $g_k(\bar{x}) = 0$ при $k \in K$.

В силу определения x_{n+1} через x_n найдутся числа $u_\tau^{(n)} \geqslant 0$ такие, что $x_{n+1} = x_n - \sum_{\tau=1}^{p} u_\tau^{(n)} a_\tau^{(n)}$, или

$$x_{n+1} - x_n = -\sum_{k \in K} \delta_k^{(n)} \nabla g_k(x_n), \tag{9}$$

где $\delta_k^{(n)} = u_\tau^{(n)} v_k^{(n)} \geqslant 0$ при $k \in K_\tau$, $\tau = 1, 2, \ldots, p$. Просуммировав равенства (9), получим

$$x_{n+m} - x_n = \sum_{k \in K} \left(\sum_{\nu=n}^{n+m-1} \delta_k^{(\nu)} \right) \nabla g_k(x_\nu). \tag{10}$$

Возьмем достаточно малое положительное ε и предположим, что $|\nabla g_k(x_\nu) - \nabla g_k(\bar{x})| \leqslant \varepsilon$ для $k \in K \setminus K'$ и $\nu \geqslant n$. Напомним также, что $\nabla g_k(x_\nu) = \nabla g_k(\bar{x})$ при $k \in K'$. Умножив (10) скалярно на $\bar{z} - \bar{x}$, получим

$$(\bar{z} - \bar{x}, x_{n+m} - x_n) = -\sum_{k \in K} \left(\sum_{\nu=n}^{n+m-1} \delta_k^{(\nu)} \right) (\nabla g_k(\bar{x}), \bar{z} - \bar{x}) +$$
$$+ \sum_{k \in K \setminus K'} \left(\sum_{\nu=n}^{n+m-1} \delta_k^{(\nu)} \right) (\nabla g_k(\bar{x}) - \nabla g_k(x_\nu), \bar{z} - \bar{x}) \geqslant -\sum_{k \in K} \left(\sum_{\nu=n}^{n+m-1} \delta_k^{(\nu)} \right) g_k(\bar{z}) -$$
$$-\varepsilon \sum_{k \in K \setminus K'} \left(\sum_{\nu=n}^{n+m-1} \delta_k^{(\nu)} \right) \cdot |\bar{z} - \bar{x}| \geqslant (c - \varepsilon |\bar{z} - \bar{x}|) \cdot \left(\sum_{k \in K \setminus K'} \sum_{\nu=n}^{n+m-1} \delta_k^{(\nu)} \right).$$

В силу ограниченности последовательности $\{x_{n+m}\}_{m=1}^{\infty}$ ряды $\sum_{\nu=n}^{\infty} \delta_k^{(\nu)}$, $k \in K \setminus K'$, с неотрицательными членами сходятся, причем

$$\sum_{k \in K \setminus K'} \left(\sum_{\nu=n}^{\infty} \delta_k^{(\nu)} \right) \le \lambda_\varepsilon |\bar{x} - x_n|, \tag{11}$$

где $\lambda_\varepsilon = \frac{|\bar{\bar{x}} - \bar{x}|}{C - \varepsilon \cdot |\bar{\bar{x}} - \bar{x}|}$. Согласно (10) $x_{n+m} - x_n = -h_n^{(m)} + \sum_{k \in K \setminus K'} \left(\sum_{\nu=n}^{n+m-1} \delta_k^{(\nu)} \right) (\nabla g_k(\bar{x}) - \nabla g_k(x_\nu))$, где $h_n^{(m)} \in \Gamma$.
Таким образом, расстояние от $x_{n+m} - x_n$ до Γ не больше, чем $\varepsilon \cdot \lambda_\varepsilon |\bar{x} - x_n|$. Устремив m к ∞, получим, что $\bar{x} - x_n = -h_n + \bar{h}_n$, где $h_n \in \Gamma$, а $|\bar{h}_n| \le \varepsilon \cdot \lambda_\varepsilon \cdot |\bar{x} - x_n|$. Поэтому

$$\max_{k \in K} (x_n - \bar{x}, \nabla g_k(x_n)) = \max_{k \in K} [(h_n - \bar{h}_n, \nabla g_k(\bar{x})) + (x_n - \bar{x}, \nabla g_k(x_n) - \nabla g_k(\bar{x}))] \ge \max_{k \in K} (h_n, \nabla g_k(\bar{x})) - \varepsilon \cdot \lambda_\varepsilon |\bar{x} - x_n| \cdot \eta - \varepsilon |\bar{x} - x_n|.$$

Используя лемму 2, получим

$$\max_{k \in K} (x_n - \bar{x}, \nabla g_k(x_n)) \ge \gamma_\varepsilon \cdot |x_n - \bar{x}|, \tag{12}$$

где $\gamma_\varepsilon = \gamma - \varepsilon - \varepsilon \cdot \lambda_\varepsilon \cdot \eta$.

По определению $x_{n,\tau}$ и x_{n+1} при каждом τ имеем: $|a_\tau^{(n)}| \cdot |x_n - x_{n+1}| \ge (a_\tau^{(n)}, x_n - x_{n+1}) \ge \alpha_\tau^{(n)} = \sum_{k \in K_\tau} v_k^{(n)} g_k(x_n) = \sum_{k \in K_\tau} v_k^{(n)} (\nabla g_k(x_n), x_n - x_{n,\tau}) = |a_\tau^{(n)}|^2$. Таким образом,

$$|x_{n+1} - x_n| \ge |a_\tau^{(n)}|^2, \quad \tau = 1, 2, \dots, p. \tag{13}$$

С другой стороны, согласно (12)

$$\gamma_\varepsilon |x_n - \bar{x}| \le \max_{k \in K} (x_n - \bar{x}, \nabla g_k(x_n)) = (x_n - \bar{x}, \nabla g_{k_0}(x_n)) =$$

$$= (x_n - \bar{x}, \nabla g_{k_0}(\bar{x})) + (x_n - \bar{x}, \nabla g_{k_0}(x_n) - \nabla g_{k_0}(\bar{x})) \le g_{k_0}(x_n) + \varepsilon \cdot |x_n - \bar{x}| \le$$

$$\le (\nabla g_{k_0}(x_n), x_n - x_{n,\tau_0}) + \varepsilon \cdot |x_n - \bar{x}| \le (\max_{k \in K} |\nabla g_k(x_n)|) \cdot |a_{\tau_0}^{(n)}| + \varepsilon \cdot |x_n - \bar{x}|.$$

Здесь τ_0 выбрано так, чтобы $k_0 \in K_{\tau_0}$. Используя (13), получим

$$|x_{n+1} - x_n| \ge \frac{\gamma_\varepsilon - \varepsilon}{\max_{k \in K} |\nabla g_k(x_n)|} \cdot |x_n - \bar{x}|. \tag{14}$$

Поскольку $|x_{n+1}-\bar{x}|^2+|x_{n+1}-x_n|^2 \leq |x_n-\bar{x}|^2$, то из (I4) найдем, что

$$\frac{|x_{n+1}-\bar{x}|}{|x_n-\bar{x}|} \leq \sqrt{1-\left(\frac{\gamma_\varepsilon-\varepsilon}{\max\limits_{k\in K} |\nabla g_k(x_n)|}\right)^2}.$$

В пределе получим $\overline{\lim\limits_n}(|x_{n+1}-\bar{x}|/|x_n-\bar{x}|) \leq \sqrt{1-\left(\frac{\gamma_\varepsilon-\varepsilon}{q}\right)^2}$.

Поскольку ε можно взять сколь угодно малым, а $\lim\limits_{\varepsilon\to 0}(\gamma_\varepsilon-\varepsilon)=\gamma$, то отсюда получается утверждение теоремы.

§ 3. Применение к решению экстремальных задач

Предположим, что нужно не просто решить систему (I), а найти ее решение, ближайшее к заданной точке x_0, которую мы используем в качестве начальной точки итерационного процесса. Видоизменим метод предыдущего параграфа. Именно, определив, как и раньше, $x_{n,\tau}$ и $v_k^{(n)}$, для определения x_{n+1} по x_n вместо задачи (7) используем следующую задачу:

$$\min\left\{|x-x_0|^2 : \alpha_\tau^{(n)}+(\alpha_\tau^{(n)}, x-x_n)\leq 0,\ \tau=1,\dots,p,\ (x-x_n, x_n-x_0)\geq 0\right\} \quad (I5)$$

Через $\bar{x}$ мы снова обозначим искомое решение, то есть ближайшую к x_0 точку множества Q (если, конечно, множество Q непустое). Так как $\bar{x}$ удовлетворяет ограничениям задачи (I5) при $n=0$, то по определению последовательности $\{x_n\}$, как нетрудно проверить, $|x_n-x_0|\leq|\bar{x}-x_0|$. Поэтому если на некотором шаге окажется, что $x_n\in Q$, то $x_n=\bar{x}$ и решение получится в конечное число шагов. Кроме того, если множество Q непустое, то последовательность $\{x_n\}$ ограничена. Если же множество Q пустое, то либо на некотором шаге задача (I5) или одна из задач (4) окажется неразрешимой (ввиду пустоты множества допустимых векторов), либо последовательность $\{x_n\}$ неограничена. Это утверждение непосредственно следует из доказываемой ниже теоремы.

ТЕОРЕМА 5. *Если последовательность $\{x_n\}$ бесконечна и ограничена, то множество Q непустое, последовательность $\{x_n\}$ сходится и $\lim\limits_n x_n=\bar{x}$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как x_n не удовлетворяет системе (I), то $x_{n+1} \neq x_n$. Ввиду неравенства $(x_{n+1}-x_n, x_n-x_0) \geq 0$, оказывается, что $|x_{n+1}-x_0|^2 > |x_n-x_0|^2$. В силу ограниченности последовательности $\{x_n\}$ существует $\lim_n |x_n-x_0| = r > 0$, и так как $|x_{n+1}-x_0|^2 \geq |x_n-x_0|^2 + |x_{n+1}-x_n|^2$, то $\lim_n |x_{n+1}-x_n| = 0$. Пусть x^* — некоторая предельная точка последовательности $\{x_n\}$ и $\lim_\nu x_{n_\nu} = x^*$. Нам нужно показать, что $x^* \in Q$. Предположим противное, то есть что для некоторого $k_0 \in K_{\tau_0}$ оказалось $g_{k_0}(x^*) = 2\delta > 0$. Но тогда при достаточно больших ν и $g_{k_0}(x_{n_\nu}) \geq \delta$. Поэтому $|x_{n_\nu,\tau_0} - x_{n_\nu}| \geq \delta / |\nabla g_{k_0}(x_{n_\nu})| \geq \delta / M$, где $M = \sup |\nabla g_{k_0}(x_{n_\nu})|$. Но $|x_{n_\nu+1} - x_{n_\nu}| \geq |x_{n_\nu,\tau_0} - x_{n_\nu}| \geq \delta/M$, что противоречит равенству $\lim_n |x_{n+1}-x_n| = 0$. Таким образом, $x^* \in Q$ и, следовательно, $x^* = \bar{x}$. Поскольку в качестве x^* можно взять любую предельную точку последовательности $\{x_n\}$, то теорема доказана.

Предположим теперь, что нам нужно максимизировать линейную форму (c, x) на множестве решений системы (I). Использовав, скажем, метод предыдущего параграфа, найдем некоторое решение y_0 системы (I). Затем положим $z_0 = y_0 + \lambda_0 c$ и найдем решение y_1 системы (I), ближайшее к z_0, и так далее. Если уже найден вектор y_n, то в качестве y_{n+1} возьмем решение системы (I), ближайшее к вектору $z_n = y_n + \lambda_n c$. Здесь $\{\lambda_n\}$ — некоторая последовательность строго положительных чисел.

ТЕОРЕМА 6. *Если форма (c, x) достигает максимума на множестве Q решений системы (I) и ряд $\sum_n \lambda_n$ расходится, то последовательность $\{x_n\}$ сходится к некоторой точке максимума формы (c, x) на множестве Q.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Заметим, что доказательства требует лишь случай $|c| \neq 0$. Для каждой точки $z \in R^q$ через Pz обозначим точку множества Q, ближайшую к z. В силу выпуклости множества Q при всех z', $z'' \in R^q$ имеет место неравенство $|Pz' - Pz''| \leq |z' - z''|$. В частности, если $\tilde{z}$ — некоторая точка максимума формы (c, x) на Q, то $P(\tilde{z} + \alpha c) = \tilde{z}$ при любом $\alpha \geq 0$, и потому $|y_{n+1} - \tilde{z}| = |P(y_n + \lambda_n c) - P(\tilde{z} + \lambda_n c)| \leq |y_n - \tilde{z}|$. Так что последовательность $\{y_n\}$ ограничена.

Если $x_n \bar{\in} Q$, то $x_{n+1} \bar{\in} Q$. Действительно, если бы x_{n+1} принадлежало Q, то вектор $(\lambda_n x_{n+1} + \lambda_{n+1} y_n)/(\lambda_n + \lambda_{n+1}) = [\lambda_n (y_{n+1} + \lambda_{n+1} c) + \lambda_{n+1} (x_n - \lambda_n c)]/(\lambda_n + \lambda_{n+1}) = (\lambda_n y_{n+1} + \lambda_{n+1} x_n)/(\lambda_n + \lambda_{n+1}) = \tilde{y}$ также принадлежал бы Q. Но $|\tilde{x} - x_n| = \lambda_n |y_{n+1} - x_n|/(\lambda_n + \lambda_{n+1}) < |y_{n+1} - x_n|$, что противоречит равенству $y_{n+1} = P x_n$. С другой стороны, если бы x_n принадлежали Q при всех n, то при всех n было бы $y_{n+1} = y_n + \lambda_n c$ и форма (c, x) была бы неограниченной на Q. Поэтому начиная с некоторого n все x_n не принадлежат множеству Q, и потому $|x_n - y_{n+1}| > 0$.

Положим $S_{n+1} = (x_n - y_{n+1})/|x_n - y_{n+1}|$ и $\alpha = \sup_n (c, S_n)$. Так как $|x_n - y_{n+1}| \leq \lambda_n \cdot |c|$, то $\Delta_n = (c, y_{n+1}) - (c, y_n) = (c, y_{n+1}) - (c, x_n - \lambda_n c) = \lambda_n \cdot |c|^2 - (c, x_n - y_{n+1}) \geq \lambda_n \cdot |c|^2 - \alpha \cdot |x_n - y_{n+1}| \geq \lambda_n \cdot |c| \cdot (|c| - \alpha)$. Поскольку ряд $\sum_n \Delta_n$ сходится, а ряд $\sum_n \lambda_n$ расходится, то $\alpha = |c|$. Если при некотором n окажется $(c, S_n) = |c|$, то есть $S_n = c/|c|$, то это означает, что вектор y_n является решением интересующей нас задачи на максимум. При этом $y_{n+k} = y_n$ при всех $k = 1, 2, \ldots$. Пусть $(c, S_n) \neq |c|$ при всех n. Выберем последовательность $\{n_\nu\}$ так, что $\lim_\nu (c, S_{n_\nu}) = |c|$. При этом, очевидно, $\lim_\nu S_{n_\nu} = c/|c|$. Ввиду ограниченности последовательности $\{y_n\}$ можно считать, что $\lim_\nu y_{n_\nu} = \bar{y}$. Так как $(S_{n_\nu}, x - y_{n_\nu}) \leq 0$ при любом $x \in Q$, то в пределе получим, что $(c, x - \bar{y}) \leq 0$ при любом $x \in Q$. Так что вектор $\bar{y}$ максимизирует форму (c, x) на множестве Q. Если теперь в качестве $\tilde{x}$ в начале доказательства взять $\bar{y}$, то получим, что $|y_{n+1} - \bar{y}| \leq |y_n - \bar{y}|$, и так как $\lim_\nu y_{n_\nu} = \bar{y}$, то $\lim_n y_n = \bar{y}$. Теорема доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ I. Похожим образом можно доказать, что к точке максимума формы (c, x) сходится и последовательность $\{P(x_0 + \lambda_n c)\}$, если $\lambda_n \to +\infty$. Однако с вычислительной точки зрения представляется более предпочтительным ранее рассмотренный процесс.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Если требуется максимизировать некоторую вогнутую функцию f на множестве Q, то эту задачу можно свести к максимизации линейной формы t при дополнительном выпуклом ограничении $t - f(x) \leq 0$.

Литература

1. Булавский В.А. Итеративный метод решения задачи линейного программирования, ДАН СССР, 137:2 (1961).
2. Булавский В.А. Итеративный метод решения задачи линейного программирования, Матер. конф. по прим. матем. методов и ЭВМ в планир., Новосибирск, 1962.
3. Еремин И.И. Обобщение релаксационного метода Моцкина-Агмона, УМН, 20:2 (1965).
4. Еремин И.И., О системах неравенств с выпуклыми функциями в левых частях, Изв. АН СССР, 30:2 (1966).
5. Булавский В.А. Один специальный алгорифм квадратичного программирования, Наст. сб., стр. 23.

Поступила в редакцию
28.II. 1972 г.