УДК 512.25 / 26

О СИТУАЦИЯХ, БЛИЗКИХ К ВЫРОЖДЕННЫМ

В.А. Булавский

Ситуацией вырождения в линейном программировании принято называть положение, когда система из m (линейно независимых) уравнений имеет решение с числом ненулевых компонент, меньшим, чем m. При решении задач, в которых встречается ситуация вырождения, методом последовательного улучшения допустимого решения могут встретиться шаги, не приводящие к возрастанию максимизируемой функции. При этом сам метод становится теоретически небезупречным, так как может встретиться зацикливание, состоящее в бесконечном переборе различных базисов, связанных с одним и тем же допустимым решением. Поэтому для преодоления ситуации вырождения разработаны дополнительные приемы, состоящие либо во внесении достаточно малого численного возмущения в правую часть системы ограничений, либо в добавлении полиномиальных слагаемых с лексикографическим упорядочением по коэффициентам (см., напр., [1], [2]). Эти приемы исчерпывают вопрос в теоретическом плане, однако при практическом применении, как нам кажется, требуют определенной доработки.

Во-первых, они рассчитаны на "чистую" ситуацию вырождения, когда среди базисных компонент решения встречаются точные нули. При выполнении вычислений с округлениями наличие очень малого числа среди базисных компонент решения не менее опасно, чем наличие чистого нуля. Во-вторых, проведение обычных итераций при наличии нулей (или почти нулей) среди базисных компонент сопряжено с повышенной возможностью прохождения через базисы, близкие к линейной зависимости, что влечет за собой потерю точности в дуальном базисе (обратной матрице). В настоящей работе рассматривается некоторая модификация метода последовательного улучшения, состоящая в том, что сначала отыскивается некоторая положительная комбинация столбцов системы ограничений, введение которой в базис обеспечивает возрастание максимизируемой функции, а затем столбцы этой комбинации вводятся в базис вместо группы ранее входивших в него столбцов. При таком проведении метода мы не объединяем в случайные пары вводимые и выводимые базисные столбцы, что может благоприятно сказаться на точности вычислений. Увеличение трудоемкости пропорционально порядку вырождения (то есть числу нулевых базисных компонент решения) и примерно такое же, как при введении полиномиальных добавок.

Рассмотрим задачу линейного программирования в следующей постановке. Требуется найти неотрицательные значения переменных x_s , $s \in S = \{1, \dots, n\}$, удовлетворяющие системе уравнений

$$\sum_{s \in S} x_s A_s = P$$

и доставляющие максимум линейной форме $\sum\limits_{s \in S} c_s x_s$. Здесь P, A_s $(s \in S)$ – столбцы из R^m, а c_s $(s \in S)$ – вещественные числа. Предположим, что задача решается модифицированным симплекс-методом и к началу очередного шага имеется подмножество $\mathcal{J}$ множества S , обладающее свойствами:

а) семейство $\{A_j,\ j \in \mathcal{J}\}$ является базисом пространства R^m. Дуальный базис мы обозначим через $\{\mathcal{D}_i,\ i \in \mathcal{J}\}$, так что $\mathcal{D}_i A_j = 0$, если $i \neq j$, и $\mathcal{D}_j A_j = 1$ при $j \in \mathcal{J}$;

б) числа $\mathcal{D}_i P$ (базисные компоненты текущего x) неотрицательны; при этом через $x^{\mathcal{J}}$ мы обозначим допустимое решение, у которого компонента с номером i равна $\mathcal{D}_i P$, если $i \in \mathcal{J}$, и нулю в противном случае.

Шаг метода обычно состоит в замене некоторого элемента $j'' \in \mathcal{J}$ другим элементом j' так, чтобы новое множество $\bar{\mathcal{J}} = (\mathcal{J} \setminus \{j''\}) \cup \{j'\}$ удовлетворяло тем же условиям, что и $\mathcal{J}$, и значение максимизируемой формы на $x^{\bar{\mathcal{J}}}$ было больше, чем на $x^{\mathcal{J}}$. Такого возрастания не будет, если $x^{\mathcal{J}}_{j''} = 0$. Если же $x^{\mathcal{J}}_{j''}$ положительно, но мало, то форма возрастет незначительно. Предположим поэтому, что в $\mathcal{J}$ выделено подмножество

I тех номеров, которые нежелательны для непосредственного удаления (те i, при которых $x_i^{\mathcal{J}}$ равно нулю или близко к нему). При этом мы будем исходить из того, что число таких номеров сравнительно невелико. Кроме того, мы положим $y=\sum\limits_{j\in\mathcal{J}} c_j \mathcal{D}_j$ и условимся в дальнейшем через Δ_S обозначать величину $c_S - yA_S$.

Пусть мы нашли множество $K\subset S\setminus\mathcal{J}$ с числом элементов не большим, чем $|I|+1$, и неотрицательные числа α_K, $K\in\mathcal{J}$, одно из которых равно единице, такие, что

$$\sum_{K\in K}\alpha_K(\mathcal{D}_i A_K)\leq 0\ ,\quad i\in I,$$

$$\sum_{K\in K}\alpha_K\,\Delta_K \geq Б > 0.$$

Положим для дальнейшего $g_i = \sum\limits_{K\in K}\alpha_K(\mathcal{D}_i A_K)$, $i\in\mathcal{J}$.

Решим следующую вспомогательную задачу линейного программирования порядка $|K|$.

$$\sum_{i\in\mathcal{J}}\eta_i(\mathcal{D}_i A_K)\geq\Delta_K\ ,\ K\in K,$$

$$\eta_i\geq 0\ ,\quad i\in\mathcal{J}, \tag{I}$$

$$\sum_{i\in\mathcal{J}} x_i^{\mathcal{J}}\eta_i \longrightarrow min.$$

Пусть $\{\eta_i\,,\ i\in\mathcal{J}\}$ - решение задачи (I), $\{\xi_K\,,\ K\in K\}$ - решение соответствующей двойственной задачи, а $\mathcal{J}'$ и K' - множества номеров базисных η_i и ξ_K (некоторые из ограничений в (I) могли оказаться несущественными, и их номера мы в K' не включили). При этом, конечно, $|\mathcal{J}'|=|K'|$, а матрица

$$\{(\mathcal{D}_i A_K)\ ,\ i\in\mathcal{J}',\ K\in K'\} \tag{2}$$

неособенная.

Шаг в решении основной задачи состоит в замене множества $\mathcal{J}$ на множество $\bar{\mathcal{J}}=(\mathcal{J}\setminus\mathcal{J}')\cup K'$. Ввиду неособенности матрицы (2) семейство столбцов $\{A_j\,,\ j\in\bar{\mathcal{J}}\}$ линейно независимое и, следовательно, является базисом R^m, причем дуальный базис $\{\bar{\mathcal{D}}_i\,,\ i\in\bar{\mathcal{J}}\}$ может быть получен по формулам

$$\bar{\mathcal{D}}_\ell=\sum_{i\in\mathcal{J}'}\gamma_{\ell i}\mathcal{D}_i\ ,\quad \ell\in K',$$

$$\bar{\mathcal{D}}_j = \mathcal{D}_j - \sum_{\ell\in K'} \beta_{j\ell} \bar{\mathcal{D}}_\ell , \quad j \in \bar{\mathcal{J}} \setminus K',$$

где $\{\gamma_{\ell i}, \ \ell\in K', \ j\in\bar{\mathcal{J}}\}$ – матрица, обратная к матрице (2), а $\beta_{j\ell} = (\mathcal{D}_j A_\ell)$, $j\in\bar{\mathcal{J}}\setminus K'$, $\ell\in K'$. При таком выборе множества $\bar{\mathcal{J}}$ имеем

$$x_\ell^{\bar{\mathcal{J}}} = \bar{\mathcal{D}}_\ell P = \sum_{i\in\mathcal{J}'} \gamma_{\ell i} \mathcal{D}_i P = \sum_{i\in\mathcal{J}'} \gamma_{\ell i} x_i^{\mathcal{J}} = \xi_\ell \geqslant 0 , \quad \ell\in K',$$

$$x_j^{\bar{\mathcal{J}}} = \bar{\mathcal{D}}_j P = \mathcal{D}_j P - \sum_{\ell\in K'} \beta_{j\ell} \bar{\mathcal{D}}_\ell P = x_j^{\mathcal{J}} - \sum_{\ell\in K'} (\mathcal{D}_j A_\ell)\xi_\ell \geqslant 0, \ j\in\bar{\mathcal{J}}\setminus K'.$$

Кроме того, как нетрудно проверить, значение максимизируемой формы на допустимом решении $x^{\bar{\mathcal{J}}}$ на величину $\sum_{\kappa\in K} \xi_\kappa \Delta_\kappa$ больше, чем на $x^{\mathcal{J}}$. В то же время набор $\{\varepsilon\alpha_\kappa, \ \kappa\in K\}$, где

$$\varepsilon = \min\{x_i^{\mathcal{J}}/g_i : i\in\mathcal{J}\setminus I , \ g_i > 0\},$$

является допустимым решением для задачи, двойственной (I). Поэтому

$$\sum_{\kappa\in K'} \xi_\kappa \Delta_\kappa \geqslant \varepsilon \sum_{\kappa\in K} \Delta_\kappa \geqslant \varepsilon Б .$$

Правая часть этой цепочки неравенств положительна, так как $x_i^{\mathcal{J}} > 0$ при $i\in\mathcal{J}\setminus I$. Заметим, что $\varepsilon = +\infty$, если задача (I) не имеет решения. При этом не имеет решения и основная задача (максимизируемая форма не ограничена сверху).

Рассмотрим теперь алгорифм нахождения множества K. Мы применим модифицированный симплекс-метод с поддерживанием обратной матрицы лексикографически положительной.

Упорядочим как-нибудь множество I и возьмем $K_0 = I$. Матрица $\delta^{(0)} = \{\delta_{\kappa i}^{(0)}, \ \kappa\in K_0, \ i\in I\}$, обратная к матрице $\{(\mathcal{D}_i A_\kappa), \ i\in I, \ \kappa\in K_0\}$, оказывается при этом единичной и, следовательно, лексикографически положительной. Выберем также барьер $Б > 0$ и будем осуществлять описанные ниже шаги.

Пусть уже построены множество K_τ и лексикографически положительная матрица $\delta^{(\tau)} = \{\delta_{\kappa i}^{(\tau)}, \ \kappa\in K_\tau, \ i\in I\}$, обратная к матрице $\{(\mathcal{D}_i A_\kappa), \ i\in I, \ \kappa\in K_\tau\}$. Положим $\zeta_i = \sum_{\kappa\in K_\tau} \delta_{\kappa i}^{(\tau)} \Delta_\kappa$, $i\in I$, и подсчитаем строку $z = y + \sum_{i\in I} \zeta_i \mathcal{D}_i$. Возможны следующие случаи.

1. Нашелся номер k', для которого $c_{k'} - zA_{k'} \geqslant Б$. Подсчитаем числа $\alpha_k = -\sum_{i\in I} \delta_{ki}^{(\tau)} (\mathcal{D}_i A_{k'})$. Если все они оказались неотрицательными, то работа алгорифма на этом заканчивается, и нужно положить $K = (K_\tau \overset{*}{\cup} \{k'\}) \setminus I$, $\alpha_{k'} = 1$. Нетрудно проверить, что построенные таким образом множество K и числа α_k, $k \in K$, обладают нужными свойствами. Если же среди чисел α_k, $k \in K_\tau$, имеются отрицательные, то нужно найти $k'' \in K_\tau$, при котором $\alpha_{k''} < 0$ и строка $\left\{ \frac{1}{-\alpha_{k''}} \delta_{k''i}^{(\tau)},\ i \in I \right\}$ лексикографически меньше строк

$$\left\{ \frac{1}{-\alpha_k} \delta_{ki}^{(\tau)},\ i \in I \right\},\quad \alpha_k < 0.$$

После этого полагаем, как обычно, $K_{\tau+1} = (K_\tau \setminus \{k''\}) \cup \{k'\}$, $\delta_{k'i}^{(\tau+1)} = \frac{1}{-\alpha_{k''}} \delta_{k''i}^{(\tau)}$ при $i \in I$, $\delta_{ki}^{(\tau+1)} = \delta_{ki}^{(\tau)} - \frac{\alpha_k}{\alpha_{k''}} \delta_{k''i}^{(\tau)}$ при $k \in K_{\tau+1} \setminus \{k'\}$. Лексикографическая положительность новой обратной матрицы обеспечивается способом выбора номера k''. При этом $\sum_{k\in K_{\tau+1}} \Delta_k \delta_{ki}^{(\tau+1)} \geqslant \sum_{k\in K_\tau} \Delta_k \delta_{ki}^{(\tau+1)} + \frac{\delta_{k''i}^{(\tau)}}{-\alpha_{k''}} Б$. Так как $Б > 0$, $\alpha_{k''} < 0$, а матрица $\delta^{(\tau)}$ лексикографически положительна, то строка $\left\{ \sum_{k\in K_{\tau+1}} \Delta_k \delta_{ki}^{(\tau+1)},\ i \in I \right\}$ лексикографически строго больше, чем строка $\left\{ \sum_{k\in K_\tau} \Delta_k \delta_{ki}^{(\tau)},\ i \in I \right\}$, что обеспечивает конечность числа шагов этого типа.

2. Нужного номера k' не нашлось, но

$$\max\{c_k - zA_k,\ k \in S \setminus J\} = \bar{Б} > 0.$$

В этом случае заменим $Б$, скажем, на $\bar{Б}/2$ и продолжим работу.

3. Выяснилось, что $\max\{c_k - zA_k,\ k \in S \setminus J\} \leqslant 0$. Это означает, что $\sum_{k\in S} c_k x_k \leqslant \sum_{k\in S} x_k (zA_k) = zp = yp + \sum_{i\in I} \zeta_i x_i^J$ для любого допустимого $\{x_k,\ k \in S\}$. Если недобор до оптимума в значении максимизируемой функции, равный $\sum_{i\in I} \zeta_i x_i^J$, нас устраивает, то x^J можно принять за искомое решение основной задачи (напомним, что при $i \in I$ компоненты x_i^J малы). В противном случае придется сузить множество I.

Литература

1. Рубинштейн Г.Ш. Конечномерные модели оптимизации, Изд. НГУ, Н., 1970.
2. Юдин Д.Б., Гольштейн Е.Г. Линейное программирование, Физматгиз, М., 1969.

Поступила в редакцию
26.I. 1972 г.