Выпуск 49(66) ОПТИМИЗАЦИЯ 1991 г.
Выпуклый анализ и смежные вопросы

УДК 517.98

О КОНЕЧНЫХ МЕРАХ, ИНВАРИАНТНЫХ ОТНОСИТЕЛЬНО ДЕЙСТВИЯ АМЕНАБЕЛЬНОЙ ГРУППЫ ГОМЕОМОРФИЗМОВ

А.Г.Качуровский

1. В заметке для действия аменабельной локально компактной группы на локально компактном метрическом пространстве гомеоморфизмами этого пространства на себя дается решение вопросов существования и строения конечных инвариантных борелевских мер. Предлагаемые результаты аналогичны известным результатам Н.Н.Боголюбова и Н.М.Крылова о конечных инвариантных мерах топологических динамических систем с компактным фазовым пространством ([1,2], см. также [3-7]).

Пусть G - локально компактная группа. Последовательность $\{S_n\}$ ее компактных подмножеств называется суммирующей, если выполнены следующие условия:

1) $S_n \subset S_{n+1}$ для всех n;

2) $G = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} S_n$;

3) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\nu(gS_n \Delta S_n)}{\nu(S_n)} = 0$ для любого $g \in G$

(здесь ν обозначает левую меру Хаара на G, Δ - симметрическую разность множеств).

Как показано в [8], такая последовательность существует тогда и только тогда, когда группа G аменабельна и σ-компактна. Наибольший интерес для эргодической теории представляют суммирующие последовательности, для которых справедлив аналог эргодической теоремы Биркгофа для действий G на пространствах с мерой [9,10]. Такие последовательности называются универсальными. Для того чтобы суммирующая последовательность $\{S_n\}$ была универсальной, достаточно выполнения условия $\nu(S_n^{-1}S_n) < k\nu(S_n)$ для некоторой константы k (при всех $n \in \mathbb{N}$) [9]. Обсуждение вопроса существования такой последовательности см. в [9,11]; там же высказана гипотеза о том, что всякая аменабельная σ-компактная группа обладает универсальной последовательностью.

В дальнейшем предполагается, что для рассматриваемой группы G существует универсальная последовательность $\{S_n\}$; зафиксируем эту последовательность.

Пусть M - локально компактное сепарабельное метрическое пространство, Σ - σ-алгебра его борелевских подмножеств, и пусть задано измеримое действие [11] группы G на измеримом пространстве (M,Σ) гомеоморфизмами M на себя.

Определение. Точка $p \in M$ называется возвращающейся (см.[3,4]), если найдется такой компакт $G \subseteq M$, что

$$\varliminf_{n\to\infty} \frac{1}{\nu(S_n)} \int_{S_n} \chi_Q(gp)d\nu(g) > 0.$$

Теорема. *Для того чтобы существовала конечная борелевская мера μ на M, инвариантная относительно действия группы G, необходимо и достаточно, чтобы имелась хотя бы одна возвращающаяся точка.*

Доказательство. Пусть $M = \bigcup_{n=1}^{\infty} Q_n$ - представление M в виде объединения возрастающей последовательности компактов таких, что $Q_n \subset \operatorname{Int} Q_{n+1}$, и F_n - пространство действительных функций на V, непрерывных на Q_n и равных нулю на $M \setminus Q_n$, с чебышевской метрикой.

Необходимость приведенного условия сразу следует из эргодической теоремы ([9]; см.также [10]). Действительно, рассмотрим компакт Q_k, для которого $\mu(Q_k) > 0$; по этой теореме для почти всех по мере μ точек $p \in M$ существует предел

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\nu(S_n)} \int_{S_n} \chi_{Q_k}(gp)d\nu(g) = \psi(p,\chi_{Q_k}),$$

и

$$\int_M \psi(p,\chi_{Q_k})d\mu = \int_M \chi_{Q_k}d\mu = \mu(Q_k) > 0,$$

т.е. найдется точка $p \in M$, для которой $\psi(p,\chi_{Q_k}) > 0$, что и требуется.

Достаточность приведенного условия покажем, построив по любой возвращающейся точке p конечную инвариантную борелевскую меру. На каждом F_m определим семейство линейных непрерывных функционалов $\{A_n^m\}_n$ по формуле

$$A_n^m(\varphi) = \frac{1}{\nu(S_n)} \int_{S_n} \varphi(gp)d\nu(g).$$

По теореме Рисса – Радона получаем семейство конечных борелевских мер $\{\mu_n^m\}_n$ на каждом Q_m, для которых $A_n^m(\varphi) = \int_{Q_m} \varphi d\mu_n^m$. В дальнейшем предполагается, что компакт Q, существование которого гарантируется определением возвращаемости p, совпадает с Q_1 из последовательности $\{Q_n\}$.

Заметим, что семейство $\{\mu_n^1\}_n$ слабо предкомпактно, в силу ограниченности сверху (единицей) последовательности $\{\mu_n^1(Q_1)\}_n$. Пусть последовательность $\{n_k^1\}_k$ такова, что последовательность $\{\mu^1_{n_k^1}\}_k$ слабо сходится к некоторой конечной мере μ_1 на Q_1. Эта мера нетривиальна, так как

$$\mu_n^1(Q_1) \geqslant \varliminf_{k\to\infty} \frac{1}{\nu(S_k)} \int_{S_k} \chi_Q(gp)d\nu(g) > 0$$

при любом n. Далее, в силу слабой предкомпактности $\{\mu^2_{n_k^1}\}_k$ можно из $\{n_k^1\}_k$ выбрать подпоследовательность $\{n_k^2\}_k$ так, что $\mu^2_{n_k^2} \xrightarrow[k]{} \mu_2$ на Q_2, и т.д.

Получаем последовательность конечных борелевских мер μ_n на Q_n, причем, как нетрудно видеть, μ_{n+1} совпадает с μ_n на $\mathrm{int}Q_n$. Для борелевских $A \subseteq M$ положим $M(A) = \lim\limits_{n\to\infty} \mu_n(A \cap \mathrm{int}Q_n)$; это и есть требуемая мера.

Инвариантность μ достаточно показать для предкомпактных открытых множеств $A \subseteq M$. Пусть $h \in G$; нужно доказать, что $\mu(A) = \mu(hA)$.

Выберем Q_l так, чтобы $\{\mathrm{cl}A \cup \mathrm{cl}hA\} \subset \mathrm{int}Q_l$. Рассмотрим сужение $\{A_n^l\}_n$ на $\{\varphi \in F_l \,|\, \mathrm{supp}\varphi \subset \mathrm{int}Q_l\}$ и сужение μ_l на $\mathrm{int}Q_l$. Как нетрудно видеть, достаточно доказать, что $\int\limits_{Q_l} \varphi(p)d\mu_l = \int\limits_{Q_l} \varphi(hp)d\mu_l$ для $\varphi \in F_l$, или, что то же,

$$\lim_{k\to\infty} \frac{1}{\nu(S_{n_k})} \int\limits_{S_{n_k}} \varphi(gp)d\nu(g) = \lim_{k\to\infty} \frac{1}{\nu(S_{n_k})} \int\limits_{S_{n_k}} \varphi(ghp)d\nu.$$

Имеем

$$\left| \frac{1}{\nu(S_{n_k})} \int\limits_{S_{n_k}} \varphi(gp)d\nu(g) - \frac{1}{\nu(S_{n_k})} \int\limits_{S_{n_k}} \varphi(ghp)d\nu(g) \right| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{\nu(S_{n_k})} \left| \int\limits_{S_{n_k}} \varphi(gp)d\nu(g) - \int\limits_{hS_{n_k}} \varphi(gp)d\nu(g) \right| \leqslant$$

$$\leqslant \max_{x\in M} |\varphi(x)| \frac{\nu(S_{n_k} \Delta hS_{n_k})}{\nu(S_{n_k})} \xrightarrow[k]{} 0,$$

по определению суммирующей последовательности. Теорема доказана.

2. Пусть F - пространство непрерывных на M действительных функций, имеющих компактный носитель, с чебышевской метрикой.

Будем говорить, что множество $A \subseteq M$ имеет максимальную вероятность, если для любой инвариантной относительно действия группы G конечной борелевской меры μ на M будет $\mu(A) = \mu(M)$.

Определение. Возвращающаяся точка $p \in M$ называется квазирегулярной, если для любой функции $\varphi \in F$ существует предел

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\nu(S_n)} \int_{S_n} \varphi(gp)d\nu(g) = \psi(p,\varphi).$$

Теорема 2. *Множество квазирегулярных точек M_{kp} инвариантно и имеет максимальную вероятность.*

Доказательство теоремы 2 ведется аналогично тому, как это делалось в [1,4]. Нужно только проверить инвариантность множества M_{kp}. В нашем случае это сразу следует из проведенной в доказательстве теоремы 1 для любого $h \in G$ оценки разности

$$\left| \frac{1}{\nu(S_n)} \int_{S_n} \varphi(gp)d\nu(g) - \frac{1}{\nu(S_n)} \int_{S_n} \varphi(ghp)d\nu(g) \right| \leqslant$$

$$\leqslant \max_{x\in M} |\varphi(x)| \; \frac{\nu(S_n \Delta hS_n)}{\nu(S_n)} \longrightarrow 0.$$

Доказательство окончено.

Для точки $p \in M_{kp}$ теорема Рисса - Радона позволяет задать конечную инвариантную борелевскую меру μ_p, определяемую для $\varphi \in F$ равенством $\int_M \varphi d\mu_p = \psi(p,\varphi)$. Эту меру называют индивидуальной мерой точки p; инвариантность μ_p доказывается так же, как это делалось при доказательстве теоремы 1. В отличие от [1,2,4] мера μ_p не обязательно должна быть нормированной.

Доказательства приводимых ниже утверждений проводятся аналогично тому, как это сделано в [1] ([2]), поэтому здесь можно ограничиться их точной формулировкой.

Теорема 3. *Если μ - произвольная конечная инвариантная* *борелевская мера, то для любого измеримого $A \subseteq M$ будет*

$$\mu(A) = \int\limits_{M_{kp}} \mu_p(A) d\mu(p).$$

Определение. Точка $p \in M_{кр}$ называется транзитивной, если ее индивидуальная мера μ_p транзитивна.

Теорема 4. *Множество транзитивных точек $M_{тр}$ инвариантно и имеет максимальную вероятность.*

Определение. Точка $p \in M_{тр}$ называется регулярной, если для любой ее открытой окрестности V (в пространстве M) будет $\mu_p(V) > 0$.

Теорема 5. *Множество регулярных точек $M_{рег}$ инвариантно и имеет максимальную вероятность.*

Разобъем множество регулярных точек на классы, отнеся к одному классу E те точки, индивидуальные меры которых совпадают. Классы E называют эргодическими множествами. Общую для эргодического множества E меру обозначим μ_E.

Теорема 6. *Каждая регулярная точка принадлежит одному и только одному эргодическому множеству. Все эргодические множества инварианты.*

Совокупность $\Sigma\mu$ всех индивидуальных мер μ_E называется фундаментальной системой мер.

Теорема 7. *Всякая мера, принадлежащая $\Sigma\mu$, транзитивна. Наоборот, всякая конечная транзитивная мера совпадает с некоторой мерой из $\Sigma\mu$ (с точностью до коэффициента).*

Теорема 8. *Совокупность всех нормированных инвариантных борелевских мер образует выпуклое слабо компактное множество, крайними точками которого являются нормированные транзитивные меры.*

3. Теоремы 2-7 являются новыми и в случае, когда M - метрический компакт. Теорема 1 для этого случая была доказана в [6] (и передоказана для некоторых важных частных случаев в [7]), теорема 8 приводится в [7].

Как показывает принадлежащий А.Н.Колмогорову пример, приведенный в [7], основные утверждения работы [1] ([2]) о строении инвариантных мер (и соответственно утверждения п.2 настоящей заметки) для действия произвольной группы гомеоморфизмов компакта на себя не имеют места. Следует отметить, что теорема 6 дает положительный ответ на вопрос С.В.Фомина в [7] о строении носителя транзитивной меры (для рассматриваемого в настоящей заметке класса групп преобразований).

В случае компактности пространства M удается обобщить и теорему из [1] ([2]) о строении минимального центра притяжения.

Определение. Замкнутое множество $C \subseteq M$ назовем центром притяжения, если для любой его открытой окрестности S и любой точки $p \in M$ будет

$$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{\nu(S_n)} \int_{S_n} \chi_S(gp)d\nu(g) = 1.$$

Если множество C не допускает истинного подмножества, также являющегося центром притяжения, то C называется минимальным центром притяжения.

Теорема 9. *Замыкание множества регулярных точек является минимальным центром притяжения.*

Доказывается эта теорема теми же рассуждениями, что и ее аналог в [1] ([2]).

Литература

1. **Крылов Н.Н., Боголюбов Н.Н.** Общая теория меры в нелинейной механике // Боголюбов Н.Н. Избр. тр.: В 3 т. - Киев: Наукова думка, 1969. - Т.1. - С.411-464.

2. **Немыцкий В.В., Степанов В.В.** Качественная теория дифференциальных уравнений. - М.-Л.: Гостехиздат, 1949.

3. **Oxtoby J., Ulam S.** On the existence of a measure invariant under a transformation // Ann. Math. - 1939. - Vol.40. - P. 560-566.

4. **Фомин С.В.** О конечных инвариантных мерах в динамических системах // Мат. сб. - 1943. - Т.12, № 1. - С. 99-108.

5. **Качуровский А.Г.** О существовании инвариантной меры у топологических динамических систем // Сиб. мат. журн. - 1986.-

Т. 27, № 4. - С.203-207.

6. **Боголюбов Н.Н.** О некоторых эргодических свойствах непрерывных групп преобразований // Боголюбов Н.Н. Избр. тр.: В 3 т. - Киев: Наукова думка, 1969. - Т.1. - С.561-570.

7. **Фомин С.В.** О мерах, инвариантных относительно некоторой группы преобразований // Изв. АН СССР. Сер. мат. - 1950. - Т.14, № 3. - С. 261-275.

8. **Emerson W.R., Greenleaf F.P.** Covering properties and Folner conditions for locally compact groups // Math. Z. - 1967. - Vol.102, № 5. - P.370-385.

9. **Emerson W.R.** The pointwise ergodic theorem for amenable groups // Amer. J. Math. - 1974. - Vol.96, № 3. - P.472-488.

10. **Greenleaf F.P.** Ergodic theorems and the construction of summing sequences in amenable locally compact groups // Communs pure and appl. math. - 1973. - Vol. 26, № 1. - P.29-46.

11. **Вершик А.М., Корнфельд И.П., Синай Я.Г.** Общая эргодическая теория групп преобразований с инвариантной мерой // Современные проблемы математики. Фундаментальные направления. - М., 1985. - Т.2. - С.5-111.

Поступила в редакцию
I9 июня I990 г.