

УДК 519.863

**ИССЛЕДОВАНИЕ СХОДИМОСТИ АЛГОРИТМА РАВНОЭФФЕКТИВНОЙ  
КОМПОЗИЦИИ ЛОКАЛЬНЫХ ПЛАНОВ ПОДСИСТЕМ***В. Д. Маркин*

В работах [1-3] приводится подробное изложение и обоснование метода равноэффективной композиции локально оптимальных планов подсистем в сложных экономических системах. Данный метод решения задач планирования и управления сложными экономическими системами (объединениями, предприятиями) базируется на следующих положениях: каждая подсистема рассчитывает свой план автономно, подсистемы имеют производственные связи хотя бы по одному из следующих направлений: общему ресурсу (задача распределения общесистемных ресурсов); общему виду продукции (задача специализации); внутрипроизводственному обмену (задача кооперации). Подсистемы также связаны общими условиями на выпуск конечной продукции (наборный критерий). Посредством оптимизации данных связей подсистем и при учете их локальных ограничений требуется определить максимально возможное пропорциональное состояние либо относительно конечного набора продукции, либо какого-то другого качественного параметра (например,

максимизация средней нормы прибыли по системе в целом). Отметим одну весьма существенную особенность данного подхода — подсистемы не передают друг другу и в "центр" информацию об используемых технологиях и локальных ресурсах, т.е. "центр" не может сформировать единую общесистемную задачу планирования и на основе ее решения давать задания подсистемам. Подсистемы обмениваются между собой заявками на продукцию по комплектации, а в "центр" поступает информация об уровне эффективности плана подсистем в целом (значение функционала) и общесистемных ресурсов (локальные двойственные оценки).

Одним из наиболее сложных вопросов в формировании общесистемных планов является построение плана кооперированных поставок для подсистем, согласованного с другими его разделами: планом производства, капитального строительства и т.д. В том случае, когда в качестве объекта моделирования выступает система машиностроительного типа, можно утверждать, что характер кооперации подсистем, заданный в виде затрат комплектующих изделий на конечное изделие, может быть описан в виде конечно-ориентированного графа, в котором отсутствуют ориентированные циклы и, следовательно, по крайней мере одна из вершин не имеет входных дуг и одна вершина не имеет исходящих дуг. Также предполагается, что в каждой из подсистем каждому продукту соответствует одна технология его производства.

Ориентированная (последовательная) кооперация подсистем позволяет воспользоваться специфической матрицы задачи при ее решении. В случае последовательной кооперации матрица производства и распределения продукции подсистем перестановкой строк и столбцов может сводиться к блочно-треугольной, что позволяет для формирования общесистемного плана использовать достаточно простые и эффективные вычислительные процедуры определения полной заявки на продукцию системы с учетом всех связей по внутренней кооперации. Достаточно подробно данный подход описан в [3].

Традиционный подход к отображению технологических способов как затрат различных ресурсов на единицу (либо на объем) выпускаемой продукции приводит к необходимости решения задачи

внутрисистемной кооперации как единой централизованной задачи большой размерности, учитывающей всю номенклатуру промежуточных изделий (для предприятия - деталей и узлов).

Рассмотрим иной подход к отображению связей подсистем по кооперации. Рассматриваются только конечные продукты системы, на которые поступают задания на выпуск в виде заявки, набора договоров либо в другой форме, отражающей влияние внешней среды на систему. Технологический способ производства каждого конечного продукта записывается в виде затрат мощностей (по видам) каждой из подсистем, участвующих в комплектации по данному продукту. Если при решении задачи прямой кооперации (изделие на изделие) необходимо рассчитывать коэффициенты полных затрат на все конечные для системы продукты, то при формулировке данной задачи как задачи кооперации мощностей рассчитываются коэффициенты полных затрат мощностей (по видам) на каждое конечное изделие. Переход от матрицы коэффициентов "прямой" (продуктовой) кооперации к матрице коэффициентов кооперации мощностей осуществляется последовательным умножением матрицы коэффициентов фондоемкостей продукции на матрицы коэффициентов затрат по "прямой" кооперации. Данная операция, как известно, не изменяет области допустимых решений исходной задачи. Указанное преобразование информации легко алгоритмизируется и включается в соответствующие пакеты генерации матриц [3]. Переход к матрице кооперации мощностей не требует дополнительной информации относительно общепринятой (нормативы затрат мощностей и комплектующих изделий). Пользователь системы управления, в которой применяется данный подход, не подозревает даже о его выполнении. Выходная информация об объемах поставок внутри системы выдается в виде "прямой" кооперации.

Преимущество данного подхода в реализации технологического процесса обработки информации для получения плановых решений состоит, с одной стороны, в существенном сокращении размерности решаемых оптимизационных задач (на уровне предприятия, исходя из нашего опыта, размерность задач сокращается на два порядка за счет исключения из оптимизационных расчетов переменных и ограничений, соответствующих комплектующим изделиям -

узлам и деталям). С другой – в возможности решения задачи оптимизации кооперационных связей подсистем без формирования единой общесистемной задачи, т.е. в рамках композиционного подхода.

Для преобразования связей по кооперации в виде затрат мощностей на выпуск конечной продукции подсистемам достаточно обменяться информацией о нормах комплектации своих изделий. В целом операция создания по подсистемам матриц коэффициентов полных затрат мощностей аналогична операции формирования коэффициентов полных затрат продукции на конечный выпуск. Отметим, что данные преобразования, как известно, не изменяют области допустимых решений исходной задачи. Следует также заметить, что в настоящей работе под термином мощность понимается вектор, компоненты которого отражают использование различного вида ресурсов на выпуск продукции (виды оборудования, трудовых ресурсов, площадей, материалов и т.п.). При создании локальных матриц коэффициентов полных затрат мощностей необходимо провести  $n-1$  итерацию по последовательному обмену информацией между подсистемами с конца технологической цепочки, где  $n$  – число подсистем, участвующих в создании конечного продукта по самой длинной технологической цепочке.

Рассмотрим формирование данной задачи на числовом примере.

Условия производства продукции в подсистемах заданы в виде следующих неравенств:

$$\begin{array}{rcl}
 -x_1 & - & x_3 + y_1 & \geq -1,00, \\
 -2x_1 & - & x_2 - 2x_3 & + 0,6y_2 & \geq -2,00, \\
 -x_1 & - & 2x_2 - 2x_3 & & + 0,6y_3 & \geq -1,90, \\
 x_1 & - & 0,1x_2 - 0,1x_3 & & & \geq b_1, \\
 & & x_2 & & & \geq b_2, \\
 & & x_3 & & & \geq b_3, \\
 & & -y_1 & - & y_2 & - & y_3 & \geq -c_1;
 \end{array} \quad (1)$$

$$\begin{aligned}
-2x_4 - x_5 + 0,7y_4 &\geq -1,35, \\
-3x_5 + \quad + 0,7y_5 &\geq -1,00, \\
x_4 - x_5 \quad + 0,7y_6 &\geq -0,88, \\
-0,1x_4 - 0,2x_5 &\geq -b_{12}, \\
-0,7x_5 &\geq b_{22}, \\
-0,3x_4 - 0,1x_5 &\geq -b_{32}, \\
x_4 &\geq b_4, \\
x_5 &\geq b_5, \\
y_4 - y_5 - y_6 &\geq -c_2;
\end{aligned} \tag{2}$$

$$\begin{aligned}
-x_6 - 2x_8 + 0,75y_7 &\geq 0, \\
x_6 - 2x_7 - x_8 \quad + 0,4y_8 &\geq -3,00, \\
-0,1x_6 - 0,2x_7 - 0,2x_8 &\geq -b_{13}, \\
-0,4x_6 - 0,1x_7 - 0,1x_8 &\geq -b_{33}, \\
-0,5x_6 \quad - 0,4x_8 &\geq -b_{43}, \\
-0,3x_6 - 0,2x_7 - 0,2x_8 &\geq -b_{53}; \\
x_6 &- 0,1z \geq 0, \\
x_7 &- 0,9z \geq 0, \\
x_8 &- z \geq 0, \\
y_7 - y_8 &\geq -c_3, \\
z &\rightarrow \max!
\end{aligned} \tag{3}$$

Как видно из приведенного выше описания задач подсистем, целевая функция определена на данном этапе только для подсистемы (3), выпускающей конечную продукцию.

Необходимо, чтобы по кооперационным связям выполнялись условия:

$$b_1 \geq b_{12} + b_{13}; \quad b_2 \geq b_{22}; \quad b_3 \geq b_{32} + b_{33};$$

$$b_4 \geq b_{43}; \quad b_5 \geq b_{53},$$

т.е. производство комплектующих изделий должно удовлетворять спрос на них.

Также требуется, чтобы использование общесистемного ресурса подсистемами не превышало имеющегося его размера, т.е.

$$c \geq c_1 + c_2 + c_3, \quad c = 1,5.$$

Формирование матриц кооперации мощностей начинается с передачи информации о нормах комплектации конечных изделий от подсистем, выпускающих конечные изделия, ко всем смежникам. Очередная подсистема по цепочке кооперации по соответствующему конечному продукту рассчитывает свою матрицу кооперации мощностей и передает в этих терминах всем своим смежникам информацию о потребных нормах комплектации на конечные продукты. Данный алгоритм формирования матрицы кооперации мощностей подробно изложен в работе [3] и представляет собой итеративный процесс, на каждом шаге которого проводится последовательное умножение матрицы фондоемкости данной подсистемы на нормы комплектации подсистем, потребляющих ее продукцию. В результате формируются матрицы подсистем, отражающие затраты мощностей каждой подсистемы на конечные изделия системы.

В нашем конкретном примере в результате данного процесса имеем следующие задачи подсистем:

$$\begin{array}{rcl}
 -0,896x_6 - 0,386x_7 - 0,558x_8 + y_1 & \geq & -1,0, \\
 -1,948x_6 - 0,912x_7 - 1,256x_8 + 0,6y_2 & \geq & -2,0, \\
 -1,869x_6 - 0,786x_7 - 1,078x_8 + 0,6y_3 & \geq & -1,9, \\
 x_6 & - & 0,1z_1 \geq 0, \quad (1') \\
 & x_7 & - 0,9z_1 \geq 0, \\
 & & x_8 - z_1 \geq 0, \\
 & -y_1 - y_2 - y_3 & \geq -c_1, \\
 & & z_1 \longrightarrow \max!
 \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl}
-1,3x_6 - 0,2x_7 - x_8 + 0,7y_4 & & \geq -1,35, \\
-0,9x_6 - 0,6x_7 - 0,6x_8 + 0,7y_5 & & \geq -1,00, \\
-0,8x_6 - 0,2x_7 - 0,6x_8 + 0,7y_6 & & \geq -0,88, \\
x_6 & & - 0,1z_2 \geq 0, \\
x_7 & & - 0,9z_2 \geq 0, \\
x_8 & & - z_2 \geq 0, \\
-y_1 - y_5 - y_6 & & \geq -c_2, \\
z_2 & \longrightarrow & \max !
\end{array} \quad (2')$$

$$\begin{array}{rcl}
-x_6 - 2x_8 + 0,75y_7 & & \geq -2, \\
-x_6 - 2x_7 - x_8 + 0,75y_8 & & \geq -3, \\
x_6 & & - 0,1z_3 \geq 0, \\
x_7 & & - 0,9z_3 \geq 0, \\
x_8 & & - z_3 \geq 0, \\
-y_7 - y_8 & & \geq -c_3, \\
z_3 & \longrightarrow & \max !
\end{array} \quad (3')$$

Для построения оптимального плана по системе в целом используем алгоритм равноэффективной композиции локальных планов подсистем, подробно изложенный и исследованный в работах [1,2]. Задача состоит в нахождении такого распределения общесистемного ресурса  $(c_1, c_2, c_3)$ , чтобы по системе в целом минимизировался выпуск конечных изделий в структуре заявки, т.е. чтобы по подсистемам достигалось максимальное и равное значение  $z^k$ ,  $k = 1, 2, 3$ .

Отметим принципиальные особенности алгоритма равноэффективной композиции планов подсистем. На каждом шаге процесса общесистемный уровень производства конечных продуктов принимается равным достигнутому минимальному по подсистемам уровню  $z^k(\gamma)$ . Относительно этого уровня из всех подсистем, превысивших его, изымается "избыточный" ресурс, обеспечивший данное

превышение. Затем общая сумма "избыточного" ресурса перераспределяется между подсистемами обратно пропорционально показателю эффективности роста производства подсистем (двойственным оценкам ресурсов, величине прироста функционалов задач подсистем и т.п.). В настоящей работе рассматривается влияние различных критериев изъятия "избыточных" ресурсов и их перераспределения на скорость сходимости процесса построения общесистемного оптимального плана как оптимальной равноэффективной композиции локальных планов подсистем.

В настоящих расчетах были использованы следующие варианты изъятия и перераспределения "избыточных" ресурсов:

1. Изъятие пропорционально отношению  $\min_k z^k(\gamma)/z^k(\gamma)$ , перераспределение обратно пропорционально двойственным локальным оценкам ресурса -  $\pi^k(\gamma)$ .

2. Изъятие проводится по максимальной для подсистемы двойственной оценке данного ресурса, перераспределение обратно пропорционально полученным на данном шаге двойственным оценкам ресурса. Под максимальной оценкой ресурса для  $k$ -й подсистемы понимается двойственная оценка, полученная из решения соответствующей задачи (1') - (3') при малых его размерах. В данном случае  $c^k(1) = 0,05$ ,  $k = 1, 2, 3$ , т.е. максимальные оценки подсистем по общесистемному ресурсу определялись при 10% от имеющегося его объема. Размер допустимого размера ресурса для подсистемы  $k$  определялся как

$$\bar{c}^k(\gamma) = c^k(\gamma) - [z^k(\gamma) - z^k(1)]/\pi^k(1), \quad k = 1, 2, 3.$$

Здесь  $\bar{c}^k(\gamma)$  - размер общесистемного ресурса, необходимый подсистеме  $k$  для реализации достигнутого общесистемного уровня реализации заявки, равного  $\min_k z^k(\gamma)$ ;  $c^k(\gamma)$  - количество общесистемного ресурса, выделенного подсистеме на шаге  $\gamma$ ;  $z^k(\gamma)$  - уровень выпуска конечной продукции в структуре заявки по плану подсистемы  $k$  на шаге  $\gamma$ . Очевидно, что если на всех шагах перераспределения ресурс выделяется в размере не меньшем, чем было выделено на минимальном уровне при определении оценки



$\pi^k(1)$ , то на каждом шаге процесса в каждой подсистеме при изъятии "избыточных" ресурсов по отмеченному выше правилу обеспечивается реализация достигнутого уровня  $\min z^k(\gamma)$ . Этот факт, в свою очередь, обеспечивает монотонность по шагам процесса последовательности  $\{\min z^k(\gamma)\}$ ,  $\gamma = 1, 2, \dots$ . Перераспределение же изъятых "избыточных" ресурсов между всеми подсистемами делает эту последовательность строго монотонно возрастающей.

3. Для изъятия "избыточных" ресурсов на каждом шаге процесса для всех подсистем, исключая подсистему, в которой получено минимальное значение  $z^k(\gamma)$ , решается задача на минимум ресурса, необходимого для реализации достигнутого уровня реализации заявки, равного  $\min z^k(\gamma)$ . Перераспределение суммарного объема "избыточных" ресурсов проводилось обратно пропорционально экстраполяционным оценкам ресурсов данного шага процесса -  $q^k(\gamma)$ :

$$q^k(\gamma) = [z^k(*) - z^k(\gamma)] / [c - c^k(\gamma)], \quad k = 1, 2, 3.$$

Здесь:  $z^k(*)$  - уровень выпуска в подсистеме  $k$ , когда ей выделен весь общесистемный ресурс;  $z^k(\gamma)$  - уровень выпуска конечной продукции по плану подсистемы  $k$  на шаге процесса -  $\gamma$ .

4. Изъятие "избыточных" ресурсов проводилось по максимальным оценкам для подсистем. Перераспределение - по интерполяционным, определяемым как отношение прироста функционала на данном шаге по сравнению с минимальным предыдущего шага процесса, к приросту размера ресурса, выделенного на данном шаге относительно допустимого его объема, на предыдущем шаге, т.е. интерполяционная оценка ресурса определялась как

$$p^k(\gamma) = [z^k(\gamma) - \min_k z^k(\gamma-1)] / [c^k(\gamma) - \bar{c}^k(\gamma-1)], \quad k=1, 2, 3.$$

5. Изъятие по варианту 3, перераспределение - по интерполяционным оценкам, определяемым так же, как и в варианте 4.

Результаты эксперимента приведены в следующей таблице.

	Варианты				
	1	2	3	4	5
КОЛ-ВО ша- ГОВ ( $\gamma$ )	26	17	7	7	6
$\min z_k^k$	1,022611	1,034705	1,035040	1,034874	1,035065
$\max z_k^k$	1,048044	1,035470	1,035298	1,035310	1,035270
$\min z_k^k / \max z_k^k$	0,975732	0,999261	0,999751	0,999579	0,999802
$\min z_k^k / z(\text{opt})$	0,987851	0,999534	0,999858	0,999698	0,999882
R	78	51	33	21	30

Параметр  $R$  указывает на число задач линейного программирования, которые необходимо решить при данном варианте процесса.

Расчеты по каждому варианту проводились до достижения сходимости минимального и максимального уровня выпуска конечной продукции с точностью  $\geq 0,001$ .

Первый и второй варианты процесса были эффективны в задачах в вариантной постановке, в которых каждый способ непосредственно связан с использованием общесистемных ресурсов. Рассматриваемая в настоящей работе структура технологических способов отражает задачу производственного планирования с детальной номенклатурой, в которой только и можно решать задачи оптимизации кооперационных связей. В этом случае также учтено реальное условие, что основной объем выпуска продукции достигается на действующих предприятиях при использовании базовых мощностей. Именно это условие и определило эффективность варианта 4, который ориентировался при изъятии и перераспределении "избыточного" ресурса на эффективность приростных мощностей. Следует отметить, что для контроля за процессом была рассчитана единая общесистемная задача кооперации мощностей в следующем виде:

$$\begin{array}{rcl}
- 0,869x_6 - 0,386x_7 - 0,558x_8 + y_1 & \geq & - 1,00, \\
- 1,948x_6 - 0,912x_7 - 1,256x_8 + 0,60y_2 & \geq & - 2,00, \\
- 1,869x_6 - 0,786x_7 - 1,078x_8 + 0,60y_3 & \geq & - 1,90, \\
- 1,300x_6 - 0,200x_7 - x_8 + 0,70y_4 & \geq & - 1,35, \\
- 0,900x_6 - 0,600x_7 - 0,600x_8 + 0,70y_5 & \geq & - 1,00, \\
- 0,800x_6 - 0,200x_7 - 0,600x_8 + 0,70y_6 & \geq & - 0,88, \\
- x_6 - 2,000x_8 + 0,75y_7 & \geq & - 2,00, \\
- x_6 - 2,000x_7 - x_8 + 0,40y_8 & \geq & - 3,00, \\
x_6 & & - 0,1z \geq 0, \\
x_7 & & - 0,9z \geq 0, \\
x_8 & & - z \geq 0, \\
- y_1 - y_2 - y_3 - y_4 - y_5 - y_6 - y_7 - y_8 & \geq & - 1,50 \\
& & z \longrightarrow \max!
\end{array}$$

По решению данной задачи  $z(\text{opt}) = 1,035187$ .

Данный подход к отображению задачи производственного планирования был вызван прежде всего, как уже отмечалось выше, необходимостью реализации композиционного подхода для решения проблемы оптимального согласования кооперационных связей в производственных системах, когда участники производственной кооперации обмениваются со смежниками только нормами комплектации на их конечные изделия. Однако такой подход к отображению связей по кооперации имеет и самостоятельное значение. В том случае, когда решение данной задачи базируется на единой нормативной базе данных, что встречается, как правило, на большинстве предприятий, рассмотренный подход позволяет существенно сократить размерность общезаводской задачи на число уравнений, описывающих производство и использование промежуточных изделий (деталей и узлов), не добавляя ни одного дополнительного ограничения. Поскольку данные преобразования матрицы кооперации по продуктам в матрицу кооперации мощностей являются эквивалентными, то в результате имеем решение исходной задачи, которое путем простых операций над массивами может быть представлено для удобства пользователей в виде плана производства и обмена комплектующими изделиями.

В данном небольшом примере при отображении задачи в виде кооперации мощностей из восьми продуктов учитывалось только три конечных; число ненулевых элементов сократилось на 1/3.

Применение данного подхода при создании системы комплексного планирования производства на ПО "Кировский завод" позволило свести задачу производственного планирования к сотне конечных изделий, исключив из матрицы более десяти тысяч деталей и узлов, отобразив их в виде условий на загрузку мощностей цехов на выпуск конечных изделий.

### Литература

1. Макаров В.Л., Маршак В.Д. Модели оптимального функционирования отраслевых систем. - М.: Экономика, 1979.

2. Экономико-математические методы в планировании многоотраслевых комплексов и отраслей / Розин Б.Б., Суворова Б.П., Маршак В.Д. и др. - Новосибирск: Наука, 1988.

3. Оптимизация системных решений в распределенных базах данных / Анцыз С.М., Донсков И.В., Маршак В.Д., Чупин В.Г. - Новосибирск: Наука, 1990.

*Поступила в редакцию  
15.04.1991 г.*