Модели динамики и равновесия

УДК 519.865.3

ОБ ОДНОМ ВАРИАНТЕ ЗАДАЧИ ТРАНСПОРТНОГО РАВНОВЕСИЯ

В.И.Шмырев

Со времени первой постановки вопроса о транспортном равновесии (начало 50-х годов) этой проблеме посвящались многочисленные исследования. Были предложены различные формулировки задачи и применялись разнообразные подходы как для качественного исследования, так и для получения алгоритмов численного отыскания равновесия - методы математического программирования, вариационные неравенства, нелинейная комплементарность, техника симплициальных разбиений. Достаточно обширная история вопроса приводится в [1]. Интерес к проблеме объясняется тем, что к задаче такого рода приводят исследования, связанные не только с транспортом, но и сетями иной природы (электрическими, водными и т.п.). Более того, в [2] показано, что задача рыночного равновесия также может быть сформулирована в виде некоторой задачи транспортного равновесия.

Рассматриваемый в настоящей заметке вариант задачи транспортного равновесия приводит к изучению состояний равновесия по Нэшу - Курно в некоторой бескоалиционной игре многих лиц. При естественных предположениях доказывается существование равновесия. Особенностью возникающей игры является тот факт, что отображение, сопоставляющее ситуации множества допустимых стратегий игроков, не обладает свойством непрерывности, как это имеет место в теореме Дебре о социальной системе [3].Однако этот недостаток компенсируется специальным условием на целевые функции игроков.

1. Описание модели

Побудительным мотивом наших рассмотрений является следующая упрощенная модель, связанная с общественным городским транспортом, осуществляющим пассажирские перевозки. Для простоты будем говорить об автобусных перевозках. Предполагается, что все автобусы находятся в ведении одного распорядителя, который устанавливает маршруты их движения по заданной транспортной сети и планирует количество автобусов на каждом маршруте. Если r - количество дуг на рассматриваемой транспортной сети, то s-й маршрут характеризуется r-мерным вектором Q^s, компоненты которого 1 или 0 в зависимости от того, проходит этот маршрут по соответствующей дуге или нет. Количество автобусов, планируемых на s-й маршрут, обозначим через y_s. Объединим допустимые маршруты Q^s в матрицу Q, а интенсивности y_s в вектор y. Тогда $\sum_s Q^s y_s = Qy$ - вектор, j-я компонента которого $(Qy)_j$ указывает обеспеченность автобусами j-й дуги сети.

Предполагается, что автобусы при движении останавливаются в каждом проходимом пункте сети, где пассажир может сделать пересадку с одного маршрута на другой. Все пассажиры разбиваются на группы так, что в одной группе начальный и конечный пункты поездки у всех пассажиров совпадают. Каждую группу будем рассматривать как одного потребителя. Потребитель i характеризуется своим множеством X_i планов перевозки пассажиров, а сами планы $x^i \in X_i$ будем задавать, как и маршруты автобусов, в виде r-мерных векторов, компоненты которых x^i_j указывают количество пассажиров (в единицах автобусов), проезжающих согласно плану x^i по j-й дуге сети.

В результате возникает естественное условие согласованности планов автопредприятия и потребителей:

$$\sum_{s} Q^{s} y_{s} \geqslant \sum_{i} x^{i}. \qquad (1)$$

Относительно множеств X_i предполагается, что каждое из них является выпуклой оболочкой конечного числа точек:

$$X_i = \left\{ x^i \in R^r \mid x^i = \sum_{k} \lambda_{ik} x^{ik},\ \sum_{k} \lambda_{ik} = 1,\ \lambda_{ik} \geqslant 0 \right\}, \qquad (2)$$

где каждый x^{ik} является маршрутным планом перевозки пассажиров i-й группы, т.е. отвечает тому случаю, когда вся группа воспользуется одним из возможных маршрутов поездки одного пассажира. Среди таких маршрутов каждый отдельно взятый пассажир выбирает такой, время поездки на котором минимально. Это так называемый закон Вардропа (J.G.Wardrop), явившийся, как отмечается в [1], отправным тезисом при исходной постановке вопроса о транспортном равновесии.

Время поездки слагается из чистого времени движения и времени ожидания в пунктах пересадки. Время движения на каждом маршруте величина постоянная, определяемая протяженностью маршрута и средней скоростью движения автобусов. Время ожидания будет зависеть от интенсивностей y_s. Вводя дополнительные дуги на сети, можно считать, что пересадки пассажиров происходят в каждом пункте маршрута, а тогда время ожидания для конкретного маршрута x^{ik} будет слагаться из времени ожидания на всех дугах, используемых в этом маршруте. На дуге j время ожидания τ_j определяется как величина, обратная к количеству автобусов разных маршрутов, проходящих по этой дуге в единицу времени. Для s-го автобусного маршрута количество автобусов, проходящих по кадой из дуг маршрута в единицу времени, равно y_s/t_s, где t_s - время прохождения s-го маршрута. В результате для τ_j имеем формулу

$$\tau_j(y) = \frac{1}{\sum_{s \in S_j} (y_s/t_s)},$$

где S_j - множество маршрутов автобусов, проходящих по j-й дуге сети.

Среди всех возможных для i-й группы маршрутов x^{ik}, $k \in K_i$, при данных зафиксированных значениях $y_s = \hat{y}_s$, вообще говоря, не все маршруты окажутся обеспеченными автобусами и следует выделить действительно допустимые маршруты x^{ik}, $k \in K_i(\hat{y})$, взяв

$$K_i(\hat{y}) = \{k \in K_i | x_j^{ik} = 0, \text{ если } (Q\hat{y})_j = 0\}. \tag{3}$$

Каждый из допустимых маршрутов x^{ik} мы можем теперь характеризовать временем реализации

$$c_{ik}(\hat{y}) = t_{ik} + \sum_{j \in N_{ik}} \tau_j(\hat{y}), \tag{4}$$

где t_{ik} - чистое время движения по маршруту и N_{ik} - совокупность дуг, используемых в маршруте x^{ik}. Каждый из пассажиров i-й группы может выбрать один из маршрутов, на котором достигается $\min\limits_{k \in K_i(\hat{y})} c_{ik}(\hat{y})$. Оптимальным планом всей группы будет любой $x^i = \sum \lambda_{ik} x^{ik}$ при условии, что λ_{ik} решают задачу

$$\sum_{k \in K_i} \lambda_{ik} c_{ik}(\hat{y}) - \min! \tag{5}$$

$$\sum_{k \in K_i} \lambda_{ik} = 1, \ \lambda_{ik} \geqslant 0, \tag{6}$$

$$\lambda_{ik} = 0, \ k \notin K_i(\hat{y}). \tag{7}$$

Мы рассмотрели реакцию потребителей на фиксированный план автопредприятия. Опишем реакцию автопредприятия на фиксированные планы $\hat{x}^i$ потребителей. Естественной гипотезой будет предположение, что автопредприятие стремится минимизировть общее количество автобусов, необходимых для удовлетворения всех планов $\hat{x}^i$, т.е. выбирает y_s, решая задачу

$$\sum_s y_s - \min! \tag{8}$$

$$\sum_s Q^s y_s \geqslant \sum_i \hat{x}^i, \tag{9}$$

$$y_s \geqslant 0 \quad \forall s. \tag{10}$$

Под равновесным состоянием описанной модели будем понимать такую совокупность планов $\hat{x}^i$ всех потребителей и плана $\hat{y}$ автопредприятия, что каждый $\hat{x}^i$ может быть получен в результате решения задачи (5)-(7), а $\hat{y}$ - в результате решения задачи (8)-(10).

Замечание. Если придерживаться в точности той интерпретации модели, которая приведена выше ("автобусы-пассажиры"), то в задачах (5)-(7) и (8)-(10) следовало бы дополнительно ввести определенные требования дискретности: лишь целое число автобусов можно назначить на маршрут и не на любые части можно разделить i-ю группу пассажиров при планировании перевозок. Однако, как и в большинстве работ по транспортному равновесию, мы опускаем подобного рода условия, рассматривая лишь непрерывный аналог модели.

2. Существование равновесия

Доказательство существования равновесия в описанной выше модели получим, рассматривая ее вложение в общую формулировку некоторой бескоалиционной игры многих лиц.

Пусть в игре участвуют n игроков, именуемых потребителями, и игрок $(n+1)$, именуемый распорядителем. Потребитель i характеризуется симплексом своих стратегий

$$\Lambda_i = \left\{\lambda^i \geqslant 0 \,|\, \sum_{k\in K_i} \lambda_{ik} = 1\right\}, \qquad (11)$$

где λ_{ik} - компоненты вектора λ^i. Кроме того, задано отображение φ_i, сопоставляющее каждому $\lambda^i \in \Lambda_i$ вектор $x^i = \sum_k \lambda_{ik} x^{ik}$, где $x^{ik} \geqslant 0$ - заданные векторы. Обозначим множество $\varphi_i(\Lambda_i)$ через X_i.

Стратегии игрока $(n+1)$ обозначим через y. По предположению они принадлежат множеству $Y = R^l_+$, и каждому y сопоставляется вектор $\psi(y) = Qy$, где Q - неотрицательная матрица из столбцов Q^s. При этом будем считать выполненным следующее

Предположение 1. При любом выборе векторов $x^i \in X_i$ система неравенств (1) относительно y_s имеет решение в Y.

Ситуация в игре характеризуется элементом $\zeta = (\lambda^1, \dots, \lambda^n, y) \in \Lambda_1 \times \dots \times \Lambda_n \times Y = Z$. Для краткости обозначим

$(\lambda^1,\dots,\lambda^n)$ через λ, а $\Lambda_1\times\dots\times\Lambda_n$ – через Λ, записывая $\lambda\in\Lambda$ и $\zeta=(\lambda,y)\in\Lambda\times Y=Z$.

Среди всего множества ситуаций Z выделяется подмножество H сбалансированных ситуаций, удовлетворяющих (по определению) условию

$$\sum_{s} Q^s y_s \geqslant \sum_{l=1}^{n}\varphi_l(\lambda^l). \tag{12}$$

Обозначим через Y_0 проекцию множества H на подпространство переменных y_s:

$$Y_0=\left\{y\in Y \mid \exists\ \lambda\in\Lambda : \sum_s Q^s y_s \geqslant \sum_{l=1}^{n}\varphi_l(\lambda^l)\right\}. \tag{13}$$

На множестве $\Lambda\times Y_0=Z_0\subset Z$ заданы отображения f_l, $l=1,\dots,(n+1)$, сопоставляющие ситуации $\hat\zeta\in Z\ (\supset H)$ множества $f_l(\hat\zeta)$ допустимых стратегий (соответствующих игроков) в ситуации $\hat\zeta$. Для потребителя l множество $f_l(\hat\lambda,\dots,\hat\lambda^n,\hat y)\equiv\Lambda_l(\hat y)\subset\Lambda_l$ задается условием

$$\Lambda_l(\hat y)=\{\lambda^l\in\Lambda_l \mid \lambda_{lk}=0,\ \text{если}\ \exists\ j : x_j^{lk}>0 \wedge (Q\hat y)_j=0\}. \tag{14}$$

Воспользовавшись обозначением $K_l(\hat y)$ для множества, задаваемого согласно (3), можем записать

$$\Lambda_l(\hat y)=\{\lambda^l\in\Lambda_l \mid \lambda_{lk}=0,\ k\notin K_l(\hat y)\}. \tag{15}$$

Заметим, что при $\hat y\in Y_0$ будет $\Lambda_l(\hat y)=\varnothing$ для всех l. Для распорядителя, т.е. игрока $(n+1)$, множество $f_{n+1}(\hat\zeta)=$ $=f_{n+1}(\hat\lambda^1,\dots,\hat\lambda^n,\hat y)$ по определению есть множество $Y(\hat\lambda)\subset Y$, состоящее из таких $y\in Y$, что $(\hat\lambda^1,\dots,\hat\lambda^n,y)\in H$, т.е.

$$Y(\hat\lambda)=\{y\in Y \mid \sum_s Q^s y_s \geqslant \sum_l \varphi_l(\hat\lambda^l)\}.$$

Согласно предположению 1 будет $Y(\hat\lambda)\neq\varnothing$ при всех $\hat\lambda\in\Lambda$.

Наконец, ситуации $\hat\zeta\in Z_0$ сопоставляются также целевые функции $g_l^{\hat\zeta}$ игроков (в ситуации $\hat\zeta$). Для распорядителя эта функция не зависит от ситуации и представляет собой $g_{n+1}(y)=\sum_s y_s$. Для потребителя l функцуия $g_l^{\hat\zeta}(\lambda^l)$ определяется в ситуации $\hat\zeta=(\hat\lambda^1,\dots,\hat\lambda^n,\hat y)$ формулой

$$\hat{g}_i^{\zeta}(\lambda^i) = \sum_{k \in K_i(\hat{y})} c_{ik}(\hat{y})\, \lambda_{ik}, \tag{16}$$

где $c_{ik}(\hat{y})$ – непрерывные функции переменного $\hat{y}$, которые определены на множестве таких $\hat{y}$, что $(Q\hat{y})_j > 0$, если $x_j^{ik} > 0$.

Ситуация $\hat{\zeta}$ по определению считается равновесной, если стратегии, которые порождают эту ситуацию, являются оптимальными для всех игроков в смысле значения их целевых функций на допустимых множествах, порождаемых ситуацией $\hat{\zeta}$, т.е. $\lambda_i = \hat{\lambda}_i$ и $y = \hat{y}$ являются решениями задач

$$g_i^{\hat{\zeta}}(\lambda^i) - \min_{\lambda^i \in \Lambda_i(\hat{y})}! \tag{17}$$

$$g_{n+1}(y) - \min_{y \in Y(\hat{\lambda})}! \tag{18}$$

Описанная игра многих лиц по своему типу вкладывается в общую схему, рассматривавшуюся Дебре [3] в связи с изучением экономических моделей, где была доказана теорема "о социальной системе", устанавливающая существование равновесных состояний. Однако некоторые из предположений Дебре в нашем случае нарушаются. В частности, не являются непрерывными точечно-множественные отображения f_i. Поэтому непосредственно теорема Дебре в нашем случае неприменима. Однако ниже показано, что существование равновесных состояний можно утверждать, если наложить на функции $c_{ik}(y)$ следующее предположение:

Предположение 2. $c_{ik}(y) \to +\infty$, если для некоторого j такого, что $x_j^{ik} > 0$, выполняется $(Qy)_j \to 0$.

Легко видеть, что модель транспортного равновесия, изложенная в п.1, вкладывается в описанную игру, и функции $c_{ik}(\hat{y})$, задаваемые по формулам (4), предположению 2 удовлетворяют. Тем самым существование транспортного равновесия будет доказано, если будет установлено существование равновесных состояний в описанной игре многих лиц.

Теорема. *При выполнении предположений* 1 *и* 2 *равновесные состояния в описанной игре существуют.*

Доказательство. Требуемый факт устанавливается, как в большинстве утверждений подобного рода, посредством использования теоремы Какутани (см. [4], с.97) применительно к отображению, сопоставляющему ситуации $\hat{\zeta}$ множество ситуаций, образованных оптимальными ответами игроков на ситуацию $\hat{\zeta}$. Обозначим это отображение через Φ. Формально оно строится по следующему правилу. Ситуация $\zeta = (v^1, \ldots, v^n, w)$ по определению принадлежит $\Phi(\hat{\zeta})$, при $\hat{\zeta} = (\hat{\lambda}^1, \ldots, \hat{\lambda}^n, \hat{y})$, если векторы $\lambda^i = v^i$, $i = 1, \ldots, n$, решают соответствующие задачи (17), а $y = w$ является решением соответствующей задачи (18).

Неподвижные точки этого отображения в точности являются равновесными ситуациями в рассматриваемой игре.

Так как $Y(\hat{\lambda}) \neq \emptyset$ при любых $\hat{\lambda} \in \Lambda$, и $y \geqslant 0$ для $y \in Y(\hat{\lambda})$, а $g_{n+1}(y) = \sum\limits_{s} y_s$, то задача (18) разрешима для всех $\hat{\zeta} \in Z$. Для разрешимости задачи (17) благодаря компактности Λ_i достаточно иметь лишь $K_i(\hat{y}) \neq \emptyset$. Это так для $\hat{y} \in Y_0$. Поэтому отображение Φ определено на Z_0 и при любом $\hat{\zeta} \in Z_0$ множество $\Phi(\hat{\zeta})$ является, как легко видеть, выпуклым компактом, содержащимся в Z_0. Однако само Z_0 не является компактом ввиду некомпактности Y_0. Тем не менее, теоремой Какутани можно воспользоваться, если в Z_0 выделить некоторое подмножество $\check{Z}_0$, являющееся выпуклым компактом и обладающее свойством: $\Phi(\hat{\zeta}) \subset \check{Z}_0$ при всех $\hat{\zeta} \in \check{Z}_0$.

Для выделения множества $\check{Z}_0$ достаточно показать, что для $\zeta = (v^1, \ldots, v^n, w) \in \Phi(\hat{\zeta})$ выполняется $\sum\limits_{s} w_s \leqslant \bar{\gamma}$ при некоторой константе $\bar{\gamma}$, не зависящей от $\hat{\zeta}$ и ζ. Тогда, вводя множество $Y_0^{\bar{\gamma}} = \{y \in Y_0 \mid \sum\limits_{s} y_s \leqslant \bar{\gamma}\}$, можно в качестве $\check{Z}_0$ взять $\check{Z}_0 = \Lambda \times Y_0^{\bar{\gamma}}$.

Существование такой константы $\bar{\gamma}$ получаем из следующих рассуждений: вектор w получается как оптимальное решение в задаче линейного программирования

$$\sum_{s} y_s \to \min! \qquad (19)$$

$$\sum_{s} Q^s y_s \geqslant \sum_{i} \varphi_i(\hat{\lambda}^i), \qquad (20)$$

$$y_s \geqslant 0 \quad \forall s. \qquad (21)$$

При изменении $\hat{\lambda}^i \in \Lambda_i$ правая часть $\sum_i \varphi_i(\hat{\lambda}^i)$ зачертит некоторый компакт D (ввиду компактности Λ_i и непрерывности φ_i). С другой стороны, оптимальное значение целевой функции в задаче линейного программирования есть непрерывная функция правых частей ее ограничений. А значит, на компакте D эта функция достигает своего максимума и, следовательно, ограничена, что и дает $\sum_s w_s \leqslant \tilde{\gamma}$.

Теперь для применения теоремы Какутани остается показать, что на компакте $\check{Z}_0$ отображение Φ является замкнутым, т.е. что из $\zeta^t \in \Phi(\hat{\zeta}^t)$ и $\zeta^t \longrightarrow \zeta^0$, $\hat{\zeta}^t \longrightarrow \hat{\zeta}^0$ следует $\zeta^0 \in \Phi(\hat{\zeta}^0)$. Покажем это.

Пусть $\hat{\zeta}^t = (\hat{\lambda}^{1t},\ldots,\hat{\lambda}^{nt},\hat{y}^t)$, $\zeta^t = (v^{1t},\ldots,v^{nt},w^t)$, $\hat{\zeta}^0 = (\hat{\lambda}^{10},\ldots,\hat{\lambda}^{n0},\hat{y}^0)$, $\zeta^0 = (v^{10},\ldots,v^{n0},w^0)$.

Кратко говоря, нужно показать, что предел ζ^0 оптимальных ответов ζ^t на изменяющуюся ситуацию $\hat{\zeta}^t$ является оптимальным ответом на предельную ситуацию $\hat{\zeta}^0$. Для $(n+1)$-го игрока это является следствием непрерывности отображений φ_i: имеем

$$\sum_s Q^s w_s^t \geqslant \sum_i \varphi_i(\hat{\lambda}^{it}),$$

и в пределе

$$\sum_s Q^s w_s^0 \geqslant \sum_i \varphi_i(\hat{\lambda}^{i0}),$$

т.е. $y = w^0$ является допустимым решением в задаче $(n+1)$-го игрока в ситуации $\hat{\zeta} = \hat{\zeta}^0$. Так как при изменении ситуации $\hat{\zeta}$ в задаче $(n+1)$-го игрока меняется лишь правая часть ограничений, то из теории линейного программирования легко заключить, что w^0 будет и оптимальным решением указанной задачи в ситуации $\hat{\zeta}^0$, что и требуется.

Рассмотрим теперь игрока $i \neq n+1$. Из $(Q\hat{y})_j > 0$ следует $(Qg^t)_j > 0$ для всех достаточно больших значений t, и это означает, что для таких t будет $K_i(\hat{y}^0) \subset K_i(\hat{y}^t)$.

Ввиду замкнутости $\check{Z}_0$ имеем $\hat{\zeta}^0 \in \check{Z}_0$, а потому $K_i(\hat{y}^0) \neq \emptyset$. Для $k \in K_i(\hat{y}^0)$ значение $c_{ik}(\hat{y}^0)$ определено, и

$c_{ik}(\hat{y}^t) \to c_{ik}(\hat{y}^0)$. С другой стороны, для $k' \in K_i(\hat{y}^t) \setminus K_i(\hat{y}^0)$ будет $c'_{ik}(\hat{y}^t) \to +\infty$ согласно предположению 2. Это означает, что у вектора $\lambda^i = v^{it}$, решающего задачу (17) в ситуации $\hat{\zeta} = \hat{\zeta}^t$, компонента с номером k' равна нулю при достаточно больших t, т.е. $v^t_{ik'} = 0$. Тем самым при таких t вектор $\lambda^i = v^{it}$ оптимален в задаче

$$\sum_{k \in K_i(\hat{y}^0)} c_{ik}(\hat{y}^t)\lambda_{ik} - \min! \tag{22}$$

$$\sum_{k \in K_i(\hat{y}^0)} \lambda_{ik} = 1, \tag{23}$$

$$\lambda_{ik} \geqslant 0, \quad k \in K_i(\hat{y}^0). \tag{24}$$

Это задача линейного программирования, у которого коэффициенты целевой функции меняются непрерывно с изменением $\hat{y}^t$. Из теории линейного программирования легко заключаем, что предельный вектор v^{i0} решает задачу i-го игрока при $\hat{y} = \hat{y}^0$, т.е. в ситуации $\hat{\zeta}^0$, что и требовалось.

Таким образом, множество $\check{Z}_0$ компактно, отображение Φ замкнуто и $\Phi(\zeta) \subset \check{Z}_0$ при всех $\zeta \in \check{Z}_0$. По теореме Какутани в $\check{Z}_0$ найдется неподвижная точка этого отображения $\hat{\zeta} \in \Phi(\hat{\zeta})$, которая, как отмечалось выше, и задает состояние равновесия в рассматриваемой игре. Теорема доказана.

3. Модификация модели

Более приближенным к реальности является несколько иной вариант модели, когда задача $(n+1)$-го игрока формулируется в виде

$$\mu - \max! \tag{25}$$

$$\sum_s Q^s y_s \geqslant \mu \sum_i \varphi_i(\hat{\lambda}^i), \tag{26}$$

$$\sum_s y_s = \gamma, \tag{27}$$

$$y_s \geqslant 0 \quad \forall s. \tag{28}$$

На языке рассмотренной выше интерпретации "автобусы-пассажиры" этот вариант соответствует такой ситуации, когда число автобусов в автопредприятии фиксировано равным γ, и автопредприятие планирует их маршруты таким образом, чтобы обеспечить равномерную удовлетворенность потребности в автобусах на каждой дуге сети.

Анализ этого варианта модели осуществляется по прежней схеме: выделение компактного $\check{Z}_0$, доказательство замкнутости отображения Φ, применение теоремы Какутани. Прежде всего следует заметить, что если $y = w$ и $\mu > 0$ решают задачу $(n+1)$-го игрока в новой формулировке (25)-(28), то $\tilde{y} = w/\mu$ решает задачу того же игрока в старой формулировке (19)-(21). А тогда, по доказанному ранее, $\sum_s \tilde{y}_s \leqslant \bar{\gamma}$, что влечет $\gamma = \sum w_s \leqslant \mu\bar{\gamma}$, т.е. $\mu \geqslant \gamma/\bar{\gamma}$. В результате $y = w$ принадлежит множеству Q, являющемуся проекцией на пространство переменных y_s множества, описываемого системой условий

$$\sum_s Q^s y_s \geqslant \frac{\gamma}{\bar{\gamma}} \sum_i \varphi_i(\lambda^i),$$

$$\sum_s y_s = \gamma,$$

$$y_s \geqslant 0 \quad \forall s,$$

$$\lambda^i \in \Lambda_i \quad \forall i.$$

Ясно, что G является выпуклым компактом, и в качестве $\check{Z}_0$ можем принять $\Lambda \times G$.

Доказательство замкнутости отображения Φ проходит без изменений. Надо лишь заметить, что при любом $t > 0$ верно $K_i(ty) = K_i(y)$.

Таким образом, в сформулированном варианте модели равновесные ситуации существуют при всех $\gamma > 0$. Легко видеть, что при этом если $(\hat{\lambda},\hat{y})$ и $\mu > 0$ задают равновесие в этом варианте модели, то, заменяя $\hat{y}$ на $\hat{y} = \hat{y}/\mu$, получим равновесное состояние в прежней модели, но с функциями $c'_{ik}(y') = c_{ik}(\hat{\mu}y')$.

Литература

1. **Aashtiani H.Z., Mognanti T.L.** Equilibria on a congested transportation network // SIAM J. on algebraic and discrete methods. - 1981. - V.2, № 3. - P.213-226.

2. **Defermos S., Negurney A.** A network formulation of market equilibrium problems and variational inequalities // Oper. Reseach Letters. - 1984. - V.3, № 5. - P.247-250.

3. **Debreu G.** Existence of competitive equilibrium // Handbook of mathematical economies. V.2 / Ed. Arrow K.J., Intriligator M.D. - Amsterdam - N.Y. - Oxford, 1982. - Ch.15. - P.697-743.

4. **Никайдо Х.** Выпуклые структуры и математическая экономика. - М.: Мир, 1972.

Поступила в редакцию
12.05.1991 г.