УДК 519.86

СУЩЕСТВОВАНИЕ СОГЛАСОВАННЫХ СОСТОЯНИЙ ПРИ НЕОГРАНИЧЕННОСТИ ГИБКИХ ЦЕН

В.А.Васильев, А.В.Сидоров

В настоящей работе анализируются условия существования согласованных состояний в экономиках смешанного типа для случая неограниченных по абсолютной величине гибких цен. Полученные результаты в значительной степени аналогичны традиционным теоремам существования экономического равновесия. Специфику составляет использование некоторых предельных характеристик смешанной экономики, описывающих ее свойства при высоких уровнях гибких цен. В конечном счете найденные условия (теорема 1) формулируются в терминах исходной модели и не требуют априорных ограничений на отображение избыточного спроса, как это имеет место в ситуациях с фиксированной верхней границей для гибких цен [1,2].

Основные трудности в изучении смешанной экономики связаны с нарушением классического закона Вальраса и неограниченностью области определения избыточного спроса [2]. Их преодоление, как и в [2, §1], осуществляется компактификацией[1] рассматриваемой модели и использованием обобщенной леммы Гейла – Никайдо – Дебре. Желая максимально прояснить главные идеи доказательства, мы не стремимся использовать самые общие варианты стандартных предположений. Анализируется лишь одно направление возможных обобщений, связанное с ослаблением условий строгой положительности равновесных цен в предельной экономике $\mathcal{E}^0$ (теорема 2).

1. Следуя работе [ ], под экономикой смешанного типа будем понимать приводимую ниже модель взаимодействия механизмов рационирования и рыночного регулирования

$$\mathcal{E} = \langle N, \{X'_i, X''_i, Y_i, Z_i, P_i, \omega^i, \beta_i, d_i\}_{i\in N}, q, Q\rangle,$$

где N – (конечное) множество участников, $q \in \mathbb{R}^l_+$ – фиксированный вектор стабильных цен, $Q \subseteq \mathbb{R}^l_+$ – множество допустимых гибких цен, $X'_i, X''_i \subseteq \mathbb{R}^l$ – совокупность наборов потребительских благ, доступных участнику $i \in N$ соответственно по ценам q и гибким ценам из Q, $Y_i \subseteq \mathbb{R}^l$ – его производственное множество, $\omega^i \in \mathbb{R}^l$ – начальный запас, $Z_i \subseteq X'_i \times X''_i \times Y_i$ – множество допустимых состояний с заданным на нем отношением строгого предпочтения P_i. Механизм рационирования задан функциями рациона $\beta_i : Y_i \longrightarrow X'_i$, сопоставляющими уровню производственной активности $y^i \in Y_i$ предельный уровень потребления $\beta_i(y^i) \in X'_i$ по стабильным ценам q. Далее, для каждого $i \in N$ определены функции основного дохода d_i, сопоставляющие элементу $y^i \in Y_i$ и системе цен $p \in Q$ доход $d_i(y^i, p)$. Кроме того, предполагается, что каждый участник может получить дополнительный доход $(p-q)^+(\beta_i(y^i) - x^{i\prime})$, перепродавая по гибким ценам p_k излишек рационируемых продуктов $(\beta_i(y^i)-x^{i\prime})_k$, приобретенных по ценам $q_k < p_k$[2].

---

[1] Для описания приема в целом, видимо, более уместен термин расслоение, которым мы далее и пользуемся.

[2] Здесь и далее $(p-q)^+_k = \max(p_k-q_k, 0)$, $px = p \cdot x \overset{\mathrm{df}}{=} \sum_{k=1}^{l} p_k \cdot x_k$ $(p,q,x \in \mathbb{R}^l)$.

Как видно из описания модели, в ней предполагается наличие двух рынков продуктов. На одном из них действуют жесткие (стабильные) цены q и механизм рационирования, устанавливающий зависимость между уровнем производственной активности и объемом потребляемых на этом рынке продуктов, а на другом цены устанавливаются с помощью механизма уравнивания спроса и предложения в рамках возможностей, предоставляемых множеством Q.

Учитывая сказанное выше, определим бюджетное множество участника $i \in N$ при ценах $p \in Q$:

$$B_i^q(p) = \{z^i=(x^{i\prime},x^{i\prime\prime},y^i) \in Z_i(\beta) \mid qx^{i\prime}+ px^{i\prime\prime}\leqslant \bar{d}_i(x^{i\prime},y^i,p)\},$$

где

$$Z_i(\beta) = \{z^i\in Z_i \mid x^{i\prime}\leqslant \beta_i(y^i)\}$$

- множество его β-допустимых состояний,

$$\bar{d}_i(x^{i\prime},y^i,p) = d_i(y^i,p) + (p-q)^+(\beta_i(y^i)- x^{i\prime})$$

- функция полного дохода.

Для каждого $i \in N$ введем множество индивидуального спроса

$$\mathcal{D}_i^q(p) = \{z^i\in B_i^q(p) \mid \mathcal{P}_i(z^i) \cap B_i^q(p) = \emptyset\}.$$

Далее, для фиксированного вектора цен $p \in Q$ рассмотрим множество p-полусбалансированных состояний

$$\tilde{Z}(p,N) = \{z = (x^{i\prime},x^{i\prime\prime},y^i)_N \in \prod_N Z_i(\beta) \mid \sum_N (x^{i\prime}+ x^{i\prime\prime}) \leqslant$$

$$\leqslant \sum_N (y^i+ \omega^i),\quad p\sum_N (x^{i\prime} + x^{i\prime\prime}) = p\sum_N (y^i+ \omega^i)\}$$

и множество сбалансированных состояний

$$Z(N) = \{z \in \prod_N Z_i(\beta) \mid \sum_N (x^{i\prime}+ x^{i\prime\prime}) = \sum_N (y^i+ \omega^i)\}.$$

Ясно, что если $p \gg \mathbf{0}$, то $\tilde{Z}(p,N) = Z(N)$.

Определение 1. Система цен $p \in Q$ называется полусогласованной (согласованной), если $\tilde{Z}(p,N) \cap \prod_N D_i^q(p) \neq \emptyset$ ($Z(N) \cap \prod_N D_i^q(p) \neq \emptyset$). Элементы этих множеств называются полусогласованными (согласованными) распределениями, ассоциированными с системой цен p.

Обозначим множество всех полусогласованных (согласованных) распределений экономики $\mathcal{E}$ через

$$\tilde{W}^q(\mathcal{E}) = \bigcup_{p \in Q} (\tilde{Z}(p,N) \cap \prod_N D_i^q(p)),$$

$$W^q(\mathcal{E}) = \bigcup_{p \in Q} (Z(N) \cap \prod_N D_i^q(p)) .$$

Ввиду нетрадиционности расматриваемой модели приведем формальное определение Парето-оптимальности (эффективности) распределения в $\mathcal{E}$.

Определение 2. Распределение $z \in \tilde{Z}(p,N)$ называется слабо эффективным, если $\tilde{Z}(p,N) \cap \prod_N \mathcal{P}_i(z^i) = \emptyset$.

Распределение $z \in \tilde{Z}(p,N)$ называется эффективным, если

$$\tilde{Z}(p,N) \cap \prod_N (\mathcal{P}_i(z^i) \cup \{z^i\}) = \{z\}.$$

Легко видеть, что понятие слабо эффективного распределения соответствует слабому условному оптимуму Парето, а эффективное - строгому условному оптимуму Парето (см. [3]).

В последнем случае в качестве отношения нестрогого предпочтения принимается точечно-множественное отображение

$$\bar{\mathcal{P}}_i(z^i) = \mathcal{P}_i(z^i) \cup \{z^i\}.$$

В настоящей работе будет доказано существование и эффективность согласованных распределений в экономике смешанного типа, которая удовлетворяет приведенным ниже условиям. Большинство из них стандартны и не требуют комментариев.

A1. Для любых $p \in Q$, $y^i \in Y_i$ $(i \in N)$

$$\sum_N d_i(y^i,p) = q\sum_N \beta_i(y^i) + p\sum_N (y^i + \omega^i - \beta_i(y^i)).$$

Согласно этому условию при ценах $p \in Q$ и уровне производственной активности $(y^i)_N \in \prod_N Y_i$ экономические агенты располагают суммарным основным доходом, достаточным для приобретения максимально возможного суммарного объема рационируемых благ $\sum_N \beta_i(y^i)$ по стабильным ценам q и приобретения оставшейся части произведенных продуктов и начальных запасов $\sum_N (y^i + \omega^i - \beta_i(y^i))$ по гибким ценам p.

В работе [4] В.Л.Макаровым рассматривалось условие

$$\sum_N d_i(y^i,p) = p\sum_N (y^i + \omega^i) - (p-q)^+ \sum_N \beta_i(y^i),$$

отличающееся от предыдущего тем, что для покупки k-го товара на первом рынке участник i располагает суммой $q_k \sum_N \beta_{ik}(y^i)$, если $q_k \geqslant p_k$, и суммой $p_k \cdot \sum_N \beta_{ik}(y^i)$ – в противном случае. Это условие более удобно для доказательства существования согласованных состояний, но не гарантирует их Парето-оптимальности (см. ниже предложение 1).

А2. Для всех $i \in N$ множества X'_i выпуклы, замкнуты и ограничены снизу, а множества X''_i, Y_i выпуклы и компактны.

А3. Для всех $i \in N$ функции d_i, β_i непрерывны по совокупности аргументов, а функции β_{ik}, $k = 1,\dots,l$, и $d_{(i)}(y^i,p) \triangleq d_i(y^i,p) + (p-q)^+\beta_i(y^i)$ вогнуты по y^i.

А4. Для всех $i \in N$ отношения предпочтения $\mathcal{P}_i$ выпуклы и имеют открытый график:

(а) множество Z_i выпукло;

(б) для любых элементов $z^i \in Z_i$, $\tilde{z}^i \in \mathcal{P}_i(z^i)$ и любого числа $0 < \lambda \leqslant 1$ элемент $\lambda\tilde{z}^i + (1-\lambda)z^i$ принадлежит $\mathcal{P}_i(z^i)$;

(в) множество $\Gamma(\mathcal{P}_i) \triangleq \{(z^i,\tilde{z}^i) \in Z_i \times Z_i \mid \tilde{z}^i \in \mathcal{P}_i(z^i)\}$ открыто.

А5. Для любых $i \in N$, $p \in Q$ отношение предпочтения $\mathcal{P}_i$ ненасыщаемо на множестве $\mathrm{pr}_{Z_i}\hat{Z}(p,N)$, где

$$\hat{Z}(p,N) = \left\{z \in \prod_N Z_i(\beta) \mid p\sum_N (x^{i\prime} + x^{i\prime\prime} - y^i - \omega^i) \leqslant 0\right\},$$

т.е. $\mathcal{P}_i(z^i) \cap Z_i(\beta) \neq \varnothing$ для всех $z^i \in \mathrm{pr}_{Z_i}\hat{Z}(p,N)$.

Как уже отмечалось во введении, в работе рассматривается случай неограниченных (свободных) гибких цен:

$$Q = \mathbb{R}^l_+.$$

Дело в том, что в общей ситуации абсолютный уровень согласованных цен определяется эндогенно (как будет ясно из дальнейшего, он зависит, в частности, от структуры стабильных цен q). Отыскание априорных оценок для абсолютных значений согласованных цен представляет собой отдельную, довольно сложную задачу, которой мы здесь не занимаемся (простейший случай см. в [2, §1]). Для качественного же анализа условий существования оказывается достаточной информация о предельном поведении некоторых характеристик модели при больших ценах p. Переходя к их формальному рассмотрению, как и в [2], введем модифицированные функции основного дохода

$$d^t_i(y^i,p) = td_i(y^i,p/t), \quad i \in N,\ t > 0,$$

определенные на множествах $Y_i \times S$, где

$$S = \{p \in \mathbb{R}^l_+ \mid \sum_{k=1}^{l} p_k = 1\}$$

- единичный симплекс в $\mathbb{R}^l$.

Ключевую роль в дальнейшем играет следующее предположение.

А6. Для любого $i \in N$ существует предельная функция

$$d^0_i(y^i_; p) = \lim_{t \to 0} d^t(y^i,p),$$

непрерывная по совокупности переменных.

Замечание. Простейшим примером функций d^i, удовлетворяющих этому предположению (а также предположениям А1 и А3), являются функции $d_i(y^i,p) = q\beta_i(y^i) + p(y^i + \omega^i - \beta_i(y^i))$. Ясно, что в этом случае $d^0_i(y^i,p) = p(y^i + \omega^i - \beta_i(y^i))$. В целом же нетрудно убедиться, что при условии А1 для любого $t > 0$ выполнено

$$\sum_N d_\iota^t(y^\iota,p) = t\cdot q\sum_N \beta_\iota(y^\iota) + p\sum_N (y^\iota + \omega^\iota - \beta_\iota(y^\iota)),$$

отсюда

$$\sum_N d_\iota^0(y^\iota,p) = p\sum_N (y^\iota + \omega^\iota - \beta_\iota(y^\iota)).$$

Равным образом, из условия А3 вытекает вогнутость функций

$$d_{(\iota)}^t(y^\iota,p) \triangleq d_\iota^t(y^\iota,p) + (p - tq)^+ \beta_\iota(y^\iota)$$

по y^ι для $t > 0$. Переходя к пределу $t \to 0$, получим вогнутость $d_{(\iota)}^0$.

Рассмотрим ассоциированную с $\mathcal{E}$ "предельную экономику"

$$\mathcal{E}^0 = \langle N, \{X_\iota', X_\iota'', Y_\iota'', Z_\iota, P_\iota, \omega^\iota, d_\iota^0, \beta_\iota\}_{\iota\in N}, S\rangle,$$

которую можно трактовать как смешанную экономику с нулевыми стабильными ценами. В частности, бюджетное ограничение ι-го участника можно представить в виде

$$\mathbb{0}\cdot x^{\iota\prime} + px^{\iota\prime\prime} \leqslant d_\iota^0(y^\iota,p) + p(\beta_\iota(y^\iota) - x^{\iota\prime}),$$

или, что то же самое, в виде

$$F_\iota^0(z^\iota; p) \triangleq p(x^{\iota\prime} + x^{\iota\prime\prime}) - d_\iota^0(y^\iota,p) - p\beta_\iota(y^\iota) \leqslant 0,$$

где $z^\iota = (x^{\iota\prime}, x^{\iota\prime\prime}, y^\iota)$.

А7. Для любых $\iota \in N$ и $p \in S$ найдется элемент $\tilde{z}^\iota \in Z_\iota(\beta)$ такой, что $F_\iota^0(\tilde{z}^\iota,p) < 0$.

Наконец, последнее условие гарантирует, что каждое полусогласованное состояние является согласованным.

А8. Для любого продукта k найдется участник $\iota_0 \in N$ такой, что:

(а) для любого $z^{\iota_0} \in \mathrm{Pr}_{z^{\iota_0}}\tilde{Z}(p,N)$ существует $\varepsilon > 0$ такое, что $z_{\varepsilon,k}^{\iota_0} \in Z_\iota$, где $z_{\varepsilon,k}^{\iota_0} = z^{\iota_0} + \varepsilon e^k$. Здесь e^k – k-й орт в пространстве $\mathbb{R}^l$;

(б) отношение $\mathcal{P}_{i_0}$ локально ненасыщаемо относительно $x_k^{i_0}$", т.е. для любого $z^{i_0} \in \Pr_{Z_{i_0}} \tilde{Z}(p,N)$ и $\varepsilon \in 0$ найдется $0 < \delta \leqslant \varepsilon$, для которого $Z_{\delta,k}^{i_0} \in \mathcal{P}_{i_0}(z^{i_0})$.

Теорема 1. *Если смешанная экономика $\mathcal{E}$ с областью гибких цен $Q = \mathbb{R}_+^l$ удовлеторяет условиям* А1-А8, *то $\tilde{W}^q(\mathcal{E}) = W^q(\mathcal{E}) \neq \emptyset$ и при этом каждое согласованное распределение эффективно.*

2. Предполагая выполненным условие А6, рассмотрим некоторую вспомсгательную конструкцию, позволяющую объединить в одно целое исходную смешанную экономику $\mathcal{E}$ и предельную экономику $\mathcal{E}^0$. Основное назначение этой конструкции заключается в том, чтобы сопоставить модели $\mathcal{E}$ параметризованное семейство экономик $\mathcal{E}^t (t \in [0,+\infty))$, говоря нестрого, тем больше удовлетворяющих классическому закону Вальраса, чем меньшие значения принимает параметр t[3].

Итак, пусть $\mathcal{E} = \langle N,(X'_i,X''_i,Y_i,Z_i,\mathcal{P}_i,\omega^i,\beta_i,d_i)_N,q,\mathbb{R}_+^l\rangle$, T - произвольное подмножество интервала $[0,+\infty)$. Для каждого слоя $\{t\} \times S$ множества $T \times S$ определим смешанную экономику

$$\mathcal{E}^t = \langle N,(X'_i,X''_i,Y_i,Z_i,\mathcal{P}_i,\omega^i,\beta_i,d_i^t)_N,tq,S\rangle$$

со стабильными ценами tq, областью гибких цен $Q = S$ и функциями основного дохода d_i^t, определяемыми, как и в [2], по формуле

$$d_i^t(y^i,p) = \begin{cases} td_i(y^i,p/t), & t \neq 0, \\ d_i^0(y^i,p) = \lim\limits_{t \to 0} d_i^t(y^i,p). \end{cases}$$

Семейство $\mathcal{E}^T = \{\mathcal{E}^t\}_T$ будем называть T-параметризованной смешанной экономикой, а всякий элемент $\mathcal{E}^t$ этого семейства - t-слоем в $\mathcal{E}^T$.

---

[3] Как известно [1,2], в исходной модели $\mathcal{E}$ закон Вальраса не выполняется.

Ясно, что бюджетное множество $B_l^t(p)$ t-слоя $\mathcal{E}^t$ $(t \neq 0)$, определяемое неравенством

$$tqx^{l\prime} + px^{l\prime\prime} \leqslant d_l^t(y^l, p) + (p-tq)^+(\beta_l(y^l) - x^{l\prime}), \qquad (*)$$

совпадает с бюджетным множеством $B_l^q(p/t)$ исходной экономики $\mathcal{E}$. Поэтому там, где это необходимо, будем отождествлять множество $T \times S$ $(0 \notin T)$ с соответствующей частью $A_T = \{p/t \mid p \in S,\ t \in T\}$ конуса $\mathbb{R}_+^l$, а $\mathcal{E}^T$ – с исходной моделью $\mathcal{E}$, в которой $Q = A_T$.

Отметим также, что бюджетные ограничения предельной модели $\mathcal{E}^0$, имеющие вид

$$p(x^{l\prime} + x^{l\prime\prime}) \leqslant d_l^0(y^l;\ p) + p\,\beta_l(y^l),\ p \in S,$$

в формальном плане представляют результат предельного перехода при $t \longrightarrow 0$ в выражении $(*)$.

В дальнейшем мы ограничимся случаем $T = [0, a)$, где a – конечное число или $+\infty$. Теорема 1 будет получена как частный случай более общей теоремы об экономике $\mathcal{E}^T$. Переходя к ее формулировке, введем необходимые обозначения и определения. Для каждого слоя $\mathcal{E}^t$ положим

$$S_t = \{p \in S \mid p \geqslant tq\};$$

$$P_t = \operatorname{cone} S_t$$

– замкнутый выпуклый конус, натянутый на S_t [4],

$$P_t^- = \{u \in \mathbb{R}^l \mid \forall p \in P_t^0 : up \leqslant 0\}$$

– поляра этого конуса.

Через $E^t(p)$ будем обозначать отображение агрегированного избыточного спроса в экономике $\mathcal{E}^t$.

Определение 3. Вектор $p \in S_t$ называется квазисогласованной системой цен, если существует элемент $\zeta \in E^t(p) \cap P_t^0$ такой, что $p\zeta = 0$.

Рассмотрим отображение $\sigma : T \longrightarrow S$, сопоставляющее каждому значению параметра $t \in T$ множество всех квазисогласованных систем цен в слое $\mathcal{E}^t$.

---

[4] Ясно, что $S_t = S \cap P_t$.

Легко заметить, что квазисогласованные цены обобщают понятие полусогласованных цен, и для $t = 0$ множество $W_0 = \sigma(0)$ в точности совпадает с множеством полусогласованных цен экономики $\mathcal{E}^0$.

В терминах отображения σ можно сформулировать близкие к необходимым условия существования полуравновесий, являющиеся существенным ослаблением требования $A8$.

Пусть $\partial S = \bigcup_{k=1}^{l} \gamma_k$ – граница симплекса S, $\gamma_k = \{p \in S | p_k = 0\}$ – замкнутая k-грань S. Положим $\Delta_q = \bigcup \{\gamma_k | q_k \neq 0\}$. Далее, через $\rho(p,X)$ будем обозначать расстояние от $p \in S$ до множества $X \subseteq S$, полагая $\rho(p,\emptyset) = +\infty$.

$A9$(а). Существует $p \in W_0 \setminus \Delta_q$, для которого нижний предел $\liminf\limits_{t \to +0} \rho(p,\sigma(t)) < \rho(p,W_0 \cap \Delta_q)$.

$A9$(б). Существует $p \in W_0 \setminus \Delta_q$, для которого верхний предел $\limsup\limits_{t \to +0} \rho(p,\sigma(t)) < \rho(p,W_0 \cap \Delta_q)$.

В обоих случаях имеется в виду, что t стремится к нулю, оставаясь строго положительным.

Теорема 2. *Пусть $T = [0,a)$ – интервал, $\mathcal{E}^T$ – T-параметризованная экономика, удовлетворяющая условиям $A1$–$A7$. Тогда если выполнено условие $A9$(а), то для любого $\varepsilon > 0$ найдется $t \in (0,\varepsilon)$, для которого $\tilde{W}(\mathcal{E}^t) \neq \emptyset$. Если же выполнено условие $A9$(б), то существует число $\bar{t} > 0$ такое, что для любого $t \in [0,\bar{t}]$ выполняется $\tilde{W}(\mathcal{E}^t) \neq \emptyset$.*

Ниже устанавливается справедливость теоремы 2 и показывается, что теорема 1 вытекает из теоремы 2. Последнее утверждение почти очевидно, если не считать импликации $A8 \Longrightarrow A9$(а) & $A9$(б), которая будет доказана в замечании к приводимой далее лемме 5.

Начнем с установления некоторых полезных в дальнейшем свойств согласованных и полусогласованных состояний.

Лемма 1. *Если выполнено условие $A8$, то $\tilde{W}(\mathcal{E}^t) = W(\mathcal{E}^t)$.*

Доказательство. Пусть z – некоторое p-полусогласованное состояние. Достаточно показать, что p – строго положительный вектор. Пусть, напротив, $p_k = 0$ для некоторого продукта k. Тогда рассмотрим состояние $\tilde{z}_{\delta,k}$ из условия A8. Для участника i_0 имеем $\tilde{z}^{i_0}_{\delta,k} \in P_{i_0}(z^{i_0})$. С другой стороны, $\tilde{z}^{i_0}_{\delta,k} \in B_{i_0}(p)$, так как $p_k = 0$. Таким образом, $P_{i_0}(z^{i_0}) \cap B_{i_0}(p) \neq \emptyset$, что противоречит выбору $z^{i_0} \in D_{i_0}(p)$. Следовательно, $p \gg 0$.

Лемма 2. *В условиях А3–А5 для любых $i \in N$, $p \in S$, $t \in T$, $z^i \in Pr_{z_i} \hat{Z}(p,N) \cap D^t_i(p)$ выполнено $F^t_i(z^i,p) = 0$. В частности, для любого квазисогласованного состояния все бюджетные неравенства превращаются в равенства.*

Доказательство. Действительно, в этом случае найдется $\tilde{z}^i \in P_i(z^i)$ и для любого $0 < \lambda \leqslant 1$ имеем $\lambda\tilde{z}^i + (1-\lambda)z^i \in P_i(z^i)$. С другой стороны, если $F^t_i(z^i,p) < 0$, то в силу непрерывности F^t_i для достаточных малых $\lambda > 0$ выполнено $\lambda\tilde{z} + (1-\lambda)z^i \in B^t_i(p)$, что противоречит условию $P_i(z^i) \cap B^t_i(p) = \emptyset$.

Предложение 1. *Если смешанная экономика $\mathcal{E}^T$ удовлетворяет условиям* А1, А3–А5, *то всякое полусогласованное состояние эффективно.*

Доказательство. Пусть z – полусогласованное состояние, отвечающее полусогласованной системе цен $p \in Q$. Предположим, что существует $\tilde{z} \in (\tilde{Z}(p,N) \cap \prod_N (P_i(z^i) \cup \{z^i\})) \setminus \{z\}$. Тогда либо $\tilde{z}^i \in P_i(z^i)$ и $F_i(\tilde{z}^i,p) > 0$, либо $\tilde{z}^i = z^i$ и $F_i(\tilde{z}^i,p) = 0$ в силу леммы 2.

Во всяком случае, строгое неравенство выполнено хотя бы для одного $i \in N$ и $\sum_N F_i(\tilde{z}^i,p) > 0$. Поэтому

$$0 = p\sum_N (\tilde{x}^{i\prime\prime} + \tilde{x}^{i\prime} - \tilde{y}^i - \omega^i) = (tq\sum_N \tilde{x}^{i\prime} + p\sum_N \tilde{x}^{i\prime\prime}) +$$

$$+ (p - tq)\sum_N \tilde{x}^{i\prime} - p\sum_N (\tilde{y}^i + \omega^i) > \sum_N d^t_i(\tilde{y}^i,p) +$$

$$+ (p - tq)^+ \sum_N (\beta_\iota(\tilde{y}^\iota) - \tilde{x}^{\iota\prime}) + (p - tq) \sum_N \tilde{x}^{\iota\prime} -$$

$$- p \sum_N (y + \omega^\iota) = (tq - p)^+ (\beta_\iota(\tilde{y}^\iota) - \tilde{x}^{\iota\prime}) \geqslant 0.$$

Полученное противоречие доказывает эффективность z.

Замечание. Легко заметить, что слабая эффективность полусогласованных состояний вытекает из одного лишь условия A1.

Рассмотрим отображение агрегированного избыточного спроса

$$E^t(p) = \left\{ \sum_N (x^{\iota\prime} + x^{\iota\prime\prime} - y^\iota - \omega^\iota) \,|\, \forall\iota : (x^{\iota\prime}, x^{\iota\prime\prime}, y^\iota) \in D_\iota^t(p) \right\}.$$

Следующее утверждение констатирует частичное (для $p \geqslant tq$) выполнение закона Вальраса в экономике $\mathcal{E}^T$. В частности, в слое $\mathcal{E}^0$ закон Вальраса выполнен полностью.

Предложение 2. *Если выполнены условия* A1, A4, *то для любых* $(t,p) \in T \times S$ *таких, что* $p \geqslant tq$, *и любого* $\zeta \in E^t(p)$ *выполнено* $p \cdot \zeta \leqslant 0$.

Доказательство. Пусть $\zeta = \sum_N (x^{\iota\prime} + x^{\iota\prime\prime} - y^\iota - \omega^\iota) \in E^t(p)$ и $p \geqslant tq$, тогда

$$p\zeta = (tq \sum_N \tilde{x}^{\iota\prime} + p \sum_N \tilde{x}^{\iota\prime\prime}) + (p - tq) \sum x^{\iota\prime} -$$

$$- p \sum_N (y^\iota + \omega^\iota) \leqslant \sum_N d_\iota^t(y^\iota, p) + (p - tq) \sum_N (\beta_\iota(y^\iota) - x^{\iota\prime}) +$$

$$+ (p - tq) \sum_N x^{\iota\prime} - p \sum_N (y^\iota + \omega^\iota) = 0.$$

Перейдем теперь непосредственно к доказательству существования полусогласованных состояний. Вначале будет показано, что отображение $E^t(p)$ удовлетворяет условиям одного из вариантов леммы Гейла - Никайдо - Дебре [5]. Отсюда будет вытекать непустота множества квазисогласованных состояний, а условия A9 обеспечат непустоту множества полусогласованных состояний.

Напомним, что через $F_\iota^t(z^\iota, p)$ обозначается функция превышения расходов ι-го участника в экономике $\mathcal{E}^t$ над его доходом:

$$F_\iota^t(z^\iota, p) = (tq)x^{\iota\prime} + px^{\iota\prime\prime} - d_\iota^t(y^\iota, p) - (p - tq)^+ (\beta_\iota(y^\iota) - x^{\iota\prime}).$$

Лемма 3. *Существует* $\hat{t} > 0$ *такое, что для любых* $p \in S, t \in [0,\hat{t}]$ *и* $l \in N$ *выполняется* $\inf\limits_{z^l \in Z_l(\beta)} F_l^t(z^l,p) < 0$.

Доказательство. Рассмотрим функцию $F_l(z^l,p,t) \triangleq F_l^t(z^l,p)$, которая непрерывна по совокупности переменных в силу *A3*. В силу *A7* для любого $p \in S$ найдется $z_p^l \in Z_l(\beta)$ такой, что $F_l(z_p^l,p,0) < 0$. В силу непрерывности F_l для любого z_p^l это неравенство сохраняется при достаточно малых вариациях (p,t), т.е. найдется открытая окрестность $U_p \ni p$ и $t_p^l > 0$ такие, что для всех $(\tilde{p},\tilde{t}) \in U_p \times [0,t_p^l]$ выполняется $F_l(z_p^l,\tilde{p},\tilde{t}) < 0$. Множества U_p образуют открытое покрытие S, поэтому в силу компактности S существует конечное множество $\{p_1,\dots,p_s\} \subseteq S$ такое, что $\bigcup\limits_i U_{p_i} = S$. Выберем $\hat{t} = \min\limits_{j,l} t_{p_j}^l$. Легко видеть, что оно удовлетворяет условию леммы.

В дальнейшем в качестве $\hat{t}$ возьмем число $\min\left\{\hat{t}, \frac{1}{\|q\|_1}\right\}$, так как по определению квазисогласованных состояний $\sigma(t) = \varnothing$ при $t > \frac{1}{\|q\|_1}$.

Лемма 4. *Отображение* $E^t(p)$ *является полунепрерывным сверху по совокупности переменных* $(t,p) \in [0,\hat{t}] \times S$ *с непустыми выпуклыми и компактными значениями.*

Доказательство. Для любого $0 \leqslant t < a$, $l \in N$ и $p \in S_l$ множество $B_l^t(p)$ выпукло и компактно. Это легко вытекает из предположений *A2–A4*. Непустота $B_l^t(p)$ для $t \in [0,\hat{t}]$ вытекает из леммы 3. Более того, непустым является множество $B_l'^t(p) = \{z^l | F_l^t(z^l,p) < 0\}$. Кроме того из непрерывности функций d_l^t, β_l по всем аргументам вытекает замкнутость отображения $B_l : T \times S \longrightarrow \mathbb{R}^{sl}$.

Далее, в силу открытости отношения P_l множество $D_l^t(p)$ замкнуто в множестве $B_l^t(p)$, следовательно, компактно. Кроме того оно выпукло в силу выпуклости множества $B_l^t(p)$ и отношения P_l. Наконец, непустота множества $D_i^t(p)$ стандартно следует из компактности $B_i^t(p)$, открытости, иррефлексивности и выпуклости отношения P_i.

Покажем замкнутость отображения D_i : $[0,\hat{t}] \times S \longrightarrow \mathbb{R}^{3l}$. Пусть $p_n \longrightarrow p$, $t_n \longrightarrow t$ и $z_n^i \in D_i^{t_n}(p_n)$ сходится к z^i. Тогда $z^i \in B_i^t(p)$ в силу замкнутости $B_i^t(p)$. Остается показать, что $P_i(z^i) \cap B_i^t(p) = \emptyset$. Пусть это не так и $\tilde{z}^i \in P_i(z^i) \cap B_i^t(p)$. По лемме 3 найдется $\hat{z}^i \in B_i'^{\,t}(p)$. Тогда элемент $\lambda\hat{z}^i + (1-\lambda)\tilde{z}^i \in P_i(z^i)$ для достаточно малых $\lambda > 0$ в силу открытости $P_i(z^i)$. С другой стороны, $F_i^t(\lambda\hat{z}^i + (1-\lambda)\tilde{z}^i, p) \leqslant$ $\leqslant \lambda F_i^t(\hat{z}^i,p) + (1-\lambda)F_i^t(\tilde{z}^i,p) \leqslant \lambda F_i^t(\hat{z}^i,p) < 0$ ввиду выпуклости F_i^t, т.е. $\lambda\hat{z}^i + (1-\lambda)\tilde{z}^i \in P_i(z^i) \cap B_i'^{\,t}(p) \neq \emptyset$. Но тогда в силу открытости P_i и непрерывности F_i по (z,p,t) для достаточно больших n имеем $P_i(z_n^i) \cap B_i'^{\,t_n}(p_n) \neq \emptyset$, что противоречит выбору $z_n^i \in D_i^{t_n}(p_n)$.

Итак, все отображения $D_i^t(p)$ замкнуты, отсюда замкнутым является и отображение агрегированного избыточного спроса $E^t(p)$. Ограниченность образа отображения $E^t(p)$ легко вытекает из *А2* и *А3*. Следовательно, $E^t(p)$ – полунепрерывное сверху отображение.

Лемма 5. *Для любого* $t \in [0,\hat{t}]$ *выполняется* $\sigma(t) \neq \emptyset$.

Доказательство. В силу леммы 4 и предложения 2 для произвольного фиксированного $t \in [0,\hat{t}]$ к отображению $E^t : S \longrightarrow \mathbb{R}^l$ применима лемма Гейла – Никайдо – Дебре (см., например, [5]). Из нее вытекает, что существует $\bar{p} \in S_t$ такой, что $E^t(\bar{p}) \cap P_t^0 \neq \emptyset$. Пусть $\zeta = \sum\limits_N (x^{i\prime} + x^{i\prime\prime} - y^i - \omega^i) \in E^t(\bar{p}) \cap P_t^0$. Тогда по определению $E^t(p)$ для любого $i \in N$ имеем $z^i = (x^{i\prime}, x^{i\prime\prime}, y^i) \in D_i^t(\bar{p})$. С другой стороны, $\bar{p}\zeta \leqslant 0$, так как $\zeta \in P_t^0$, $\bar{p} \in P_t$, т.е. $\bar{z}^i \in \mathrm{Pr}_{z^i}\hat{Z}(\bar{p},N)$. Отсюда, в силу леммы 2, $F_i^t(z^i,\bar{p}) = 0$ для всех $i \in N$.

Вследствие этого имеем

$$0 \geqslant \bar{p}\zeta = \sum_N [\bar{p}(x^{i\prime} + x^{i\prime\prime}) - \bar{p}(y^i + \omega^i)] =$$

$$= \sum_N F_i^t(z^i,\bar{p}) + ((\bar{p} - tq)\sum_N x^{i\prime} + \sum_N (d_i^t(y^i,\bar{p}) +$$

$$+ (\bar{p} - tq)^+(\beta_i(y^i) - x^{i\prime})) - \bar{p}\sum_N (y^i + \omega^i)) =$$

$$= 0 + (tq - \bar{p})^+ \sum_N (\beta_i(y^i) - x^{i\prime}) \geqslant 0,$$

т.е. $\bar{p}\zeta = 0$. Отсюда, по определению, $\bar{p} \in \sigma(t)$. Лемма доказана.

Замечание. Из предыдущих утверждений вытекает, что условие *A8* влечет *A9*(а) и *A9*(б). В самом деле, в силу леммы 5 $W_0 = \sigma(0) \neq \emptyset$, а в силу леммы 1 $W_0 \cap \Delta_q \subseteq W_0 \cap \partial S = \emptyset$, т.е. $W_0 \setminus \Delta_q = W_0 \neq \emptyset$ и для любого $p \in W_0$ имеем $\rho(p, W_0 \cap \Delta_q) = +\infty$. В то же время функция $\rho(p,\sigma(t))$ ограничена на отрезке $[0,\hat{t}]$ для некоторого $\hat{t} > 0$. Поэтому оба предела являются конечными величинами.

Переходя к доказательству следующего утверждения, отметим очевидный факт, что отображение $t_t^0 \longmapsto P_t^0$ $(t \in T)$ является полунепрерывным сверху.

Лемма 6. *Отображение* σ *имеет замкнутый график.*

Доказательство. Пусть $t_n \longrightarrow t$ - сходящая в T последовательность и $p_n \in \sigma(t_n)$ - последовательность, сходящаяся к $p \in S$. Покажем, что $p \in \sigma(t)$. Действительно, из условия $p_n \geqslant t_n q$ для всех n следует $p \geqslant tq$, т.е. $p \in S_t$. Далее, для любого n по условию найдется $\zeta_n \in E^{t_n}(p_n) \cap P^0_{t_n}$, $p_n\zeta = 0$. Легко видеть, что образ отображения E^tсодержится в некотором компакте, общем для всех t. Поэтому можно считать, что ζ_n сходится к некоторому $\zeta \in \mathbb{R}^l$. Но в силу замкнутости отображений $E^t(p)$ и P_t^0 имеем $\zeta \in E^t(p) \cap P_t^0$ и $p\zeta = 0$, т.е. σ - замкнутое отображение.

Прежде чем перейти непосредственно к доказательству теоремы 2, докажем несколько чисто технических результатов. Легко заметить, что при $t \in (0,\hat{t})$ множество S_t является многогранником, подобным симплексу S. Обозначим через ∂S_t его границу, а через Δ_q^t - объединение всех граней S_t, не содержащих точки $q\ /\ \|q\|_1$.

Лемма 7. *Пусть* $t \in (0,\hat{t})$, $k \in L = \{1,\dots,l\}$. *Тогда*

(а) *если* $p \in S_t \setminus \partial S_t$, *то* $\tilde{p}(k) \triangleq (p|tq_k) \in P_t$;

(б) *если* $p \in \partial S_t \setminus \Delta_q^t$ *и* $p_k = 0$, *то найдется* $\varepsilon > 0$ *такое, что* $\hat{p}(k) \triangleq p + \varepsilon e^k \in P_t$, *а если* $p_k > 0$, *то* $\tilde{p}(k) = (p|tq_k) \in P_t$.

Доказательство. Утверждение (а) очевидно. Далее, при условии (б) выполнено $\partial S_t \setminus \Delta_q^t \subseteq \partial S$. В самом деле, если $q / \|q\|_1 \in \gamma_k^t$, т.е. $q_k / \|q\|_1 = tq_k$, то, поскольку $t < 1/\|q\|_1$, получаем $q_k = 0$. И наоборот, если $q_k > 0$, то $q / \|q\|_1 \notin \gamma_k^t$.

Из предыдущего замечания сразу вытекает, что в условиях (б) если $p_k = 0$, то и $q_k = 0$. Если же $p_k > 0$, то $p_k > tq_k$. В самом деле, если $q_k = 0$, то это очевидно. Если же $q_k > 0$ и $p_k = tq_k$, то из предыдущего вытекало бы, что $p \in \gamma_k^t \subseteq \Delta_q^t$.

Докажем теперь утверждение леммы. Пусть $p_k = 0$, тогда $p + \varepsilon e^k \geqslant (1+\varepsilon)tq$, где в качестве $\varepsilon > 0$ можно взять любое число, меньшее $\min_j\{(p_j - tq_j)/tq_j\}$ по всем $j \in L$ таким, что $p_j > 0$. Отсюда следует включение

$$\frac{\hat{p}(k)}{\|\hat{p}(k)\|_1} = \frac{p + \varepsilon e^k}{(1+\varepsilon)} \in S_t,$$

т.е. $\hat{p}(k) \in P_t$. Пусть теперь $p_k > 0$, тогда $p_k - tq_k > 0$ и $\tilde{p}(k) = (p|tq_k) \geqslant (1-(p_k - tq_k))tq$. Это означает, что

$$\frac{\tilde{p}(k)}{\|\tilde{p}(k)\|_1} = \frac{(p|tq_k)}{(1-(p_k-tq_k))} \geqslant tq,$$ т.е. $\tilde{p}(k) \in P_t$. Лемма доказана.

Лемма 8. *Если* $t \in (0,\hat{t})$, p *– квазисогласованная система цен в* $\mathcal{E}^t$ *и* $p \in S_t \setminus \partial S_t$, *то* p *– согласованная система.*

Доказательство. Пусть $H_p = \{y \in \mathbb{R}^l | py = 0\}$ – ортогональная к p гиперплоскость. Достаточно показать, что $H_p \cap P_t^0 = \{\mathbf{0}\}$. Пусть $y \in H_p \cap P_t^0$, тогда $py = 0$ и для любого $k \in L$ имеем $\tilde{p}(k)y \leqslant 0$ в силу леммы 7(а). Отсюда $(p_k - tq_k)y_k = (p - \tilde{p}(k))y = py - \tilde{p}(k)y \geqslant 0$, т.е. $y_k \geqslant 0$ для любого $k \in L$. Однако легко заметить, что

$\mathbb{R}^l_+ \cap P^0_t = \{\mathbb{0}\}$, т.е. $y = \mathbb{0}$.

Лемма 9. *Если* $t \in (0,\hat{t})$, p - *квазисогласованная система цен в* $\mathcal{E}^t$ *и* $p \in \partial S_t \setminus \Delta^t_q$, *то* p - *полусогласованная система цен.*

Доказательство. Пусть $\zeta \in E^t(p) \cap P^0_t$, $p\zeta = 0$. Покажем, что $\zeta \leqslant \mathbb{0}$. Для этого достаточно убедиться, что $H_p \cap P^0_t \subseteq -\mathbb{R}^l_+$.

Пусть $y \in P^0_t \cap H_p$ и $k \in L$ такое, что $p_k > 0$. Тогда $p_k > tq_k$ и $\tilde{p}(k)y \leqslant 0$. Отсюда $(p_k-tq_k)y_k = (p-\tilde{p}(k))y = py-\tilde{p}(k)y \geqslant 0$, т.е. $y_k \geqslant 0$. С другой стороны, $0 = py = \sum\limits_{\{k|p_k>0\}} p_k y_k$. Значит, $y_k = 0$ для всех k таких, что $p_k > 0$. Если же $p_k = 0$, то для подходящего $\varepsilon > 0$ имеем $\varepsilon y_k = (\hat{p}(k)-p)y = \hat{p}(k)y-py \leqslant 0$, т.е. $y_k \leqslant 0$.

Доказательство теоремы 2. В силу доказанных выше результатов остается проверить, что при условии $A9$(а) для любого $\varepsilon > 0$ найдется $t \in (0,\varepsilon)$, для которого $\sigma(t) \subseteq \Delta^t_q$, а при условии $A9$(б) найдется $\bar{t} > 0$ такой, что для любого $t \in [0,\bar{t}]$ выполнено $\sigma(t) \subseteq \Delta^t_q$.

Действительно, в первом случае найдутся последовательность $t_n \longrightarrow 0$ и число $\gamma > 0$ такие, что $\rho(p,p_n) \leqslant \rho(p,W_0 \setminus \Delta_q) - \gamma$ для некоторого $p \in W_0 \setminus \Delta_q$ и некоторых элементов $p_n \in \sigma(t_n)$. В силу компактности S можно считать, что $p_n \longrightarrow \bar{p} \in S$. Далее, в силу замкнутости σ имеем $\bar{p} \in \sigma(0) = W_0$. Переходя к пределу по n, получаем неравенство $\rho(p,\bar{p}) \leqslant \rho(p,W_0 \cap \Delta_q) - \gamma$.

Если бы было $\sigma(t_{n_k}) \subseteq \Delta_q^{t_{n_k}}$ для какой-либо подпоследовательности, то, в частности, $p_{n_k} \in \Delta_q^{t_{n_k}}$ и $p = \lim\limits_{k\to\infty} t_{n_k} \in \Delta_q$.

Таким образом, $\bar{p} \in W_0 \cap \Delta_q$ и $\rho(p,W_0 \cap \Delta_q) \leqslant \rho(p,\bar{p}) \leqslant \rho(p,W_0 \cap \Delta_q) - \gamma$ для $\gamma > 0$. Полученное противоречие доказывает, что для любого $\varepsilon > 0$ найдется $0 < t_n < \varepsilon$, для которого $\sigma(t_n) \subseteq \Delta_q^{t_n}$.

Пусть теперь выполнено А9(б) и предположим, что найдется последовательность $t_n \to 0$ такая, что $\sigma(t_n) \subseteq \Delta_q^{t_n}$ для всех n. В силу замкнутости множеств $\sigma(t_n)$ найдутся элементы $p_n \in \sigma(t_n)$, для которых $\rho(p,p_n) = \rho(p,\sigma(t_n))$. Переходя, если нужно, к подпоследовательности, можно считать, что $p_n \to \bar{p} \in W_0 \cap \Delta_q$ в силу замкнутости σ и выбора t_n. Отсюда получаем

$$\limsup_{t \to +0} \rho(p,\sigma(t)) \geqslant \lim_{n \to \infty} \rho(p,p_n) = \rho(p,\bar{p}) \geqslant \rho(p,W_0 \cap \Delta_q).$$

Полученное противоречие доказывает, что множество $\{t > 0 | \sigma(t) \subseteq \Delta_q^t\}$ отделено от нуля. Теорема доказана.

Литература

1. **Васильев В.А.** О согласованных распределениях в экономических моделях с двумя видами цен // Оптимизация. - 1989. - Вып. 42(59). - С.23-41.

2. **Васильев В.А., Маракулин В.М.** Неклассические рынки, механизмы группового выбора и смежные вопросы // Оптимизация. - 1990. - Вып.47(64). - С.5-109.

3. **Экланд И.** Элементы математической экономики. - М.: Мир, 1983.

4. **Макаров В.Л., Васильев В.А., Козырев А.Н., Маракулин В.М.** О некоторых проблемах и результатах современной математической экономики // Оптимизация. - 1982. - Вып.30(46). - С.5-86.

5. **Васильев В.А.** Модели экономического обмена и кооперативные игры. - Новосибирск: изд. НГУ, 1984.

Поступила в редакцию
15 апреля 1991 г.