Посвящается светлой памяти Глеба Павловича Акилова

УДК 517.98

ОПЕРАТОР, ДИЗЪЮНКТНЫЙ ГОМОМОРФИЗМАМ, ОПЕРАТОРАМ МАГАРАМ И ИНТЕГРАЛЬНЫМ ОПЕРАТОРАМ

И.И.Шамаев

В заметке построен пример порядково-непрерывного оператора, который обладает свойствами, указанными в названии, и тем самым получен положительный ответ на вопрос А.Г.Кусраева о существовании таких операторов. Статья является продолжением работы [1] автора, откуда можно извлечь все используемые нами определения и обозначения.

1. Пусть $(X,\mathcal{A},\mu)$ и $(Y,\mathcal{B},\nu)$ - измеримые пространства с конечными мерами, $M(X)$ и $M(Y)$ - пространства всех измеримых функций на X и Y соответственно. В дальнейшем K-пространство ограниченных элементов $L^{\infty}_{\mu}(X)$ и $L^{\infty}_{\nu}(Y)$ отождествим с их представлениями в виде $C(\Omega)$ и $C(\Delta)$ всех непрерывных функций на экстремально-несвязных компактных топологических пространствах Ω и Δ соответственно. Канонические вложения $M(X) \longrightarrow C_{\infty}(\Omega)$ и $M(Y) \longrightarrow C_{\infty}(\Delta)$ обозначим одним и тем же символом ι. Зафиксируем лифтинги из $C(\Omega)$ в $\mathcal{L}^{\infty}_{\mu}$ и из $C(\Delta)$ в $\mathcal{L}^{\infty}_{\nu}$ и обозначим их через λ [2].

Пусть L и K - произвольные идеалы в $M(X)$ и $M(Y)$ соответственно, каждый из которых содержит постоянную функцию, равную 1. Под линейным оператором $T : L \longrightarrow K$ всегда будем подразумевать линейный оператор T, переводящий μ-эквивалентные функции в ν-эквивалентные. Операторы, преобразующие одну и ту же функцию в ν-эквивалентные функции, будем отождествлять. Линейный оператор $T : L \longrightarrow K$ называется псевдоинтегральным, если существует ядро (мер на σ-алгебре $\mathcal{A}$) $\{\nu_y\}$ такое, что $T(f)(y) = \int_X f d\nu_y$ ν-почти всюду при всех $f \in L$ [3]. А.Соурур показал, что если $(X,\mathcal{A},\mu)$ – стандартное измеримое пространство, то положительный оператор T псевдоинтегрален в том и только в том случае, когда T порядково-непрерывен [4]. По Л.Вайсу, T называется оператором с θ-представлением, если для ν-почти всех $y \in Y$ мера ν_y является θ-мерой, где для $\theta = l,s,d,a$ "θ-мера" означают абсолютно непрерывную, сингулярную, диффузионную (непрерывную) и атомическую меру соответственно [5]. Отметим, что вместо терминов "c-мера", "оператор типа c" из [1] здесь использованы: "d-мера" и "оператор типа d". В дальнейшем $L = \mathcal{L}^{\infty}_{\mu}$, $K = \mathcal{L}^{\infty}_{\nu}$, $E = C(\Omega)$, $F = C(\Delta)$. Пространство всех порядково-непрерывных операторов из L в K обозначим через $\mathcal{L}^0(L,K)$. Отметим, что отображения $A \longrightarrow \hat{A}$, $T \longrightarrow \check{T}$, где $\hat{A} = \iota \circ A \circ \lambda$ для $A \in \mathcal{L}^0(L,K)$ и $\check{T} = \lambda \circ T \circ \iota$ для $T \in L^0(E,F)$, устанавливают взаимно-обратные векторные и структурные изоморфизмы K-пространств $\mathcal{L}^0(L,K)$ и $L^0(E,F)$. Опустим стандартное доказательство следующего утверждения.

Предложение 1.1. *Пусть $(X,\mathcal{A},\mu)$ – стандартное измеримое пространство. Тогда при изоморфизмах*

$$\hat{}:\mathcal{L}^0(L,K) \longrightarrow L^0(E,F) \quad \text{и} \quad \check{}:L^0(E,F) \longrightarrow \mathcal{L}^0(L,K)$$

операторам с θ-представлением соответствуют операторы типа θ, $\theta = l,s,d,a$.

В дальнейшем в этом пункте ограничимся рассмотрением одного произвольного измеримого пространства $(X,\mathcal{A},\mu)$. Так же как и раньше, E обозначает $L^{\infty}_{\mu}(X)$. Пусть $\alpha_g(f) = \int_X fg d\mu$ для каждых $f,g \in E$. Так как $\alpha_g \in E^0$, то, отождествляя g и α_g, будем считать E порядковым идеалом E^0.

Определение 1.2. Оператор $T:E \longrightarrow E$ называется самосопряженным, если $\int_X fTg d\mu = \int_X gTf d\mu$ для всех $f,g \in E$.

Из определения видно, что любой положительный самосопряженный оператор является порядково-непрерывным. Если $T:E \longrightarrow E$ - порядково-непрерывный оператор, сопряженный ему оператор T^* действует из E^0 в E^0. Отметим, что если T является положительным самосопряженным оператором, то $T^*|_E = T$.

Предложение 1.3. *Если $T : E \longrightarrow E$ - положительный самосопряженный оператор диффузионно-сингулярного типа, то T дизъюнктен всем гомоморфизмам, операторам Магарам и интегральным операторам.*

Доказательство. Из теорем A' и C' [1] следует, что достаточно установить дизъюнктность T всем операторам Магарам. Пусть $0 \leqslant S \leqslant T$, где S - оператор Магарам. Тогда $0 \leqslant S^* \leqslant T^*$, где $S^*,T^* : E^0 \longrightarrow E^0$ и S^* является гоморфизмом векторных решеток [5]. Но сужение T^* на E совпадает с T и поэтому $S^*|_E$ есть гомоморфизм векторных решеток, мажорируемый оператором диффузионного типа T. Следовательно, $S^*|_E = 0$, откуда следует, что $S^* = 0$, т.е. $S = 0$.

2. Прежде чем построить конкретный пример нетривиального самосопряженного порядково-непрерывного оператора диффузионного типа, установим некоторые факты из теории мер. Отождествив 0 и 1 в интервале $[0,1]$, введем операцию суммы по mod1 и тем самым превратим в компактную коммутативную группу $(G,+)$, для которой мера Лебега μ превращается в меру Хаара. Обозначим через $\mathcal{B}$ σ-алгебру всех борелевских подмножеств G, Bor^∞ - K_σ - пространство всех борелевских функций на G. Односвязные подмножества G согласимся называть интервалами. Пусть ν - произвольная борелевская мера на G. Для $t \in G$ сдвиг меры ν на t будем обозначать через ν_t, т.е. $\nu_t B = \nu(t+B)$ для всех $B \in \mathcal{B}$.

Лемма 2.1. *Для любых $A,B \in \mathcal{B}$ справедливо соотношение*

$$\int_A \nu(t + B)d\mu(t) = \int_B \nu(t + A)d\mu(t).$$

Доказательство. На $G \times G$ рассмотрим произведение мер $\mu \otimes \nu$. Функция двух переменных $\chi_A(s-h)\chi_B(h)$ на $G \otimes G$ измерима и ограничена. Замечая, что $\chi_A(s - h) = \chi_{h+A}(s)$, и применяя теорему Фубини, получаем, что функция

$$\nu(h + A)\chi_B(h) = \int_G \chi_A(s - h)\chi_B(h)\, d\nu(s)$$

также интегрируема и

$$\int_{G\times G} \chi_A(s-h)\chi_B(h)d\mu \otimes \nu = \int_B \nu(t+A)d\mu(t).$$

Аналогично, вновь используя теорему Фубини и замену $s-t = h$, получим

$$\int_{G\times G} \chi_A(s-h)\chi_B(h)d\mu \otimes \nu =$$

$$= \int_G \left\{ \int_G \chi_A(t)\chi_{t+B}(s)d\mu(t)\right\} d\nu(s) =$$

$$= \int_A \nu(t+B)d\mu(t),$$

откуда следует требуемое равенство.

Лемма 2.2. *Пусть ν – конечная диффузионная мера, A – интервал из G. Тогда функция $t \longrightarrow \nu(t+A)$ непрерывна.*

Доказательство. Мера ν на G естественным образом определяет меру на $[0,1]$, которую также обозначим через ν. На каждом интервале $[l,l+1]$ определим меру ν_l так: $\nu_l B = \nu[B-l,B-l+1]$, $l = 0,\pm1,\pm2,\ldots$, для каждого борелевского множества $B \subset [l,l+1]$. Тогда $\nu^* = \sum_{-\infty}^{\infty} \nu_l$ есть σ-конечная борелевская диффузионная мера на R. Теперь нам достаточно доказать непрерывность функции $t \longrightarrow \nu^*(t+A)$. Будем считать, что $A = [a,b]$. Пусть $t_n \uparrow t$. Тогда найдется число s такое, что при достаточно больших n выполнены неравенства $t_n+a < s < t_n+b$. Следовательно, $t+a \leqslant s \leqslant t+b$. В силу диффузионности меры ν^* имеем, что $\nu^*[t_n+c,t+c] \downarrow 0$ для любых $c \in R$, поэтому из соотношений

$$\nu^*(t_n+ [a,b]) = \nu^*[t_n+ a,\ t +a] +$$
$$+ \nu^*[t +a,s] + \nu^*[s,t + b] - \nu^*[t_n+ b,t + b]$$

следует, что $\nu^*(t_n+A) \longrightarrow \nu^*(t+A)$. Аналогично рассматривается случай $t_n \downarrow t$. Лемма доказана.

Лемма 2.3. *Для любого $B \in \mathcal{B}$ функция $t \longrightarrow \nu(t + B)$ является* *борелевской.*

Доказательство. Пусть $\mathcal{A}$ обозначает алгебру всех конечных объединений интервалов G. Для $A \in \mathcal{A}$ пусть $(m_0 A)(t) = \nu(t+A)$. Из леммы 2.2 следует, что векторная мера m_0 действует из $\mathcal{A}$ в $C(G)$, иначе говоря, $m_0 : \mathcal{A} \longrightarrow Bor^{\infty}$. Так как K_{σ}-пространство Bor^{∞} обладает достаточным множеством σ-непрерывных линейных функционалов, то по теореме Райта существует мера $m : \mathcal{B} \longrightarrow Bor^{\infty}$, являющаяся распространением m_0 [6]. Меру ν_t^* на $\mathcal{B}$ определим таким образом:

$$\nu_t^*(B) = m(B)(t) \quad \text{для всех } B \in \mathcal{B} \text{ и } t \in G.$$

Так как борелевские меры ν_t^* и ν_t на порождающей подалгебре $\mathcal{A}$ совпадают, то они равны. Следовательно, функции mB и $t \longrightarrow \nu(B)$ означают одно и то же, откуда следует наше утверждение.

Зафиксировав произвольную ненулевую борелевскую меру ν на $[0,1]$, являющуюся диффузионной и сингулярной одновременно, можем считать, что ν определена и на G. Для $f \in Bor^{\infty}$ пусть $(Tf)(t) = \int_G f d\nu_t$. Так как $T(\chi_B) \in Bor^{\infty}$ для любого $B \in \mathcal{B}$, то $Tf \in Bor^{\infty}$ для всех $f \in Bor^{\infty}$. Для $B \in \mathcal{B}$ и $t \in G$ положим $\nu(t,T) = T(\chi_B)(t)$.

Предложение 2.2. *Построенный оператор $T : Bor^{\infty} \longrightarrow Bor^{\infty}$ удовлетворяет следующим условиям:*

(i) для всех $t \in G$ борелевская мера $\nu(t,T)$ является диффузионно-сингулярной;

(ii) для любых $f,g \in Bor^{\infty}$ выполнено соотношение

$$\int_G fTg\, d\mu = \int_G gTf\, d\mu; \tag{2.1}$$

(iii) если борелевские функции f и g μ-эквивалентны, то $Tf = Tg$;

Доказательство (i) очевидно.

(ii) В случае $f = \chi_A$, $g = \chi_B$, где A и B - произвольные элементы $\mathcal{B}$, равенство (2.1) есть следствие леммы 2.1. Отсюда легко следует, что равенство (2.1) справедливо для всех $f,g \in Bor^{\infty}$.

(iii) Сразу следует из (ii).

Из пункта (iii) этого предложения следует, что оператор T

можно считать определенным на всем L^{∞}_{μ} и действующим в L^{∞}_{ν}. Тогда T является оператором с диффузионно-сингулярным представлением в смысле Вейса, и поэтому $\hat{T} : L^{\infty}_{\mu} \longrightarrow L^{\infty}_{\mu}$ есть оператор диффузионно-сингулярного типа (предложение 1.1). Очевидно, равенство (2.1) выполнено и для T. Следовательно, $\hat{T}$ является положительным и самосопряженным оператором на L^{∞}_{μ}. Мы получили, что оператор $\hat{T}$ удовлетворяет всем требованиям предложения 1.3 и тем самым доказано заключительное

Предложение 2.3. *Порядково-непрерывный оператор $\hat{T} : L^{\infty}_{\mu} \longrightarrow L^{\infty}_{\mu}$ является дизъюнктным всем гомоморфизмам, операторам Магарам, интегральным операторам на L^{∞}_{μ}.*

Литература

1. **Шамаев И.И.** О разложении и представлении регулярных операторов // Сиб. мат. журн. - 1989. - Т.30, № 2. - С.192-202.

2. **Ionescu-Tulcea A., Ionescu-Tulcea C.** Topics in the theory of lifting. - Berlin: Springer, 1969.

3. **Arveson W.** Operator algebras and invariant subspaces // Ann. Math. - 1974. - V.100, № 2. - P.433-532.

4. **Sourour A.R.** Characterization and order properties of pseudointegral operators // Pacif. J. Math. - 1982. - V.99, № 1. - P.145-158.

5. **Weis L.** On the representation of order continuous operators by random measures // Trans. Amer. Math. Soc. - 1984. - V.285. - P. 535-563.

6. **Luxemburg W.A., Schep A.R.** A Radon - Nykodym type theorem for positive operators and a dual // Indag. Math. - 1978. - V.40, № 3. - P.357-375.

7. **Wright J.D.M.** The measure extension problem for vector lattices // Ann. Inst. Fourier, Grenoble. - 1971. - V.21. - P.65-85.

Поступила в редакцию
15 сентября 1990 г.