Посвящается памяти Глеба Павловича Акилова

УДК 517.98+515.1

ОБОБЩЕННЫЕ ДЕДЕКИНДОВЫ ПОПОЛНЕНИЯ, ПОРОЖДЕННЫЕ ИЗОТОННЫМИ ОПЕРАТОРАМИ

А.В.Колдунов

1. **Введение.** Одна из последних статей Глеба Павловича Акилова "О порядково-непрерывном расширении положительного оператора" ([1]; см. также [2]), написанная им вместе с А.Г.Кусраевым и Е.В.Колесниковым, послужила основой этой работы.

Лебегово расширение $\bar{X}$, предложенное Г.П.Акиловым и его соавторами, строится с помощью заданного положительного линейного оператора $\Phi : X \to E$ (где E - условно полная векторная решетка): X каноническим образом отображается в условно полную векторную решетку $\bar{X}(\iota : X \to \bar{X})$, а оператор Φ продолжается с ιX на $\bar{X}$; причем это продолжение становится порядково-непрерывным. Частным случаем этой ситуации (и одной из моделей) является положительный функционал $\Phi : C(B) \to R$; в этом случае $\overline{C(B)} = L_{\mu}(B)$, где мера μ определяется функционалом Φ.

Таким образом, в статье приводится способ построения условно полного расширения исходной векторной решетки X, обладающего определенными (хорошими) свойствами. Из подобных соображений исходил и автор, вводя обобщенные дедекиндовы пополнения (см.[3,4]). Поэтому совершенно естественным был вопрос А.Г.Кусраева о том, является ли лебегово расширение $\bar{X}$ (из [1]) частным случаем обобщенных дедекиндовых расширений, изучавшихся автором.

В последнем пункте работы весьма подробно устанавливается изоморфизм пространств $\bar{X}$ и некоторого пополнения $k(V,\Phi)$ дедекиндовского типа, построенного для векторной решетки V по отношению α_Φ, порожденному оператором $\Phi : V \longrightarrow E$. Следует обратить внимание на то, что конструкция дедекиндовского пополнения применяется не (как обычно) к X, а к некоторому специальному пространству V. Кстати, близкий прием оказался полезным при описании второго сопряженного $C^{**}(B)$ (см. п.2). В большей части работы результаты получены для случая операторов, близких к изотонным сублинейным операторам. В работе используется, в основном, терминология из [5].

Автор благодарит А.Г.Кусраева за интерес к тематике автора и постановку задачи.

2. Отношения в G, порожденные операторами. Пусть X – упорядоченное множество; через $G \equiv G(X)$ обозначим семейство всех направленных и порядково-ограниченных множеств $a \subset X$. Пусть $T : X \longrightarrow E$ - изотонный оператор в условно полное упорядоченное E. Этот оператор стандартным образом задает отношение $\gamma \equiv \gamma_T$ в G : $a\gamma b \Leftrightarrow \bigvee(Tx : x \in a) \geqslant \bigwedge(Ty : y \in b)$ (в дальнейшем будем использовать обозначения $\bigvee(Tx : x \in a) = uT(a)$, $\bigwedge(Ty : y \in b) = lT(b)$). Можно непосредственно проверить, что для отношения γ выполнены условия: 1) если $a \in G$ и $x \in a$, то $a\gamma\{x\}$, $\{x\}\gamma a$ (где $\{x\}$ обозначает множество, состоящее из одного элемента x); 2) если $x \geqslant y$, то $\{x\}\gamma\{y\}$ (обратное утверждение может быть неверным); 3) если $a\gamma b$ и для любого $y \in b$ выполнено $\{y\}\gamma c$, то $a\gamma c$; и двойственным образом: если $a\gamma\{y\}$ для любого $y \in b$ и $b\gamma c$, то $a\gamma c$.

Выполнение уже этих трех свойств позволяет каноническим образом построить обобщенное дедекиндово пополнение $k(X,G,\gamma)$, являющееся условно полным упорядоченным множеством, в которое изотонно отображается $X(\pi : X \longrightarrow k(X,G,\gamma)$, причем это отображение обладает двумя важными свойствами: i) $a\gamma_T b \Leftrightarrow a\gamma_\pi b$; ii) если $f \in k(X,G,\gamma)$, то $f = \bigvee(l\pi(a) : l\pi(a) \leqslant f) = \bigwedge(u\pi(b) : u\pi(b) \geqslant f)$. Кроме того, πX мажорирует и минорирует $k(X,G,\gamma)$ [3,4]. Обычно же предполагается, что X,E являются архимедовыми группами (векторными решетками). Поэтому естественно ввести алгебраические операции и в обобщенное дедекиндово пополнение $k(X,G,\delta)$, построенное по отношению δ (удовлетворяющему условиям 1)-3)). Для этого оказывается целесообразным потребовать выполнение условий для исходного отношения δ (см. [4]): 4) $a\delta b \Leftrightarrow \{0\}\delta(b-a)\bigvee\{0\}$ (где $b-a = (x_2-x_1 : x_1 \in a_1,\ x_2 \in b)$, $c\bigvee\{0\} = (z\bigvee 0:\ z \in c)$; 5) если $a\delta\{0\}$ и $b\delta\{0\}$, то $a+b\delta\{0\}$; 6) если $a\delta\{0\}$, то $a\bigwedge\{0\}\delta\{0\}$;; 7) если для любого числа слагаемых выполнено $\{x\}\delta a+\ldots+a$, то $\{0\}\delta a$.

Покажем, что для выполнения этих условий достаточно, чтобы T был изотонным, положительно однородным оператором , для которого существует $m \in N$: $T(x+y) \leqslant m(T(x)+T(y))$ при $x,y \geqslant 0$; в этом случае в качестве отношения $\alpha \equiv \alpha_T$ полагаем: $a\alpha b \Leftrightarrow lT((b-a)\bigvee\{0\}) = 0)$ (т.е. $\bigwedge[T((x_2-x_1)\bigvee 0) : x_1 \in a,\ x_2 \in b] = 0)$.

Заметим, что если T субаддитивен, то из условия $a\alpha_T b$ следует $a\gamma_T b$.

Предложение 1. *Пусть T - изотонный, положительно однородный оператор с условием: существует $m \in N$, для которого $T(x+y) \leqslant m(T(x)+T(y))$ при $x,y \geqslant 0$. В этом случае для отношения α_T выполнены условия* 1)-7).

Доказательство. Проверим выполнение условия 3). Пусть $a\gamma b$ и $\{y\}\alpha c$ ($y \in b$). Надо установить, что $lT[(c-a)\bigvee\{0\}] = 0$. Полагаем, что условно полное $E \subset C_\infty(G)$, где G - экстремально несвязный компакт. Пусть Q_1 открыто в Q и $\varepsilon > 0$;найдутся $\bar{x} \in a$, $\bar{y} \in b$, для которых $T((\bar{y}-\bar{x})\bigvee 0) \leqslant \varepsilon/m$ на $Q_2 \subset Q_1$; поскольку $\{\bar{y}\}\alpha c$, то найдется открытое $Q_3 \subset Q_2$ и $\bar{z} \in c$ со свойством: $T((\bar{z}-\bar{y})\bigvee 0 \leqslant \varepsilon/m$ на Q_3. Тогда $T((\bar{z}-\bar{x})\bigvee 0) \leqslant m[T((\bar{z}-\bar{y})\bigvee 0) + T((\bar{y}-\bar{z})\bigvee 0)] \leqslant 2\varepsilon$ на $Q_3 \subset Q_1$. Это означает, что $lT[(c-a)\bigvee\{0\}] = 0$.

Теперь проверим выполнение условия 7). Надо доказать, что

$\{0\}aa$. Предполагаем противное: это означает, что $lT(\bigvee\{0\}) \geqslant \varepsilon_0$ на некотором $Q_1 \subset Q$. Выбираем $s \in N$ настолько большим, что $\varepsilon_0/_2 \geqslant \varepsilon_0 m/_{2s} + T(x\vee 0)/_s$ на Q_1. По условию $\{x\}aa+a+\ldots a$, где взято s слагаемых; найдется $y_1,\ldots,y_s \in a$ и $Q_2 \subset Q_1$ такие, что $T[(y_1+\ldots+y_s-x)\bigvee 0] \leqslant \varepsilon_0/_2$ на Q_2. Но множество a направленное, поэтому можно выбрать $y \in a$ со свойством: $y \leqslant y_k$ $(k \leqslant s)$. Тогда на Q_2 выполнено $s\varepsilon_0 \leqslant T(sy\bigvee 0) \leqslant T((y_1+\ldots+y_s)\bigvee 0) \leqslant m[T(x\bigvee 0) + T((y_1+\ldots y_s-x)\bigvee 0)] \leqslant \varepsilon_0 m/_{2s} + mT(x\bigvee 0)$, что противоречит выбору $s \in N$.

Предложение 1 позволяет построить обобщенное дедекиндово пополнение $k(X,G,\alpha_T)$, являющееся условно полной векторной решеткой; в это пространство векторно-решеточно отображается $X(\pi:X \longrightarrow k(X,G,\alpha_T))$, причем для π выполнены свойства 1)-11), указанные ранее. Это позволяет назвать отношение α_T отношением, порожденным оператором T, а $k(X,G,\alpha_T)$ - пополнением, порожденным T.

Например, если $T:C(B) \longrightarrow R$ - линейный положительный оператор, то $T(x) = \int\limits_B x d\mu$ для некоторой регулярной меры μ на B; в этом случае $k(C(B),G,A_T) = L^\infty_\mu(B)$.

Отношение δ может задаваться в G не одним оператором T, а целым семейством S операторов T в X со значениями в E: пусть для любого оператора $T \in S$ отношение α_T допустимое (т.е. для него выполнены условия 1)-7)), тогда допустимым является и отношение $\delta \equiv \delta_s : a\delta b \iff a\alpha_T b$ для любого $T \in S$. Поэтому можно построить $k(X,G,\delta_s)$.

Пусть $T_1,T_2:C(B) \longrightarrow R$ - линейные и положительные функционалы, $S = \{T_1,T_2\}$, тогда $k(C(B),G,\delta_s) = k(C(B),G,\alpha_T)$, где $T = T_1\bigvee T_2$. Этот факт может создать впечатление, что если в качестве S взять семейство $[C(B)]'_+$ всех положительных линейных функционалов, то $k(C(B),G,\delta_s)$ совпадает со вторым сопряженным $C''(B)$ векторной решетки $C(B)$. Но это не так: пусть $a \in G$, причем $l\pi(a) = 0$ в пространстве $k(C(B),G,\delta_s)$; это означает, что

$lT(a) = 0$ для любого $T \in [C(B)]'_+$, т.е. для $T \in B$ выполнено $\inf[x(t):x \in a] = 0$. Другими словами, a содержит последовательность, равномерно сходящуюся к нулю. Из этого следует, что $k(C(B),G,\delta_s) = l^\infty(B)$.

Ситуация меняется, если применить эту конструкцию не к пространству $C(B)$, а к пространству $\mathrm{Bair}^*_2(B)$ ограниченных функций второго класса Бэра. Каждый элемент $f \in \mathrm{Bair}^*_2(B)$ измерим относительно любой регулярной меры на B. Поэтому каждый функционал $T \in (C(B))'_+$ канонически продолжается (с помощью интеграла) на $\mathrm{Bair}^*_2(B)$ до $\bar{T} \in [\mathrm{Bair}^*_2(B)]'_+$.

Теперь рассмотрим $\pi : \mathrm{Bair}^*_2(B) \longrightarrow k(\mathrm{Bair}^*_2(B),G,\delta s)$ (где $\bar{S} = (\bar{T} : T \in [C(B)]'_+)$ и $\sigma : \mathrm{Bair}^*_2(B) \longrightarrow C''(B)$, где σ естественным образом продолжает каноническое вложение $C(B)$ в $C''(B)$. Затем непосредственно проверяется, что если $a \in G(\mathrm{Bair}^*_2(B))$, то $l\pi(a) = 0 \Longleftrightarrow l\sigma(a) = 0$. Далее из свойств $C''(B)$ следует, что если $h > 0$ в $C''(B)$, то найдется $b \in G(\mathrm{Bair}^*_2(B))$, для которого $0 < l\sigma(b) \leqslant h$. Тогда из общих свойств обобщенных дедекиндовых пополнений следует существование векторно-решеточного изоморфизма $\varkappa : C''(B) \longrightarrow k(\mathrm{Bair}^*_2(B),G,\delta s)$.

3. Случай изотонных сублинейных операторов. В дальнейшем считаем, что $X = C(B)$ и $E = C(Q)$, где B,Q – компакты, а $\Phi_0 : X \longrightarrow E$ – изотонный сублинейный оператор.

Полагаем $K = B \times Q$. В векторную решетку $C(K)$ естественным образом вкладываются $X(\varkappa_1 : X \longrightarrow C(K))$, $E(\varkappa_2 : E \longrightarrow C(K))$. Пусть векторная подрешетка $V \subset C(K)$ состоит из всевозможных элементов вида $y = \sum [\mathrm{Pr}_{\varkappa_2 e_k} \varkappa_1 x_k : k \leqslant n]$, где элементы (e_k) попарно дизъюнктны в E; более того, всегда можно считать, что (e_k) – полная система в E. Аналогично для $y_1,y_2 \in V$ можно считать, что они представлены с помощью одного и того же набора $(e_k) \subset E$. Поскольку V разделяет точки K и содержит единицу 1_k, то V равномерно плотно в $C(K)$. Для $y \in V$ полагаем $\Phi(y) = \sum \mathrm{Pr}_{\varkappa_2 e_k} \Phi_0(x_k)$, где наборы $(x_k),(e_k)$ взяты из представления элемента $y \in V$. Нетрудно заметить, что $\Phi(y) \in E$ не зависит от представления элемента y. При этом оператор $\Phi : V \longrightarrow E$ является изотонным и сублинейным. Поэтому для Φ выполнены все условия предложения 1.

Строим обобщенное дедекиндово пополнение $k(V,G,\alpha\Phi)$, которое будем обозначать $k(V,\Phi)$; пусть $\pi : V \longrightarrow k(V,\Phi)$. Заметим, что $\pi\varkappa_1 : X \longrightarrow k(V,\Phi)$ задает каноническое векторно-решеточное отображение X в $k(V,\Phi)$. В нашем частном случае $k(V,\Phi)$ является условно полной векторной решеткой с сильной единицей $\mathbf{1} = \pi(\mathbf{1}_k)$; поэтому $k(V,\Phi) = C(W)$, где W - экстремально несвязный компакт; отображение $\pi : V \longrightarrow C(W)$ задает непрерывное $\tau : W \longrightarrow K$, для которого $y \circ \tau = \pi y$.

Поскольку V равномерно плотно в $C(K)$, то векторно-решеточное отображение $\pi : V \longrightarrow k(V,\Phi)$ может быть (единственным образом) изотонно продолжено на $C(K)$. Это показывает, что в принципе отношение α_Φ могло быть задано на всем $G(C(K))$, а не только на $G(V)$: Φ единственным образом изотонно продолжается на $C(K)$.

Предложение 2. *Если $u\pi(a) \geqslant l\pi(b)$, то $u\Phi(a) \geqslant l\Phi(b)$. В частности, если $\pi y_1 \geqslant \pi y_2$, то $\Phi(y_1) \geqslant \Phi(y_2)$. Поэтому из $\pi y_1 = \pi y_2$ следует $\Phi(y_1) = \Phi(y_2)$.*

Доказательство. Из $u\pi(a) \geqslant l\pi(b)$ следует $a\alpha b$, т.е. $l\Phi[(b-a)\vee\{0\}) = 0$. Получаем $l\Phi(b) \leqslant \bigwedge(\Phi(x) + \Phi[(y-x)\vee 0]: x\in a, y\in b) \leqslant u\Phi((b-a)\vee\{0\}) = u\Phi(a)$.

Следствие. *Пусть $l\pi(a) = l\pi(b)$. Докажем, что $l\Phi(a\vee b) = l\Phi(a\wedge b)$. Действительно, $l\pi(a\vee b) = l\pi(a)\vee l\pi(b) = l\pi(a) = l\pi(a\wedge b)$. Поэтому, если $y_1 \in a$, $y_2 \in b$, то $\pi(y_1\wedge y_2) \geqslant l\pi(a\wedge b) = l\pi(a\vee b)$. По предложению 2 получаем, что $\Phi(y_1\wedge y_2) \geqslant l\Phi(a\vee b)$, т.е. $l\Phi(a\wedge b) \geqslant l\Phi(a\vee b) \geqslant l\Phi(a\wedge b)$.*

Рассмотрим пространство $\bar{V} = (\pi y : y \in V)$, которое является векторной подрешеткой $k(V,\Phi)$. По предложению 2 на $\bar{V}$ задан изотонный сублинейный оператор $\tilde{\Phi} : \bar{V} \longrightarrow E$, где $\tilde{\Phi}(\pi y) = \Phi(y)$. Укажем на два свойства $\tilde{\Phi}$.

1) $\tilde{\Phi}$ порядково-непрерывен на $\bar{V}$: если $\bigwedge(\pi y : \pi y \in P) = \pi z$ в $\bar{k}(V,\Phi)$, то $\bigwedge[\tilde{\Phi}(\pi y) : \pi y \in P] = \tilde{\Phi}(\pi z)$. Всегда можно считать, что $a = (y \in \pi y \in P)$ принадлежит $G(V)$. Тогда $\{z\}\alpha a$ и $\tilde{\Phi}(\pi z) = \Phi(z) \geqslant l\Phi(a) = \bigwedge[\tilde{\Phi}(\pi y) : \pi y \in P]$. С другой стороны,

$\tilde{\Phi}(\pi z) \leqslant \bigwedge[\tilde{\Phi}(\pi y) : \pi y \in P]$.

Аналогичное утверждение для супремума.

2) Оператор $\tilde{\Phi}$ существенно изотонен на $\bar{V}$: если $\pi y_1 > \pi y_2$, то $\tilde{\Phi}(\pi y_1) > \tilde{\Phi}(\pi y_2)$; предположим, что $\tilde{\Phi}(\pi y_1) = \tilde{\Phi}(\pi y_2)$, т.е. $\Phi(y_1) = \Phi(y_2)$. Поэтому $\Phi(y_1) \leqslant \Phi(y_2) + \Phi(y_1 - y_2)$; тогда $\Phi(y_1 - y_2) \geqslant 0$, что дает $\{y_2 - y_1\}\alpha\{0\}$. Получаем, что $\pi(y_2 - y_1) \geqslant \pi(0)$ и $\pi(y_2) = \pi y_1 + \pi(y_2 - y_1) \geqslant \pi y_1$ - противоречие.

Заметим, что если существует порядково-непрерывное продолжение θ оператора $\tilde{\Phi}$ с $\bar{V}$ на все пространство $k(V,\Phi)$, то для $a \in G(V)$ выполнено $\theta(l\pi(a)) = l\Phi(a)$ и $\theta(u\pi(a)) = u\Phi(a)$. Поскольку $f \in k(V,\Phi)$ представим в виде 11), то $\theta(f) = V(f) = \bigvee[l\Phi(a) : l\pi(a) \leqslant f]$, $\theta(f) = N(f) = \bigwedge[u\Phi(b) : u(b) \geqslant f]$.
Заметим, что если $y \in V$, то $M(\pi) = \tilde{\Phi}(\pi y) = N(\pi y)$. Таким образом, необходимым условием для существования порядково-непрерывного Φ является равенство $N(f) = M(f)$. В частности, это показывает единственность такого продолжения θ.

Предложение 3. *Эквивалентны следующие утверждения:* 1) *существует порядково-непрерывное продолжение* θ *оператора* $\tilde{\Phi}$ *на* $k(V,\Phi)$; 2) *для* $f \in k(V,\Phi)$ *выполнено* $N(f) = M(f)$ *и если* $l(\pi(a) = \bigvee[l\pi(e) : e \in P_1]$, *то* $l\Phi(a) = \bigvee[l\Phi(e) : e \in P_1]$; *аналогично, если* $u\pi(b) = \bigwedge[\pi(d) : d \in P_2$, *то* $u\Phi(b) = \bigwedge u\Phi(d) : d \in P_2]$.

Доказательство. 1)$\Longrightarrow$2) очевидно. Теперь установим, что 2)$\Longrightarrow$1). В качестве продолжения берем $M(f)$. Пусть $f = \bigvee(g : g \in A)$; надо установить, что $M(f) \leqslant \bigvee(M(g) : g \in A)$. Пусть $a \in G$ и $l\pi(a) \leqslant f$; кроме того, $g = \bigvee[l\pi(b) : b \in A(g)]$. Тогда $l\pi(a) = \bigvee[l\pi(a \wedge b) : b \in A(g),\ g \in A]$. По условию, $l\Phi(a) = \bigvee[l\Phi(a \wedge b) : b \in A(g),\ g \in A] \leqslant \bigvee[M(g) : g \in A]$. Наконец, $M(f) = \bigvee[l\Phi(a) : l\pi(a) \leqslant f] = \bigvee[M(g) : g \in A]$.

Предложение 4. *Пусть* Φ_0 *- аддитивный положительный оператор и пусть* $a,b \in G(V)$. *Тогда* $l\pi(a) = l\pi(b) \Longleftrightarrow$ $\Longleftrightarrow l\Phi\pi(a \vee b) = l\Phi(a \wedge b)$.

Доказательство. По следствию к предложению 2 достаточно установить, что из правого равенства следует левое. Предполагаем, что $l\pi(a) \neq l\pi(b)$. Это означает, что существуют $y_0 \in b$, $\varepsilon_0 > 0$ и замкнутое $F \subset K$ со свойствами: $x - y_0 \geqslant \varepsilon_0$ на F для любого $x \in a$, причем $\operatorname{int}_w(\tau^{-1}(F) \neq \emptyset$ (обозначения см. в начале п.3). Можно считать, что $m \in N$таково, что $|x| \leqslant m\mathbb{1}_K$ для любого $x \in a$ и $|y_0| \leqslant m\mathbb{1}_K$. Докажем, что существует строго положительный элемент $e \in E$ со свойством: если $z \in V$, $2m\mathbb{1}_K \geqslant z \geqslant 0$ и $z \geqslant \varepsilon_0$ на F, то $\Phi(z) \geqslant e$. Если это не так, то рассмотрим $a \in G$, состоящий из всех таких $z \in V$, что $2m\mathbb{1}_K \geqslant z \geqslant 0$ и $z \geqslant \varepsilon_0$ на F. По предположению, $l\Phi(a) = 0$. Это означает, что $\{0\} \alpha a$ и $l\pi(a) = 0$. С другой стороны, $\pi z \geqslant \varepsilon_0$ на $\operatorname{int}\tau^{-1}(F) \neq \emptyset$. Противоречие доказывает, что требуемое $e \in E$ существует. Тогда $0 = l\Phi(a \vee b) - l\Phi(a \wedge b) \geqslant$ $\geqslant l\Phi(a \vee \{y_0\} - \{y_0\})$. Если $x \in a$, то $0 \leqslant x \vee y_0 - y_0 \leqslant 2m\mathbb{1}_k$; кроме того, $x \vee y_0 - y_0 \geqslant \varepsilon_0$ на F. Поэтому $l\Phi(a \vee \{y_0\} - \{y_0\}) \geqslant e > 0$. Противоречие.

Замечание. Требование аддитивности Φ_0 можно заменить на более слабое: Φ_0 – изотонный сублинейный оператор, для которого существует $m \in N: \Phi_0(x_1 + x_2) \geqslant \Phi_0(x_1) + {}^1/_m \Phi_1(x_2)$.

4. Пространство $[Ftr_0(V,\Phi)]$ из [1] совпадает с $\Delta(\Phi)$. В этом пункте будет установлена связь построений статьи с конструкцией лебегова расширения X, изложенной в §3 работы [1]. Для этого достаточно установить, что $[Ftr_0(V,\Phi)] \cong \Delta(\Phi) := (l\pi a - l\pi b : a, b \in G)$, так как $\bar{X}$ совпадает с дедекиндовым пополнением $[Ftr_0(V,\Phi)]$, а $k(X,\Phi)$ является пополнением по Дедекинду $\Delta(\Phi)$ (по 11).

Напомним конструкцию $[Ftr_0(V,\Phi)]$: в пространстве $Ftr_0(V)$ всех порядково ограниченных снизу фильтров φ в V введены операции сложения, умножения на положительное число, а также введен порядок: $\varphi_1 \geqslant \varphi_2 \Longleftrightarrow \varphi_1 \subset \varphi_2$. Оператор $\Phi : V \longrightarrow E$ линейный и положительный; с его помощью для $\varphi \in Ftr_0(V)$ определяется $\Phi(\varphi) = \bigwedge(\Phi(u) : u \in \varphi)$. Далее, в $Ftr_0(V)$ задается эквивалентность: $\varphi_1 \sim \varphi_2 \Longleftrightarrow \Phi(\varphi_1 \vee \varphi_2) = \Phi(\varphi_1 \wedge \varphi_2)$. Пусть $Ftr_0(V,\Phi)$ есть фактор-пространство $Ftr_0(V)/_\sim$; на него стандартным образом переносятся порядок и операции сложения и умножения на положительное число. Затем обычным образом вводится векторное пространство $[Ftr_0(V,\Phi)]$, порожденное $Ftr_0(V,\Phi)$: в множестве $Ftr_0(V,\Phi)^2$ рассматривается отношение: $(\bar\varphi_1,\bar\varphi_2)\omega(\bar\psi_1,\bar\psi_2) \Longleftrightarrow \bar\varphi_1+\bar\psi_2 = \bar\varphi_2 + \bar\psi_1$, а затем полагается $[Ftr_0(V,\Phi)] = Ftr_0(V,\Phi)^2/\omega$.

1) Пусть $\varphi \in Ftr_0(V)$; положим $\sigma(\varphi) = \bigwedge(\pi u : u \in \varphi) \in \Delta(\Phi)$. Пусть $[\varphi]$ – любое непустое подмножество φ со свойствами: $[\varphi] \in G(V)$ и если $x \in [\varphi]$, $x \geqslant y \in \varphi$, то $y \in [\varphi]$. Тогда $\sigma(\varphi) = l\pi([\varphi])$. По предложению 4 имеем: $\sigma(\varphi) = \sigma(\psi) \Longleftrightarrow l\Phi([\varphi]\bigvee[\psi]) = l\Phi([\varphi]\bigwedge[\psi])$. Остается заметить, что $l\Phi([\varphi]\bigvee[\psi]) = \Phi(\varphi \bigvee \psi)$, $l\Phi([\varphi] \bigwedge [\psi]) = \Phi(\varphi \bigwedge \psi)$. Это означает, что $\varphi \sim \psi \Longleftrightarrow \sigma(\varphi) = \sigma(\psi)$. Поэтому если $\varphi \sim \psi$, то $\varphi \bigvee \psi \sim \varphi$, $\varphi \bigwedge \psi \sim \varphi$.

2) $\sigma : Ftr_0(V) \longrightarrow (l\pi(a) : a \in G) \subset \Delta(\Phi)$ является сюръективным отображением: если $a \in G$, то строим $\varphi(a) \in Ftr_0(V)$ следующим образом: $\varphi(a) = (y \in V : (\exists u \in a)\ y \geqslant u)$. (Напомним, что $a \in G$ является направленным множеством.) Тогда $\sigma(\varphi(a)) = l\pi(a)$. Очевидно, $\sigma(\varphi+\psi) = \sigma(\varphi) + \sigma(\psi)$, $\sigma(\lambda\varphi) = \lambda\sigma(\varphi)(\lambda > 0)$. Если $\varphi \geqslant \psi$, то $\varphi \subset \psi$ и $\sigma(\varphi) \geqslant \sigma(\psi)$.

3) На пространство $Ftr_0(V,\Phi) = (\tilde\varphi : \varphi \in Ftr_0(V))$ из $Ftr_0(V)$ переносятся операции и порядок: $\tilde\varphi \geqslant \tilde\psi \Longleftrightarrow$ (существуют $\varphi' \in \tilde\varphi$, $\psi' \in \tilde\psi$, для которых $\psi' \supset \varphi'$). Таким образом можно задать $\tilde\sigma : Ftr_0(V,\Phi) \longrightarrow \Delta(\Phi)$, положив $\tilde\sigma(\tilde\varphi) = \sigma(\varphi)$. Тогда: $\tilde\sigma(\tilde\varphi + \tilde\psi) = \tilde\sigma(\tilde\varphi) + \tilde\sigma(\tilde\psi)$; $\tilde\sigma(\lambda\tilde\varphi) = \lambda\tilde\sigma(\tilde\varphi)$; если $\tilde\varphi \geqslant \tilde\psi$, то $\tilde\sigma(\tilde\varphi) \geqslant \tilde\sigma(\tilde\psi)$. Более того, если $\tilde\sigma(\tilde\varphi) \geqslant \tilde\sigma(\tilde\psi)$, то $\tilde\varphi \geqslant \tilde\psi$: действительно, $\varphi\bigwedge\psi \supset \varphi$ и $\sigma(\varphi\bigwedge\psi) = \sigma(\psi)$, т.е. $\varphi\bigwedge\psi \in \tilde\psi$.

4) Для $(\tilde\varphi_1,\tilde\varphi_2) \in Ftr_0(V,\Phi)^2$ положим $\varkappa(\tilde\varphi_1,\tilde\varphi_2) = \sigma(\varphi_1) - \sigma(\varphi_2) \in \Delta(\Phi)$. Тогда $\varkappa(\tilde\varphi_1,\tilde\varphi_2) = \varkappa(\tilde\psi_1,\tilde\psi_2)$ в том и только том случае, если $\tilde\varphi_1 + \tilde\psi_2 = \tilde\psi_1 + \tilde\varphi_2$. Таким образом, $\varkappa(\tilde\varphi_1,\tilde\varphi_2) = \varkappa(\tilde\psi_1,\tilde\psi_2) \Longleftrightarrow (\tilde\varphi_1,\tilde\varphi_2)\omega(\tilde\psi_1,\tilde\psi_2)$. Непосредственно проверяется, что $\varkappa$ сохраняет сложение и умножение на число. Если

$(\tilde{\varphi}_1,\tilde{\varphi}_2) \geqslant 0$, то $\tilde{\varphi}_1 \geqslant \tilde{\varphi}_2$ и $\sigma(\varphi_1) \geqslant \sigma(\varphi_2)$, т.е. $\text{æ}(\tilde{\varphi}_1,\tilde{\varphi}_2) \geqslant 0$ и æ сохраняет порядок.

5) Наконец, зададим $\bar{\text{æ}} : [Ftr_0(V,\Phi)] \longrightarrow \Delta(\Phi)$, положив $\bar{\text{æ}}(\tilde{\varphi}_1,\tilde{\varphi}_2) = \text{æ}(\tilde{\varphi}_1,\tilde{\varphi}_2) = \sigma(\varphi_1) - \sigma(\varphi_2)$. Это отображение сохраняет алгебраические операции. Кроме того, оно инъективно: если $\bar{\text{æ}}(\tilde{\varphi}_1,\tilde{\varphi}) = \bar{\text{æ}}(\tilde{\psi}_1\tilde{\psi}_2)$, то $\text{æ}(\tilde{\varphi}_1,\tilde{\varphi}_2) = \text{æ}(\tilde{\psi}_1,\tilde{\psi}_2)$, $(\tilde{\varphi}_1,\tilde{\varphi}_2)\omega(\tilde{\psi}_1,\tilde{\psi}_2)$. По сюръективности σ отображение $\bar{\text{æ}}$ сюръективно. По 4) $\bar{\text{æ}}$ сохраняет порядок. С другой стороны, если $\bar{\text{æ}}(\tilde{\varphi}_1,\tilde{\varphi}_2) \geqslant 0$, то $\tilde{\sigma}(\tilde{\varphi}_1) - \tilde{\sigma}(\tilde{\varphi}_2) \geqslant 0$ и по 3) $\tilde{\varphi}_1 \geqslant \tilde{\varphi}_2$, т.е. $(\tilde{\varphi}_1,\tilde{\varphi}_2) \geqslant 0$.

Результаты из 5) показывают, что $\bar{\text{æ}}$ является векторно-решеточным изоморфизмом между $[Ftr_0(V,\Phi)]$ и $\Delta(\Phi)$, что и требовалось установить.

Литература

1. **Акилов Г.П., Колесников Е.В., Кусраев А.Г.** О порядково-непрерывном расширении положительного оператора // Сиб. мат. журн.- 1988.- Т.29, № 5. - С.24-35.

2. **Akilov G.P., Kolesnikov E.V., Kusraev A.G.** Lebesque extention of a positive operator // Sov. Math. Dokl. - 1988.- V.37, №1. - P.88-91.

3. **Колдунов А.В.** П-дедекиндовые расширения векторных решеток // Оптимизация. - 1986. - Вып.37(54). - С.51-57.

4. **Колдунов А.В.** Обобщенные дединдовы пополнения. - Докл. АН СССР. - 1989. - Т.306, № 6. - 1297-1300.

5. **Кусраев А.Г., Кутателадзе С.С.** Субдифференциальное исчисление. - Новосибирск: Наука, 1987.

Поступила в редакцию
15.09.1990 г.