Посвящается памяти Глеба Павловича Акилова

УДК 510.223 + 517.98

ОГРАНИЧЕННОСТЬ ФЛУКТУАЦИИ СРЕДНИХ В СТАТИСТИЧЕСКОЙ ЭРГОДИЧЕСКОЙ ТЕОРЕМЕ

А.Г.Качуровский

В работе на основе возможностей, предоставляемых нестандартным анализом в интерпретации Э.Нельсона [1,2], исследуются некоторые качественные характеристики сходимости в статистической эргодической теореме Дж. фон Неймана. Рассматриваемый вопрос возник у А.Г.Кусраева при обсуждении аналогичных результатов для эргодической теоремы Биркгофа - Хинчина, полученных автором в [3].

§ 1. Определения и формулировки

1.1. Будем говорить, что числовая последовательность $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ допускает k ε-флуктуаций, если для некоторых (неотрицательных) $n_1 < n_2 \leqslant n_3 < \ldots \leqslant n_{2k-1} < n_{2k}$ будет $|x_{n_1} - x_{n_2}| \geqslant \varepsilon, \ldots$ $\ldots, |x_{n_{2k-1}} - x_{n_{2k}}| \geqslant \varepsilon$. Отметим, что последовательность сходится тогда и только тогда, когда для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $k \in \mathbb{N}$, для которого она не допускает k ε-флуктуаций.

Числовая последовательность называется последовательностью ограниченной флуктуации, если для любых $\varepsilon \gg 0$ и $k \sim \infty$ она не допускает k ε-флуктуаций. О связи этого определения с понятиями сходимости и (около)сходимости см. [1-3].

Пусть (Ω,λ) - пространство с (нормированной) мерой, $A(x)$ - некоторое теоретико-множественное свойство. Говорят, что $A(x)$ выполняется примерно всюду - пр.в. - на Ω, если для любого $\varepsilon \gg 0$ найдется такое множество $A_\varepsilon \subseteq \Omega$ меры не меньше $1-\varepsilon$, что $A(x)$ выполняется для любого $x \in A_\varepsilon$.

Оказывается полезным рассмотреть множество $\hat{L}^1(\Omega)$ функций f из $L^1(\Omega)$, удовлетворяющих любому из следующих двух эквивалентных условий:

(1) $\int\limits_\Omega |f(x)|d\lambda \ll \infty$ и для любого $E \subset \Omega$, $\lambda(E) \sim 0$ будет $\int\limits_\Omega |f(x)|\chi_E(x)d\lambda \sim 0$;

(2) $\int\limits_\Omega |f(x) - f^{(a)}(x)|d\lambda \sim 0$ для любого $a \sim \infty$. Здесь $f^{(a)}(x) = f(x)\cdot\chi_{\{|f(x)|\leqslant a\}}(x))$.

Очевидным достаточным условием принадлежности $f \in L^1(\Omega)$ к $\hat{L}^1(\Omega)$ является условие $|f(x)| \leqslant M \ll \infty$ для п.в. $x \in \Omega$.

Положим $\hat{L}^2(\Omega) = \{f \in L^2(\Omega) \mid f^2 \in \hat{L}^1(\Omega)\}$; отметим включения $\hat{L}^2(\Omega) \subseteq \hat{L}^1(\Omega)$, $\hat{L}^2(\Omega) \subseteq L^2(\Omega)$.

1.2. Пусть (Ω,λ) - пространство Лебега, T - его автоморфизм, $f \in L^1(\Omega)$. Через $s_n(x;f,T)$ (или просто $s_n(x)$) будем обозначать $\sum\limits_{m=0}^{n} f(T^m x)$ (здесь $x \in \Omega$, $n \geqslant 0$). Эргодическая теорема Биркгофа - Хинчина утверждает существование предела $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n+1}\, s_n(x) = f^*(x)$ для п.в. $x \in \Omega$, а также принадлежность функции f^* классу $L^1(\Omega)$. Статистическая эргодическая теорема Неймана в случае $f \in L^2(\Omega)$

утверждает принадлежность f^* классу $L^2(\Omega)$ и выполнение соотношения

$$\lim_{n\to\infty} \| \frac{1}{n+1} s_n(x) - f^*(x) \|_{L^2(\Omega)} = 0.$$

Теорема. *В случае $f \in \hat{L}^2(\Omega)$ последовательность*

$$\left\{ \| \frac{1}{n+1} s_n(x) - f^*(x) \|_{L^2(\Omega)} \right\}_{n=0}^{\infty}$$

является последовательностью ограниченной флуктуации.

Основная тяжесть доказательства приходится на следующую лемму.

Лемма [3]. *В случае $f \in \hat{L}^1(\Omega)$ последовательность $\left\{ \frac{1}{n+1} s_n(x) \right\}_{n=0}^{\infty}$ является последовательностью ограниченной флуктуации для пр.в. $x \in \Omega$.*

Замечание 1. Можно показать, что лебеговость пространства с мерой в лемме (и соответственно в теореме) не по существу; соответствующая работа готовится к печати.

Замечание 2. В [3] лемма была доказана при несколько ином определении ограниченности флуктуации (идущем от [1-2]). Из ее доказательства видно, что в данном случае различие несущественно.

§ 2. Доказательство основной теоремы

2.1. По абсолютной непрерывности интеграла Лебега, для любой функции $g \in L^1(\Omega)$ при любом $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta(\varepsilon) > 0$, что для любого измеримого множества $B \subseteq \Omega$, $\lambda(B) \leqslant \delta(\varepsilon)$, будет $|\int_B g d\lambda| \leqslant \varepsilon$. Пусть $\delta_g(\varepsilon)$ – максимальное $\delta(\varepsilon)$ $(\leqslant 1)$, удовлетворяющее этому условию для данных g и ε. Отметим, что в случае $g \in \hat{L}^1(\Omega)$ при $\varepsilon \gg 0$ будет $\delta_g(\varepsilon) \gg 0$.

Из справедливости для любых действительных чисел $a_0,\dots,a_n$

неравенства $\left(\frac{1}{n+1}\sum_{m=0}^{n} a_m\right)^2 \leqslant \frac{1}{n+1}\sum_{m=0}^{n} a_m^2$ получаем справедливость соотношения

$$\int_A \left[\frac{1}{n+1}\sum_{m=0}^{n} f(T^m x)\right]^2 d\lambda \leqslant \int_A \left[\frac{1}{n+1}\sum_{m=0}^{n} f^2(T^m x)\right] d\lambda =$$

$$= \frac{1}{n+1}\sum_{n=0}^{n} \int_A f^2(T^m x) d\lambda$$

для любого измеримого $A \subset \Omega$.

Поэтому для $g_n(x) = \frac{1}{n+1} s_n(x)$ при всех n будет $\delta_{g_n^2}(\varepsilon) \geqslant \delta_{f^2}(\varepsilon)$ для любого $\varepsilon > 0$, т.е. семейство функций $\{g_n^2\}_{n=0}^{\infty}$ равномерно (по n) суммируемо. Свойством равномерной суммируемости обладает и семейство $\left\{\left[g_{n_1}(x) - g_{n_2}(x)\right]^2\right\}_{n_1,n_2=0}^{\infty}$ (равномерно по всем парам (n_1,n_2)), поскольку для любого измеримого $A \subseteq \Omega$ будет

$$\int_A \left[g_{n_1}(x) - g_{n_2}(x)\right]^2 \leqslant 2\int_A g_{n_1}^2(x) d\lambda + 2\int_A g_{n_2}^2(x) d\lambda,$$

т.е. $\delta_{(g_{n_1}-g_{n_2})^2}(4\varepsilon) \geqslant \delta_{f^2}(\varepsilon)$ для любого $\varepsilon > 0$.

2.2. Заметим, что если $\|g_{n_1}(x) - g_{n_2}(x)\|_{L^2}^2 \geqslant 5\varepsilon$, $0 < \varepsilon < 1$, то для $C = \{x\in\Omega \mid |g_{n_1}(x) - g_{n_2}(x)| \geqslant \varepsilon\}$ будет $\lambda(C) \geqslant \delta_{f^2}(\varepsilon)$. Действительно, в этом случае

$$\int_C |g_{n_1}(x) - g_{n_2}(x)|^2 d\lambda + \int_{\Omega\setminus C} |g_{n_1}(x) - g_{n_2}(x)|^2 d\lambda \geqslant 5\varepsilon.$$

Второй интеграл не превосходит ε^2 ($\leqslant\varepsilon$), поэтому первый не менее 4ε. Так как по доказанному в п.2.1

$$\delta_{(g_{n_1}-g_{n_2})^2}(4\varepsilon) \geqslant \delta_{f^2}(\varepsilon),$$

то $\lambda(c) \geqslant \delta_{f^2}(\varepsilon)$, что и требуется.

2.3. Доказывать теорему будем от противного: пусть рассматриваемая последовательность допускает $k \sim \infty$ $\sqrt{5\varepsilon}$-флуктуаций для некоторого $\varepsilon \gg 0$ (считаем $\varepsilon < 1$). По определению, найдутся такие $0 \leqslant n_1 < n_2 \leqslant n_3 < \ldots \leqslant n_{2k-1} < n_{2k}$, что

$$\Big| |g_{n_{2l-1}} - f^*|_{L^2} - |g_{n_{2l}} - f^*|_{L^2} \Big| \geqslant \sqrt{5\varepsilon},$$

$l = 1,\ldots,k$. По неравенству треугольника

$$\Big| (g_{n_{2l-1}} - f^*) - (g_{n_{2l}} - f^*) \Big|_{L^2} \geqslant$$

$$\geqslant \Big| |g_{n_{2l-1}} - f^*|_{L^2} - |g_{n_{2l}} - f^*|_{L^2} \Big|,$$

так что $|g_{n_{2l}} - g_{n_{2l}}|_{L^2} \geqslant \sqrt{5\varepsilon}$ (для тех же l). Положим $C_l = \Big\{x \in \Omega \Big| |g_{n_{2l-1}}(x) - g_{n_{2l}}(x)| \geqslant \varepsilon\Big\}$; по доказанному в п.2 будет $\lambda(C_l) \geqslant \delta_{f^2}(\varepsilon)$, $l = 1,\ldots,k$. Из условия $f \in \hat{L}^2(\Omega)$ следует неравенство $\delta_{f^2}(\varepsilon) \gg 0$ (так как $\varepsilon \gg 0$).

2.4. Положим $A_m = \Big\{x \in \Omega \Big| \sum_{l=1}^{k} \chi_{C_l}(x) = m\Big\}$, $\delta_m = \lambda(A_m)$, $m \in \mathbb{N}$ (понятно, что при $m > k$ будет $A_m = \varnothing$, $\delta_m = 0$). Так как $\sum_{m=0}^{\infty} m\delta_m = \sum_{m=0}^{k} m\delta_m = \sum_{l=1}^{k} \lambda(C_l) \geqslant k\delta_{f^2}(\varepsilon)$, то справедливы следующие соотношения:

$$\sum_{m=0}^{\infty} \frac{m\delta_m}{k} = \sum_{m=0}^{k} \frac{m\delta_m}{k} \geqslant \delta_{f^2}(\varepsilon);$$

$$\sum_{m=0}^{\infty}\delta_m = \sum_{m=0}^{k}\delta_m = 1.$$

Заметим, что для любого $n \leqslant \infty$ будет $\sum_{m=0}^{n}\frac{m\delta_m}{k} \simeq 0$. Поэтому по лемме Робинсона (см., например, [2]) найдется такое $N \simeq \infty$, что $\sum_{m=0}^{n}\frac{m\delta_m}{k} \simeq \infty$, т.е. $\sum_{m=N+1}^{k}\frac{m\delta_m}{k} \gtrsim \delta_f 2(\varepsilon)$. Отсюда $\sum_{m=N+1}^{k}\delta_m \gtrsim \delta_f 2(\varepsilon)$.

Итак, для любой точки x множества $\bigcup_{m=N+1}^{k} A_m$ $(\subseteq \Omega)$ меры $\sum_{m=N+1}^{k}\delta_m > \frac{1}{2}\delta_f 2(\varepsilon) \gg 0$ последовательность $\{g_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ допускает $N \simeq \infty$ ε-флуктуаций, $\varepsilon \gg 0$. Это утверждение противоречит лемме (§1). Теорема доказана.

§ 3. Следствия основной теоремы

Основная теорема позволяет утверждать, что (в терминах [3]) последовательность

$$\left\{\left\| \frac{1}{n+1}\, s_n(x) - f^*(x) \right\|_{L^2(\Omega)}\right\}_{n=0}^{\infty}$$

имеет достижимый предел; сходимость этой последовательности либо белая, либо цветная (т.е. не черная).

Те же примеры, что и в [3], показывают, что:

1) цветная (т.е. не белая) сходимость рассматриваемой последовательности действительно может иметь место;

2) в случае $f \in L^2(\Omega)\backslash\hat{L}^2(\Omega)$ сходимость может быть и черная.

Таким образом, рассматриваемые в [3] характеристики сходимости в теореме Неймана такие же, как в теореме Биркгофа - Хинчина, и хуже, чем в усиленном законе больших чисел.

Элементарный аналог теоремы Неймана сразу следует из основной теоремы настоящей работы.

Л и т е р а т у р а

1. **Nelson E.** Internal set theory: a new approach to nonstandard analysis // Bull. Amer. Math. Soc. - 1977. - V.83, № 6. - P.1165-1198.

2. **Nelson E.** Radically elementary probability theory. - Princeton University Press, 1987.

3. **Качуровский А.Г.** Два предела в эргодической теореме Биркгофа - Хинчина. - Новосибирск, 1990. - 42 с. - (Препринт/ АН СССР. Сиб. отд-ние. Ин-т математики; № 9).

Поступила в редакцию
20 сентября 1990 г.