Светлой памяти моего учителя
Глеба Павловича Акилова

УДК 517.986.7

ЛИНЕЙНЫЕ ЭВОЛЮЦИОННЫЕ УРАВНЕНИЯ И ПОЛУГРУППЫ-РАСПРЕДЕЛЕНИЯ

В.В.Иванов

Фундаментальные решения линейных эволюционных уравнений в банаховом пространстве выделяются среди всех операторнозначных распределений рядом присущих им внутренних свойств, которые были описаны Лионсом в его известной работе [1], открывшей новую главу в теории полугрупп линейных операторов. Характерные свойства фундаментальных решений были собраны им в понятии полугруппы-распределения, послужившим в дальнейшем предметом интересных исследований. В частности, предпринимались попытки распространить результаты теории полугрупп-распределений на более широкий класс пространств. Однако, несмотря на существенные продвижения в этом направлении, в полной мере достичь ясности здесь все же не удавалось.

Анализируя сложившееся положение, автор этих строк пришел к несколько неожиданному выводу: оказалось, что понятие полугруппы-распределения, вообще говоря, не адекватно понятию фундаментального решения. Как выяснилось, в ненормируемых пространствах возможна такая ситуация, когда задача Коши для линейного эволюционного уравнения поставлена корректно (в классе обобщенных функций), но ее фундаментальное решение не является полугруппой-распределением (в смысле Лионса). Иными словами, стало понятно, что требования, предъявленные Лионсом к полугруппе-распределению, отражают не только общие свойства фундаментальных решений, но и особенности геометрии тех пространств, чья топология может быть задана одной нормой.

Так возникла задача, решение которой помещается в этой заметке. Итогом нашего небольшого исследования будет новое определение полугруппы-распределения (и ее производящего оператора), в точности согласующееся с понятием фундаментального решения линейного эволюционного уравнения как в нормированном, так и в произвольном локально-выпуклом пространстве.

1. Обобщенные решения

Символом D_* обозначим класс всех бесконечно гладких финитных (справа) функций, заданных на $\mathbb{R}_* = [0,\infty)$ и принимающих комплексные значения. Для каждого $a > 0$ определим $D_*(a)$ как совокупность всех функций из D_*, чьи носители лежат в $[0,a]$. Мы снабжаем $D_*(a)$ обычной структурой пространства Фреше, в котором сходимость $\varphi_a \longrightarrow 0$ означает равномерную сходимость $\varphi_a^{(k)} \longrightarrow 0$ при каждом целом $k \geqslant 0$. Топология на всем D_* нам не потребуется.

Всюду в дальнейшем X - комплексное топологическое векторное пространство, которое предполагается отделимым и локально выпуклым.

Линейное отображение $u:D_* \longrightarrow X$ назовем *X-значным распределением* на $\mathbb{R}_*$, если оно непрерывно в том смысле, что для каждого $a > 0$ непрерывно его сужение на $D_*(a)$.

Каждое распределение u на $\mathbb{R}_*$ имеет *производную* u', которая определяется соотношением

$$u'(\varphi) = -u(\varphi'),\ \varphi \in D_*,$$

и является также распределением на $\mathbb{R}_*$.

Пусть A - линейный оператор, действующий в X, т.е. его область определения $\mathrm{dom}A$ и область значений $\mathrm{im}A$ лежат в X. *Обобщенным решением* уравнения $u' = Au$ с началом в точке $x \in X$ условимся называть X-значное распределение u на $\mathbb{R}_*$, обладающее тем свойством, что для каждой функции $\varphi \in D_*$ справедливы включение $u(\varphi) \in \mathrm{dom}A$ и равенство

$$u'(\varphi) = Au(\varphi) + \varphi(0)x.$$

Чтобы понять мотивы этого определения, достаточно посмотреть на классическое решение интересующего нас уравнения как на распределение.

Пусть теперь линейный оператор A в X таков, что для всякого $x \in X$ существует единственное обобщенное решение $u = u_x$ уравнения $u' = Au$ с началом в точке x. Полагая $u_A(\varphi, x) = u_x(\varphi)$, получим, очевидно, билинейный оператор

$$u_A : D_* \times X \longrightarrow X.$$

Предположим, что этот оператор непрерывен, т.е. для каждого $a > 0$ непрерывно его сужение на $D_*(a) \times X$. В таком случае мы считаем, что задача Коши для уравнения $u' = Au$ *обобщенно корректна*. Впрочем, "обобщенно корректным" нам удобно будет называть сам оператор A.

2. Фундаментальные функции

Пусть $L(X)$ – пространство определенных на X непрерывных линейных операторов, I – тождественный оператор в X.

Линейное отображение $T : D_* \longrightarrow L(X)$ назовем *$L(X)$-значным распределением* на $\mathbb{R}_*$, если соответствующий ему билинейный оператор (отображающий (φ, x) в $T(\varphi)x$) непрерывен на каждом пространстве $D_*(a) \times X$, где $a > 0$.

Фундаментальной функцией действующего в X линейного оператора A назовем такое $L(X)$-значное распределение T на $\mathbb{R}_*$, что для каждой функции $\varphi \in D_*$ выполнены условия:

(1) $\mathrm{im}\, T(\varphi) \subset \mathrm{dom}\, A$;
(2) $T'(\varphi) = AT(\varphi) + \varphi(0)I$;
(3) $T(\varphi)A = AT(\varphi)$ на $\mathrm{dom}A$.

Наша ближайшая цель - доказать, что *линейный оператор обобщенно корректен в том и только в том случае, когда он обладает фундаментальной функцией.*

Если A - обобщенно корректный оператор в X, то соответствующий билинейный оператор u_A можно, очевидно, рассматривать как отображение D_* в $L(X)$, полагая

$$u_A(\varphi)x = u_A(\varphi,x), \quad \varphi \in D_*, \quad x \in X,$$

и с этой точки зрения u_A является $L(X)$-значным распределением.

Теорема. *Если оператор A обобщенно корректен, то u_A - его фундаментальная функция.*

Доказательство. Прежде всего, по своему происхождению, распределение u_A удовлетворяет первым двум условиям из определения фундаментальной функции. Пусть теперь $x \in \mathrm{dom}A$. Нам остается лишь установить, что

$$Au_A(\varphi)x = u_A(\varphi)Ax$$

для всех $\varphi \in D_*$. Смысл этого утверждения, очевидно, заключается в том, что отображение $v : D_* \longrightarrow X$, определяемое равенством

$$v(\varphi) = Au_A(\varphi)x, \quad \varphi \in D_*,$$

является решением отвечающего оператору A эволюционного уравнения с началом в точке Ax. Это и в самом деле так. Действительно, поскольку

$$v(\varphi) = - u_A(\varphi')x - \varphi(0)x,$$

то v - распределение, $v(\varphi) \in \mathrm{dom}A$ и, наконец,

$$A\ v(\varphi) = - Au_A(\varphi')x - \varphi(0)Ax = v'(\varphi) - \varphi(0)Ax.$$

Теорема доказана.

Теорема. *Линейный оператор, имеющий фундаментальную функцию, обобщенно корректен.*

Доказательство. Пусть A - линейный оператор и T - его фундаментальная функция. Единственное, в чем нам нужно убедиться, - это в том, что обобщенное решение уравнения $u' = Au$ полностью определяется своим "начальным значением".

Итак, пусть u - обобщенное решение уравнения $u' = Au$ с началом в нуле, т.е.

$$u'(\varphi) = Au(\varphi), \quad \varphi \in D_*.$$

Фиксируем $a > 0$ и покажем, что $u(\varphi) = 0$ для всех $\varphi \in D_*(a)$. Легче всего это сделать с помощью преобразования Лапласа.

Подберем функцию $\eta \in D_*$, которая равна 1 на отрезке $[0,a]$. Полагая

$$r(\lambda) = u(\eta e^{-\lambda(\cdot)}) \quad \text{и} \quad h(\lambda) = u(\eta' e^{-\lambda(\cdot)}),$$

из уравнения, которому удовлетворяет u, получаем

$$(\lambda - A)r(\lambda) = h(\lambda).$$

Проведем подобные построения и для фундаментальной функции T, а именно, определим операторы

$$R(\lambda) = T(\eta e^{-\lambda(\cdot)}) \quad \text{и} \quad H(\lambda) = T(\eta' e^{-\lambda(\cdot)}).$$

Как показывает несложный подсчет, на $\operatorname{dom} A$ выполнено соотношение

$$R(\lambda)(\lambda - A) = I + H(\lambda).$$

Таким образом,

$$R(\lambda)h(\lambda) = R(\lambda)(\lambda - A)r(\lambda) = r(\lambda) + H(\lambda)r(\lambda),$$

откуда

$$r(\lambda) = R(\lambda)h(\lambda) - H(\lambda)r(\lambda).$$

В этом равенстве $h(\lambda)$ и $H(\lambda)$ представляют собой преобразования Лапласа распределений $\eta' u$ и $\eta' T$, носители которых расположены справа от a, поскольку $\eta' = 0$ на отрезке $[0,a]$. Это обстоятельство позволяет для каждой непрерывной полунормы p найти такие $C \geqslant 0$ и номер $n \geqslant 0$, что

$$p(r(\lambda)) \leqslant C(1 + |\lambda|)^h e^{-a\operatorname{Re}\lambda}, \quad \operatorname{Re}\lambda \geqslant 0.$$

Остается воспользоваться теоремой Пэли - Винера, в силу которой носитель распределения ηu лежит справа от a, так что

$$u(\varphi) = u(\eta\varphi) = (\eta u)(\varphi) = 0$$

для всех $\varphi \in D_*(a)$.

Поскольку это верно для произвольного $a > 0$, то $u = 0$ всюду на D_*. Теорема доказана.

Итак, обобщенная корректность линейного оператора и существование его фундаментальной функции - эквивалентные условия. К этому полезно добавить, что соответствие между обобщенно корректными операторами и их фундаментальными функциями, как легко теперь понять, взаимно однозначно.

Действительно, пусть A - линейный оператор и T - его фундаментальная функция. Оператор A не может иметь другой фундаментальной функции, поскольку он обобщенно корректен и $T = u_A$. С другой стороны, областью определения оператора A является, очевидно, линейная оболочка подпространств $\operatorname{Im} T(\varphi)$, $\varphi \in D_*$. Значения же, которые принимает оператор A на элементах вида $T(\varphi)x$, однозначно предписаны ему соотношением

$$AT(\varphi)x = -T(\varphi')x - \varphi(0)x.$$

Таким образом, T не может быть фундаментальной функцией какого-либо оператора, отличного от A.

3. Полугруппы-распределения

Теперь мы можем выяснить, каким условиям должно удовлетворять операторнозначное распределение, чтобы быть фундаментальной функцией какого-нибудь линейного оператора.

Важную роль здесь будет играть операция свертки заданных на $\mathbb{R}_*$ функций, определяемая соотношением

$$(\varphi * \psi)(t) = \int_0^t \varphi(t - s)\psi(s)ds, \qquad t \geqslant 0.$$

Ясно, что $\varphi * \psi \in D_*$, если $\varphi, \psi \in D_*$.

Полугруппой-распределением в X назовем $L(X)$-значное распределение T на $\mathbb{R}_*$, удовлетворяющее следующим двум условиям:

(1) $T(\varphi * \psi) = T(\varphi)T(\psi)$ для всех $\varphi, \psi \in D_*$;

(2) $\bigcap \{\ker T(\varphi) \mid \varphi \in D_*\} = \{0\}$.

Вот ответ на интересующий нас вопрос: *операторнозначное распределение представляет собой фундаментальную функцию некоторого линейного оператора тогда и только тогда, когда оно является полугруппой-распределением*. Доказательству этого утверждения и посвящена оставшаяся часть работы.

Производящим оператором полугруппы-распределения T назовем оператор A, определяемый равенством $Ax = y$ для всех таких пар элементов x и y, для которых

$$T(\varphi)y = -T(\varphi')x - \varphi(0)x, \qquad \varphi \in D_*.$$

Корректность этого определения, как и линейность построенного оператора, очевидны. Легко также видеть, что производящий оператор всегда замкнут.

Теорема. *Полугруппа-распределение является фундаментальной функцией своего производящего оператора.*

Доказательство. По определению, на $\mathrm{dom}A$ выполняется соотношение

$$T(\psi)A = -T(\psi') - \psi(0)I, \qquad \psi \in D_*.$$

Поэтому теорема будет доказана, если для каждой функции $\psi \in D_*$ мы убедимся в справедливости включения $\mathrm{im}T(\psi) \subset \mathrm{dom}A$ и равенства

$$AT(\psi) = -T(\psi') - \psi(0)I.$$

Итак, пусть $\psi \in D_*$ и $z \in X$. Полагая

$$x = T(\psi)z \quad \text{и} \quad y = -T(\psi')z - \psi(0)z$$

и замечая, что для произвольной функции $\varphi \in D_*$ имеют место соотношения

$$\varphi(0)\psi + \varphi' * \psi = (\varphi * \psi)' = \psi(0)\varphi + \varphi * \psi',$$

приходим к следующей цепочке равенств:

$$\begin{aligned} T(\varphi)y &= -T(\varphi)T(\psi')z - \psi(0)T(\varphi)z = \\ &= -T(\varphi * \psi')z - T(\psi(0)\varphi)z = \\ &= -T(\varphi * \psi' + \psi(0)\varphi)z = \\ &= -T((\varphi * \psi)')z = \\ &= -T(\varphi' * \psi + \varphi(0)\psi)z = \\ &= -T(\varphi')T(\psi)z - \varphi(0)T(\psi)z = \\ &= -T(\varphi')x - \varphi(0)x. \end{aligned}$$

Таким образом, $x \in \mathrm{dom}A$ и $Ax = y$. Теорема доказана.

Теорема. *Если T – фундаментальная функция оператора A, то T – полугруппа-распределение и A – ее производящий оператор.*

Доказательство. Пусть $\psi \in D_*$ и $z \in X$. Нам нужно доказать, что

$$T(\varphi * \psi)z = T(\varphi)T(\psi)z, \quad \varphi \in D_*.$$

Смысл этого равенства в том, что распределение u, определяемое соотношением

$$u(\varphi) = T(\varphi * \psi)z, \quad \varphi \in D_*,$$

является обобщенным решением уравнения $u' = Au$ с началом в точке $T(\psi)z$. Убедимся в этом:

$$
\begin{aligned}
u'(\varphi) &= -u(\varphi') = -T(\varphi' * \psi)z = \\
&= -T((\varphi * \psi)' - \varphi(0)\psi)z = \\
&= -T((\varphi * \psi)')z + \varphi(0)T(\psi)z = \\
&= AT(\varphi * \psi)z + (\varphi * \psi)(0)z + \varphi(0)T(\psi)z = \\
&= Au(\varphi) + \varphi(0)T(\psi)z,
\end{aligned}
$$

что и требовалось.

Далее, если элемент x таков, что $T(\varphi)x = 0$ для всех $\varphi \in D_*$, то, выбрав функцию φ, для которой $\varphi(0) = 1$, получим

$$x = \varphi(0)x = -T(\varphi')x - AT(\varphi)x = 0.$$

Таким образом, T – действительно полугруппа-распределение. Как мы уже знаем, в таком случае T – фундаментальная функция своего производящего оператора. Но T – фундаментальная функция и оператора A. Поэтому A и есть производящий оператор T. Теорема доказана.

Подводя итоги, сформулируем еще раз основные результаты, полученные в настоящей работе.

Теорема. *Следующие свойства линейного оператора эквивалентны:*

(1) *оператор A обобщенно корректен;*

(2) *оператор A обладает фундаментальной функцией;*

(3) *оператор A порождает полугруппу-распределение.*

Если эти условия выполнены, то u_A представляет собой единственную фундаментальную функцию оператора A и единственную полугруппу-распределение, для которой A – производящий оператор.

Литература

1. Lions J.L. Les semi-groupes distributions. – Portugal Math. – 1960. – Vol.19. – P.141-164.

Поступила в редакцию
12 ноября 1990 г.