Светлой памяти моего учителя Глеба Павловича Акилова

УДК 517.98

О ВОЗМУЩЕНИЯХ СПЕКТРА В ПРОБЛЕМЕ ПОМПЕЙЮ

М.Л.Аграновский

1. Введение

В интегральной геометрии хорошо известна проблема Помпейю о единственности определения функции по ее интегралам на инвариантном относительно группового действия семействе множеств (см., например, обзор [1]).

В двумерном случае задача состоит в следующем: требуется описать все такие жордановы области $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, что для любой локально-интегрируемой функции f из равенств нулю интегралов

$$\int\limits_{m\Omega} f(x,y)dxdy = 0 \tag{1}$$

(m пробегает группу $M(2)$ движений плоскости) следует, что $f = 0$ почти всюду. В этом случае говорят, что область Ω обладает *свойством Помпейю*.

Примером областей, не обладающих таким свойством, служат круги. Так, легко проверить, что если

$$\Omega = \{(x,y) : x^2 + y^2 \leqslant r^2\},$$

то функция $f(x,y) = \exp\,[ir(\lambda_1 x + \lambda_2 y)]$ ($\sqrt{\lambda_1^2+\lambda_2^2}$ - нуль функции Бесселя J_1) удовлетворяет уравнению (1).

Приведем точную формулировку проблемы: *доказать (или опровергнуть), что круги, и только они, не обладают свойством Помпейю.*

Семейство сдвигов $\{m\Omega : m \in M(2)\}$, когда Ω - круг, зависит от двух параметров, а не от трех, как в общем случае, поэтому предположение о том, что трехпараметрические семейства областей обеспечивают единственность решения уравнения (1), выглядит естественным.

2. Редукция задачи

Далее будем предполагать, что Ω - жорданова область с гладкой границей.

Сформулированная выше проблема допускает интересную и плодотворную редукцию к обратной спектральной задаче для оператора Лапласа [2]. Суть этой редукции состоит в следующем.

Уравнение (1) представляет собой систему уравнений свертки

$$(T_k\chi_\Omega) * f = 0, \quad k \in SO(2), \tag{2}$$

где $T_k\chi_\Omega = \chi_\Omega \circ k$ - поворот характеристической функции χ_Ω области Ω на элемент k группы $SO(2)$ вращений плоскости.

В силу теоремы Шварца [3] об идеалах в пространстве распределений с компактными носителями, существование нетривиального решения у системы уравнений сверток (1) эквивалентно наличию общего нуля у семейства преобразований Фурье $(T_k\chi_\Omega)\hat{}$.

Согласно теореме Пэли - Винера, функция $\hat{\chi}_\Omega$, будучи преобразованием Фурье финитной функции, продолжается в $\mathbb{C}^2$ до целой функции экспоненциального типа, и в силу сказанного это продолжение обращается в нуль на некоторой алгебраической поверхности вида $\lambda_1^2 + \lambda_2^2 = r^2$ в $\mathbb{C}^2$. Поэтому справедливо представление

$$\hat{\chi}_\Omega(\lambda_1,\lambda_2) = (\lambda_1^2 + \lambda_2^2 - r^2)\upsilon(\lambda_1,\lambda_2),$$

где υ - также целая функция экспоненциального типа, т.е. $\upsilon = \hat{u}$ для некоторой финитной (причем гладкой) функции u. Применяя обратное преобразование Фурье, получаем

$$\Delta u + r^2 u = \chi_\Omega.$$

Вне области Ω справедливо равенство $\Delta u + r^2 u = 0$, поэтому функция u вещественно-аналитична в дополнении к Ω и, в силу финитности, обращается в нуль вне Ω. Следовательно,

$$u|_{\partial\Omega} = 0, \quad \nabla u|_{\partial\Omega} = 0.$$

Условие на ∇u вследствие гладкости функции u и кривой $\partial\Omega$ эквивалентно обращению в нуль нормальной производной:

$$\left.\frac{\partial u}{\partial \nu}\right|_{\partial\Omega} = 0.$$

Заменив функцию u на $\frac{1}{r^2}(1-u)$, приходим к переопределенной спектральной задаче для оператора Лапласа с краевыми условиями Дирихле - Неймана

$$\begin{gathered} \Delta u + \lambda u = 0 \quad (\lambda = r^2), \\ u|_{\partial\Omega} = 1, \\ \left.\frac{\partial u}{\partial \nu}\right|_{\partial\Omega} = 0. \end{gathered} \tag{3}$$

Итак, проблема Помпейю сводится к проверке следующего утверждения: краевая задача (3) разрешима для некоторого λ в том и только в том случае, когда Ω - круг.

Отметим, что когда Ω - круг, задача (3) обладает не одним собственным числом, а счетным набором собственных чисел $\lambda_k = r_k^2$, где r_k - нули функции Бесселя J_1. Собственные функции, отвечающие этим собственным числам, следующие:

$$u_k(x,y) = \frac{J_0(\sqrt{\lambda_k}\, r)}{J_0(\sqrt{\lambda_k})}, \qquad r = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Оказывается, что верно и обратное.

Теорема [2]. *Если краевая задача* (3) *имеет бесконечное количество собственных чисел, то область* Ω *является кругом.*

С учетом этого результата проблему Помпейю можно сформулировать теперь так. Обозначим через $\sigma(\Omega)$ множество собственных чисел задачи (3)(*спектр Помпейю*). Верно ли, что множество $\sigma(\Omega)$ всегда либо пусто, либо бесконечно?

Отметим еще, что известные результаты о разрешимости краевых задач обеспечивают аналитичность границы $\partial\Omega$ в предположении лишь ее гладкости и даже липшицевости.

3. Устойчивость спектра Помпейю

Цель настоящей работы - выяснить, что происходит со спектром Помпейю при малых деформациях круга. Грубо говоря, результат состоит в следующем. Рассмотрим возмущение круга с помощью семейства областей, аналитически зависящих от параметра. Если для каждой возмущенной области спектр Помпейю непуст, то все эти области суть круги. Речь идет, таким образом, об определенном свойстве "жесткости" круга: его нельзя деформировать с помощью семейства областей, лишенных свойства Помпейю, иначе как с помощью кругов.

Приведем точную формулировку утверждения. Рассмотрим семейство $\Omega(t)$ жордановых областей с гладкими границами, аналитически зависящее от параметра $t \in [0,T]$. Предположим при этом, что значению $t = 0$ отвечает единичный круг

$$D = \{(x,y) : x^2+y^2 \leqslant 1\}.$$

Для каждой области $\Omega(t)$ рассмотрим переопределенную краевую задачу

$$\Delta u + \lambda u = 0,$$

$$u\Big|_{\partial\Omega(t)} = 1, \tag{4}$$

$$\frac{\partial u}{\partial \nu}\Big|_{\partial\Omega(t)} = 0.$$

Теорема. *Предположим, что одно из собственных чисел* $\lambda^0 \in \sigma(\Omega(0))$ *обладает аналитическим продолжением* $\lambda(t) \in \sigma(\Omega(t))$ *по параметру* t *в окрестность точки* $t = 0$. *Тогда все собственные числа из* $\sigma(\Omega(0))$ *обладают этим свойством и каждая область* $\Omega(t)$, $t \in [0,T]$, *является кругом.*

Доказательству предпошлем две леммы.

Лемма 1. *Существует окрестность* $[0,\varepsilon)$ *точки* $t = 0$ *и семейство* $\omega_t : D \longrightarrow \Omega(t)$ *конформных отображений такое, что* $\omega_0(z) \equiv z$ *и для всех* $t \in [0,\varepsilon)$

$$\frac{\partial^2 \omega_t}{\partial z^2}(0) = 0. \tag{5}$$

Доказательство. Выберем какое-нибудь семейство ω'_t конформных отображений круга D на области $\Omega(t)$. Семейство ω'_t выберем при этом аналитически зависящим от t и таким, что ω'_0 – тождественое отображение. Свобода в выборе такого семейства определяется группой конформных отображений единичного круга D на себя. Рассмотрим семейство

$$\eta_\alpha(z) = \frac{z + \alpha}{1+\bar{\alpha} z}, \quad |\alpha| < 1,$$

таких отображений.

Условие (5), записанное для отображений $\omega'_t \circ \eta_\alpha$, означает выполнение равенства

$$F(t,\alpha) = (1 - |\alpha|^2)\frac{\partial^2 \omega'_t}{\partial z^2}(\alpha) - 2\bar{\alpha}\frac{\partial \omega'_t}{\partial z}(\alpha) = 0.$$

Так как $F(0,0) = 0$ и $F(0,\alpha) = -2\bar{\alpha}$, то на основании теоремы о неявной функции заключаем, что в окрестности точки $t = 0$ определена вещественно-аналитическая функция $\alpha = \alpha(t)$, удовлетворяющая условию $F(t,\alpha(t)) \equiv 0$. Ясно, что семейство $\omega_t = \omega'_t \circ \eta_{\alpha(t)}$ является искомым.

Пусть f – гармоническая функция в плоскости. Рассмотрим некоторый корень $r^0 > 0$ функции Бесселя J_1 и положим

$$v^0(x,y) = \frac{J_0(r^0\sqrt{x^2+y^2})}{J_0(r^0)}.$$

Лемма 2. *Краевая задача*

$$\Delta v + \lambda v = f v^0 \qquad (\lambda = (r^0)^2),$$

$$v|_{\partial D} = 0, \tag{6}$$

$$\frac{\partial v}{\partial \nu}\bigg|_{\partial D} = 0$$

разрешима в том и только в том случае, если функция f линейна.

Доказательство. Обозначим

$$v_{n,m}(re^{i\theta}) = J_n(\alpha_{nm}r)e^{in\theta},$$

где α_{nm} – m-й нуль функции Бесселя J_n. Представим функцию v в виде ряда по этой системе. В силу уравнения (6) разложение имеет вид

$$v(re^{i\theta}) = \sum_{\substack{n,m \\ \alpha^2_{nm} \neq \lambda}} \frac{\langle fv_0, v_{nm}\rangle}{\lambda - \alpha^2_{nm}} \frac{v_{nm}}{|v_{nm}|^2} + \tilde{v},$$

где $\tilde{v}$ – собственная функция с собственным числом $\sqrt{\lambda}$:

$$\tilde{v}(re^{i\theta}) = c_1 J_1(\sqrt{\lambda}r)e^{i\theta} + c_2 J_1(\sqrt{\lambda}r)e^{-i\theta}.$$

Тогда производная по нормали к границе круга равна

$$v_r(e^{i\theta}) = \frac{\partial v}{\partial r}(re^{i\theta})\bigg|_{r=1} = \sum_{\substack{n,m \\ \alpha^2_{nm} \neq \lambda}} \frac{\langle fv_0, v_{nm}\rangle}{\lambda - \alpha^2_{nm}} \cdot$$

$$\cdot \frac{1}{|v_{nm}|^2} \frac{\partial v_{nm}}{\partial r}(e^{i\theta}) + \frac{\partial \tilde{v}}{\partial r}(e^{i\theta}). \qquad (7)$$

При этом

$$\frac{\partial v_{nm}}{\partial r}(e^{i\theta}) = \alpha_{nm}J'_n(\alpha_{nm})e^{in\theta} = -\alpha_{nm}J_{n+1}(\alpha_{nm})e^{in\theta} \qquad (8)$$

и

$$|v_{nm}|^2 = \int_0^1 J^2_n(\alpha_{nm})rdr = 1/2\ J^2_{n+1}(\alpha_{nm}) \qquad (9)$$

([5], формула 48).

Скалярные произведения $\langle f v_0, v_{nm} \rangle$ вычислим, разложив гармоническую функцию f в ряд Фурье

$$f(re^{i\theta}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n r^{|n|} e^{in\theta},$$

откуда

$$\langle f v_0, v_{nm} \rangle = a_n \int_0^1 \frac{J_0(\sqrt{\lambda} r)}{J_0(\sqrt{\lambda})} J_n(\alpha_{nm} r)\, r^{|n|+1}\, dr. \tag{10}$$

Подставляя (8), (9) в (7), получим

$$v_r(e^{i\theta}) = -2 \sum_{\substack{n,m \\ \alpha_{nm}^2 \neq \lambda}} \frac{\langle f v_0, v_{nm} \rangle}{\lambda - \alpha_{nm}^2} \frac{\alpha_{nm}}{J_{n+1}(\alpha_{nm})} e^{in\theta} -$$

$$-\sqrt{\lambda}\, J_2(\sqrt{\lambda})(c_1 e^{i\theta} + c_2 e^{-i\theta}). \tag{11}$$

При каждом фиксированном $n \neq \pm 1$ рассмотрим сумму по индексу m в выражении (11), которая с учетом (10) равна

$$\sum_m = a_n e^{in\theta} \frac{1}{J_0(\sqrt{\lambda})} \int_0^1 J_0(\sqrt{\lambda}\, r)\, S(r)\, r^{|n|+1} dr,$$

где

$$S(r) = 2 \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\alpha_{nm} J_n(\alpha_{nm} r)}{(\alpha_{nm}^2 - \lambda) J_{n+1}(\alpha_{nm})}.$$

Однако на основании [5, формула 56] имеем

$$S(r) = \frac{J_n(\sqrt{\lambda}\, r)}{J_n(\sqrt{\lambda})}$$

и поэтому

$$\sum_m = a_n e^{in\theta} \frac{1}{J_0(\sqrt{\lambda})J_n(\sqrt{\lambda})} \int_0^1 J_0(\sqrt{\lambda}\,r)\, J_n(\sqrt{\lambda}\,r) r^{|n|+1}dr.$$

Интеграл в этой формуле можно вычислить на основании равенства

$$\int z^{n+1}J_0(z)J_n(z)dz =$$

$$= \frac{z^{n+2}}{2(n+1)}\left\{J_0(z)J_n(z) + J_1(z)J_{n+1}(z)\right\} \tag{12}$$

([6], формула 2), из которого следует, в силу $J_1(\sqrt{\lambda}) = 0$, что

$$\int_0^1 J_0(\sqrt{\lambda}\,r)J_n(\sqrt{\lambda}\,r)r^{|n|+1}dr = \frac{1}{2(|n|+1)} J_0(\sqrt{\lambda})J_n(\sqrt{\lambda}).$$

Итак,

$$\sum_m = \frac{a_n}{2(|n|+1)} e^{in\theta},$$

и мы приходим к выражению для нормальной производной:

$$v_r(e^{i\theta}) = \sum_{n\neq\pm1} \frac{a_n}{2(|n|+1)} e^{in\theta} + w,$$

где w имеет вид $w(e^{i\theta}) = b_1e^{i\theta}+ b_2e^{-i\theta}$, $b_i=$ const.

Краевое условие Неймана $v_r(e^{i\theta}) = 0$ дает

$$a_n = 0, \quad n \neq \pm1,$$

что и означает линейность функции f.

Доказательство теоремы. Выберем семейство конформных отображений $\omega_t:D \longrightarrow \Omega(t)$ в соответствии с леммой 1. Используя эти отображения, можем перейти от краевой задачи (4) в области $\Omega(t)$ к задаче в единичном круге D (граничные условия в (4) в силу конформности сохраняются). Для функции $v = u\circ\omega_t$, где u - решение (4), получаем

$$\Delta v + \lambda\rho_t v = 0,$$
$$v|_{\partial D} = 1, \tag{13}$$

$$\frac{\partial v}{\partial \nu}\Big|_{\partial D} = 0.$$

Здесь $\rho_t(z) = |h_t(z)|^2$, $h_t(z) = \dfrac{\partial \omega_t}{\partial z}(z)$.

Пусть λ^0 - собственное число задачи (4) с $t = 0$, которое по условию теоремы обладает аналитическим продолжением $\lambda(t) \in \sigma(\Omega(t))$. Потенциал $\lambda(t)\rho_t$ уравнения (13) зависит от t аналитическим образом, поэтому решение $v = v_t$ является аналитической функцией параметра t.

Рассмотрим степенные разложения по параметру t:

$$v_t(z) = \sum_{n=0}^{\infty} v^n(z)t^n,$$

$$\rho_t(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \rho^n(z)t^n,$$

$$\lambda(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n t^n$$

$$h_t(z) = \sum_{n=0}^{\infty} h^n(z)t^n.$$

Коэфициенты h^n - голоморфные в круге D, причем

$$\frac{\partial h^n}{\partial z}(0) = 0$$

согласно выбору отображений ω_t.

Подставляя разложения по степеням t в (13), придем к системе уравнений ($n \geqslant 1$):

$$\Delta v^n + \sum_{i_1+i_2+i_3+i_4=n} \lambda^{i_1} h^{i_2} \overline{h^{i_3}} v^{i_4} = 0,$$

$$v^n\Big|_{\partial D} = 0,$$

$$\frac{\partial v^n}{\partial \nu}\Big|_{\partial D} = 0,$$

Так как ω_0 - тождественное отображение, то

$$h^0 = \frac{\partial \omega_0}{\partial z} \equiv 1,$$

а v_0 - собственная функция с собственным числом λ^0:

$$v^0(re^{i\theta}) = \frac{J_0(\sqrt{\lambda^0} r)}{J_0(\sqrt{\lambda^0})}.$$

Наша задача теперь - доказать, что для любого t функции h_t постоянны в единичном круге. Для этого достаточно убедиться в том, что все коэффициенты Тейлора h^n, $n \geqslant 1$, постоянны. Докажем это утверждение индукцией по n.

Пусть $n = 1$. В силу (13) имеем

$$\Delta v^1 + \lambda^0 v^1 = -(\lambda^1 + 2\lambda^0 \mathrm{Re} h^1) v^0.$$

Применяя лемму 2 с $f = -\lambda^1 - 2\lambda^0 \mathrm{Re} h^1$, заключаем, что функция f линейна, т.е. имеет вид $f(z) = az + \bar{a}\bar{z}$. Поскольку

$$a = \frac{\partial f}{\partial z}(0) = -\lambda^0 \frac{\partial h^1}{\partial z}(0) = 0,$$

то $f = 0$. Но тогда $h^1 = \mathrm{const}$. Кроме того, получаем, что $v^1 = 0$, так как задача (6) с $f = 0$ имеет лишь тривиальное решение.

Предположим теперь, что

$$v_l = 0, \quad h^l = \mathrm{const}, \quad 1 \leqslant l \leqslant n-1.$$

Тогда из (14) можем записать

$$\Delta v^n + \lambda^0 v^n = -(\mu + 2\lambda^0 \mathrm{Re} h^n) v^0,$$

где

$$\mu = \sum_{\substack{l_1 + l_2 + l_3 = n \\ 0 \leqslant l_2,\, l_3 < n}} \lambda^{l_1} h^{l_2} \overline{h^{l_3}} = \mathrm{const}.$$

Снова применяя лемму 2, видим, что

$$h^n = \mathrm{const}, \qquad v^n = 0.$$

Таким образом,

$$h_t(z) = \frac{\partial w_t}{\partial z}(z) = \mathrm{const}.$$

Значит, конформные отображения w_t линейны,

$$w_t(z) = A_t z + B_t$$

и каждая область $\Omega(t)$ является кругом.

Итак, $\Omega(t)$ представляет собой семейство кругов, включающее в себя единичный круг D и аналитически зависящее от параметра t. Очевидно, что все собственные числа задачи (4), рассмотренной в единичном круге, допускают аналитическое продолжение по t как собственные числа этой задачи в области $\Omega(t)$:

$$\lambda_k(t) = |A_t|^2\lambda_k.$$

Теорема доказана.

Автор благодарит Л.Зальцмана и Ф.Ольвера за указание на формулу (12), К.Беренстейна за обсуждения.

Литература

1. **Zalcman L.** Analyticity and the Pompeiu problem // Arch. Ration. Mech. and Anal.- 1971. - V.43. - P.237-254.

2. **Berenstein C.A.** On the converse to Pompeiu problem // Notas e Comunicacões de Matematica (Univ. Fed. de Pernambuco). - 1976. - V.73.

3. **Schwartz L.** Teorie generale des fonctions moyennes-periodiques // Ann. Math.(2). - 1947. - V.48. - P. 857 - 929.

4. **Berenstein C.A.** On inverse spectral theorem and its relation to the Pompeiu problem // J. Anal. Math. - 1980. - V.37. - P.128-144.

5. **Бейтмен Г., Эрдейи А.** Высшие трансцендентные функции, II. - М.: Наука, 1974.

6. **Watson G.N.** A treatise on the theory of Bessel functions. - Cambridge Univ. Press, 1962.

Поступила в редакцию
10.09.1990 г.