УДК 512.58

ВВЕДЕНИЕ В ТЕОРИЮ КАТЕГОРИЙ

(фрагмент монографии)

Г.П.Акилов

Многие сооружения, будь то создания природы или творения человеческого разума, можно довольно четко разграничить на основные, "конструкционные", элементы и на устройства, их связывающие, роль которых состоит в передаче функций от одних основных элементов к другим. Так устроено и большинство математических теорий (во всяком случае все те, о которых пойдет речь в этой книге[1]). "Конструкционными" элементами таких теорий служат множества, реже классы, наделенные некоторой структурой[2], а в роли

---

[1] Публикуемый здесь материал представляет собой более или менее независимый фрагмент неоконченной книги "Порядковый анализ", работой над которой были заполнены последние годы жизни Глеба Павловича Акилова. Этот текст, судя по всему, Глеб Павлович не считал окончательным. Многие главы книги переписывались им по нескольку раз и, скорее всего, та же участь постигла бы и данный раздел. Мы публикуем этот небольшой фрагмент в том виде, в каком он был обнаружен в рукописях Глеба Павловича, позволив себе лишь незначительные уточнения. - Прим.ред.

[2] Мы не даем здесь точного определения понятия структуры, подразумевая под этим фиксирование определенного типа связей между элементами данного множества, множества всех его подмно-

связующих звеньев фигурируют обычно отображения одного множества в другое, в том или ином смысле сохраняющие структуру. Важно иметь в виду, что в ряде вопросов конкретная природа объектов теории и конкретный характер связей между ними не играют никакой роли. Так и возникает понятие категории, когда наряду с классом "объектов" рассматривается еще один класс так называемых морфизмов, осуществляющих связь между объектами.

1. Объекты и морфизмы категории

Определение категории мы начнем с несколько парадоксального высказывания о том, что категория не есть объект теории множеств, т.е. какой-либо класс. Говоря о *категории*, мы имеем в виду прежде всего два класса: класс C, элементы которого называются *объектами* данной категории, и класс $\mathbf{M}$ - его элементы называются ***морфизмами*** данной категории. Предполагается, что выполнены следующие условия.

1) Задано такое отображение Hom класса C^2 в класс $\mathfrak{P}(\mathbf{M})$ всех подмножеств класса $\mathbf{M}$, что[3]

$$\mathbf{M} = \bigcup_{(x,y)\in C^2} \mathrm{Hom}(x,y). \qquad (1)$$

Морфизмы, входящие в множество $\mathrm{Hom}(x,y)$, называют ***морфизмами** объекта* x (или из объекта x) *в объект* y. Заметим еще, что включение $\mu \in \mathrm{Hom}(x,y)$ мы будем записывать часто в виде одной из следующих формул: $\mu : x \longrightarrow y$ или $x \xrightarrow{\mu} y$.

2) Для любых объектов x,y,z задано отображение γ произведения $\mathrm{Hom}(x,y) \times \mathrm{Hom}(y,z)$ в $\mathrm{Hom}(x,z)$ - *закон композиции* морфизмов.

жеств и т.д. Обычно подобные связи возникают при выделении определенной квалификации подмножества данного множества, множества всех его подмножеств и т.д. или подмножества какого-либо вспомогательного множества.

[3] Строго говоря, вместо $\mathrm{Hom}(x,y)$ следовало бы писать $\mathrm{Hom}((x,y))$. Подобную непоследовательность в обозначениях мы будем допускать и в дальнейшем уже без оговорок.

Если $\lambda : x \to y$ и $\mu : y \to z$, то морфизм $\gamma(\lambda,\mu)$ называется *композицией морфизмов* λ и μ и обозначается, как правило, через $\mu\lambda$.

3) Композиция морфизмов обладает свойством ассоциативности: если даны морфизмы $\lambda : x \to y$, $\mu : y \to z$ и $\nu : z \to u$, то

$$\nu(\mu\lambda) = (\nu\mu)\lambda. \tag{2}$$

Благодаря свойству ассоциативности можно при соответствующих предположениях говорить о композиции более чем двух морфизмов.

4) Для любого объекта x в множестве $\mathrm{Hom}(x,x)$ всех морфизмов объекта x в себя существует *единичный морфизм* 1_x, характеризуемый соотношениями

$$\lambda 1_x = \lambda, \ 1_x\mu = \mu \ (y,z \in C; \ \lambda \in \mathrm{Hom}(x,y), \ \mu \in \mathrm{Hom}(z,x). \tag{3}$$

Нетрудно понять, что единичный морфизм 1_x определяется объектом x однозначно: если, кроме 1_x, имеется еще один единичный морфизм $1'_x$, то $1'_x = 1'_x 1_x = 1_x$.

Подводя итог, можно сказать, таким образом, что *категория* – это комплекс, т.е. расматриваемые совместно класс объектов C и класс морфизмов M вместе с законом композиции[4], связанные условиями 1-4.

Категория называется *малой*, если класс объектов представляет собой множество. Ввиду соотношения (1) множеством при этом будет и класс морфизмов.

Категория C_0 (с класом морфизмов M_0) называется *подкатегорией* категории C (с классом морфизмов M), если $C_0 \subset C$ и закон композиции в C_0 *наследуется* из категории C. Последнее надлежит понимать так: во-первых, каждый морфизм в категории C_0 является также морфизмом и в категории C, т.е. $M_0 \subset M$; во-вторых, обозначая композицию в категории C_0 морфизмов $\lambda,\mu \in M_0$ (в том случае, когда она осмыслена) через $\mu \square \lambda$, будем иметь: $\mu \square \lambda = \mu\lambda$; и, наконец, в-третьих, для любого объекта $x \in C_0$ единичный морфизм 1_x категории C является морфизмом и

[4] Строго говоря, закон композиции следовало бы определить как соответствие из M^2 в M, сужение которого на каждое из произведений вида $\mathrm{Hom}(x,y) \times \mathrm{Hom}(y,z)$ есть указанное в тексте отображение γ.

категории C_0 (как легко понять, единичным в этой категории).

Если для любых объектов x,y категории C_0 множество $\mathrm{Hom}_0(x,y)$ всех морфизмов объекта x в объект y в категории C_0 исчерпывает все множество $\mathrm{Hom}(x,y)$ всех морфизмов объекта x в объект y в категории C, то о C_0 говорят как о *полной подкатегории* категории C.

Рассмотрим категории C (с классом морфизмов M) и D (с классом морфизмов N) и образуем категорию, классом объектов которой служит произведение $C \times D$, а классом морфизмов – произведение $M \times N$. При этом морфизмы объекта $(x,u)(x \in C,\ u \in D)$ в объект $(y,v)(y \in C,\ v \in D)$ суть упорядоченные пары соответствующих морфизмов категорий C и D, так что

$$\mathrm{Hom}((x,u),(y,v)) = \mathrm{Hom}(x,y) \times \mathrm{Hom}(u,v).$$

Закон композиции морфизмов определяется естественным образом:

$$(\mu,\sigma) \cdot (\lambda,\rho) = (\mu\lambda,\sigma\rho) \quad (\lambda,\mu \in M;\ \rho\sigma \in N)$$

в предположении, что осмыслена правая часть, т.е. что имеют смысл композиции $\mu\lambda$ и $\sigma\rho$.

Так устроенная категория называется *произведением* данных категорий C и D.

С каждой данной категорией связывают категорию, *двойственную* (или *дуальную*) к ней. Эта категория отличается от данной, по существу, лишь законом композиции морфизмов. Классы же объектов и морфизмов одинаковые у обеих категорий – данной и двойственной к ней. Если x и y – объекты категории (безразлично какой – данной или двойственной), то, понимая под $\mathrm{Hom}^*(x,y)$ множество всех морфизмов объекта x в объект y в двойственной категории, будем иметь по определению

$$\mathrm{Hom}^*(x,y) = \mathrm{Hom}(y,x). \qquad (4)$$

Равным образом, обозначая композицию морфизмов λ и μ в двойственной категории через $\mu * \lambda$[5], также по определению имеем:

$$\mu * \lambda = \lambda\mu.$$

---

[5] При этом, разумеется, предполагается, что композиция $\mu * \lambda$ имеет смысл, т.е. что для некоторых $x,y,z \in C$ будет: $\lambda \in \mathrm{Hom}^*(x,y)$, $\mu \in \mathrm{Hom}^*(y,z)$.

Очевидно, операция перехода от данной категории к двойственной - инволютивна: категория, двойственная к двойственной, есть данная категория.

Объект i данной категории называется *инициальным* (*начальным*), если для любого объекта x этой категории множество $\mathrm{Hom}(i,x)$ всех морфизмов объекта i в объект x сводится к единственному морфизму.

Аналогично этому, объект t расматриваемой категории называется *терминальным* (*конечным* или *финальным*), если, каков бы ни был объект x данной категории, множество $\mathrm{Hom}(x,t)$ всех морфизмов объекта x в объект t - одноэлементно.

Понятно, что при переходе от данной категории к двойственной инициальный объект превращается в терминальный, а терминальный, напротив, в инициальный.

2. Функторы

Связь между различными категориями осуществляется с помощью так называемых функторов, которые суть отображения класса объектов одной категории в класс объектов другой и одновременно с этим отображения класса морфизмов первой категории в класс морфизмов второй.

Условимся считать здесь и всюду ниже, где только пойдет речь о функторах, что в рассматриваемых категориях классы объектов и морфизмов не имеют общих элементов[6].

Рассмотрим категории C с классом морфизмов M и D с классом морфизмов N. Отображение F объединения $C \cup M$ в объединение $D \cup N$ называется (*ковариантным*) *функтором* категории C в категорию D, если:

1) $F[C] \subset D$, $F[M] \subset N$;

---

[6] Если это условие нарушено, нетрудно добиться его соблюдения, "пометив" объекты одной меткой, а морфизмы - другой. Точнее говоря, можно заменить класс объектов C произведением $C \times \{0\}$, а класс морфизмов M - произведением $M \times \{m\}$, где $0 \neq m$.

2) для любых объектов $x, y \in C$

$$F[\mathrm{Hom}(x,y)] \subset \mathrm{Hom}(F(x),F(y)). \qquad (5)$$

Из условия 2 следует, что если для морфизмов $\lambda, \mu \in M$ определена композиция $\mu\lambda$ (в категории C), то для морфизмов $F(\lambda)$, $F(\mu)$ определена композиция $F(\mu)F(\lambda)$. При этом требуется

3) $F(\mu\lambda) = F(\mu)F(\lambda)$.

Наконец, предполагается, что соблюдено условие:

4) для любого объекта $x \in C$ значение $F(1_x)$ функтора F на единичном морфизме объекта x есть единичный морфизм $1_{F(x)}$ объекта $F(x)$

$$F(1_x) = 1_{F(x)}. \qquad (6)$$

В связи с данным определением заметим, что условие $F[M] \subset N$ есть, очевидно, следствие условия (5) и соотношения (1). Далее, если образ $F[M]$ исчерпывает весь класс морфизмов N, условие 4 оказывается излишним: оно, как без труда убедится читатель, вытекает тогда из условия 3.

Заменим категорию C двойственной к ней. Ковариантный функтор Φ этой (двойственной) категории в категорию D называется *контравариантным* функтором данной категории C в категорию D. Имея в виду определение двойственной категории (см. п.1), чтобы получить определение контравариантного функтора, надлежит заменить в условии 2 определения ковариантного функтора соотношения (5) соотношением

$$\Phi[\mathrm{Hom}(x,y)] \subset \mathrm{Hom}(\Phi(y),\Phi(x)), \qquad (7)$$

а условие 3 - условием $\Phi(\mu\lambda) = \Phi(\lambda)\Phi(\mu)$.

Тривиальным примером контравариантного функтора служит тождественное отображение данной категории в двойственную к ней.

Можно рассматривать функторы двух или более "переменных", ковариантные по одним "переменным" и контравариантные по остальным. В случае двух "переменных" речь идет просто о ковариантном функторе произведения $C_1 \times C_2$ категорий C_1 и C_2 в какую-либо категорию D. Если одну из этих категорий или обе сразу заменить на двойственные, то функтор двух "переменных" будет контравариантным по одной или по обеим "переменным".

3. Простейшие примеры категорий и функторов

1) *Категория всех множеств и всех соответствий.* Объектами этой категории служат всевозможные множества, так что класс объектов есть универсальный класс U всех множеств. Морфизмы объекта (т.е. множества) x в объект (множество) y суть всевозможные соответствия из множества x в множество y, т.е. всевозможные подмножества произведения $x \times y$. Композиция морфизмов определяется как суперпозиция соответствий. Заметим, что в этой категории пустое множество является как инициальным, так и терминальным объектом, поскольку $\mathrm{Hom}(\varnothing, x) = \{\varnothing\}$ и $\mathrm{Hom}(x, \varnothing) = \{\varnothing\}$ для любого множества x.

2) *Категория всех множеств и отображений.* Эта категория определяется как подкатегория первой. В роли класса объектов по-прежнему выступает универсальный класс U. Морфизмы же объекта (множества) x в объект (множество) y суть всевозможные отображения множества x в множество y. Композицией морфизмов, как и в примере 1, служит суперпозиция отображений. Как явствует из сказанного в связи с примером 1, пустое множество будет инициальным объектом рассматриваемой категории. Что касается терминальных объектов, то в этой категории ими оказываются всевозможные одноэлементные множества; всякое отображение μ непустого множества x в одноэлементное множество $\{a\}$ однозначно определяется соотношением: $\mu(e) = a (e \in x)$, а для пустого множества имеем $\mathrm{Hom}(\varnothing, \{a\}) = \{\varnothing\}$.

Определенные выше две категории связаны между собой функтором, который можно было бы назвать функтором поднятия на второй уровень. Поскольку в обеих категориях класс морфизмов не только пересекается с классом объектов, но даже является подклассом последнего, то, прежде чем говорить о функторе, надлежит произвести операцию "расчленения" классов объектов и морфизмов (см. примечание 6). Именно, в обеих категориях объектами будем считать не просто произвольные множества, а упорядоченные пары вида (x, o), где x - произвольное множество, а множество o играет роль метки, показывающей, что множество x рассматривается как объект (а не морфизм). Не входя в большие подробности, укажем лишь, что морфизмы первой категории - это упорядоченные четверки (тетрады) (x,y,μ,m), где x и y - произвольные множества, μ - подмножество произведения $x \times y$, а m - отличное от o множество, играющее роль метки морфизма. Морфизмы второй категории модифицируются аналогично. Функтор F определим, полагая, во-первых,

$$F(x,o) = (\mathfrak{P}(x),o) \quad (x \in U), \tag{8}$$

где под $\mathfrak{P}(x)$ понимается множество всех подмножеств множества x, и, во-вторых,

$$F(x,y,\mu,m) = (\mathfrak{P}(x),\mathfrak{P}(y),\hat{\mu},m), \tag{9}$$

где $\hat{\mu}$ означает отвечающее μ отношение второго уровня, рассматриваемое как отображение множества $\mathfrak{P}(x)$ в множество $\mathfrak{P}(y)$, т.е. $\hat{\mu} : A \longmapsto \mu[A]$ $(A \in \mathfrak{P}(x))$.

Таким образом, грубо говоря, функтор F сопоставляет объекту x первой категории объект $\mathfrak{P}(x)$ второй категории и морфизму μ первой - морфизм $\hat{\mu}$ второй. Мы не останавливаемся на проверке условий 1-4 определения функтора.

Определенный выше функтор F, очевидно, ковариантный. Укажем пример контравариантного функтора Φ категории примера 1 в себя. Сохраняя модифицированные обозначения, положим

$$\Phi(x,o) = (x,o) \tag{10}$$

и

$$\Phi(x,y,\mu,m) = (y,x,\mu^{-1},m). \tag{11}$$

4. Диаграммы

В основании понятия диаграммы лежит полезное и само по себе понятие *ориентированного графа*. Под этим мы понимаем всякое множественное отношение. Элементы этого отношения называются *ребрами* графа, а элементы объединения области определения и области значений - *вершинами*. Если Γ - (ориентированный) граф, класс $\Xi = D(\Gamma) \cup R(\Gamma)$ - класс всех его вершин, σ - одно из ребер графа ($\sigma = (\xi,\eta) \in \Gamma$), то, очевидно, $\xi,\eta \in D(\Gamma) \cup R(\Gamma) = \Xi$. Вершина ξ называется *началом*, а вершина η - *концом* ребра σ. Говорят также, что ребро $\sigma = (\xi,\eta)$ *соединяет* вершину ξ с вершиной η. Будем считать, что в состав любого графа входят все ребра вида (ξ,ξ), где ξ - произвольная вершина, так что если, по-прежнему, Ξ обозначает класс всех вершин графа Γ, то $\Gamma \supset I_\Xi$.

Будем говорить, что ребро τ *примыкает* к ребру σ графа Γ, если начало ребра τ совпадает с концом ребра σ, т.е. если $\sigma = (\xi,\eta)$, а $\tau = (\eta,\zeta)$, где ξ,η,ζ - некоторые вершины графа Γ.

Пусть n - натуральное число. Семейство $\Sigma : k \longmapsto \sigma_k$ ($k = 1,2,\ldots,n$) ребер графа Γ такое, что при каждом $k = 1,2,\ldots,n-1$ ребро σ_{k+1} примыкает к ребру σ_k, называется *путем* (в графе Γ). Путь, состоящий из единственного ребра (случай $n = 1$), мы отождествляем для простоты с самим этим ребром. Путь Σ мы будем обозначать, выписывая составляющие его ребра в порядке их следования: $\Sigma = \sigma_1\sigma_2\ldots\sigma_n$. Ребра, составляющие данный путь, мы будем называть его *этапами* - первым, вторым и т.д., а те из вершин графа Γ, которые служат началом или концом какого-либо из этапов пути Σ - *вершинами* этого пути. Начало первого этапа называется *началом пути*, конец последнего этапа - *концом пути*. В подходящих случаях будем говорить, что рассматриваемый путь соединяет свое начало со своим концом.

По определению, путь Σ примыкает к пути Σ_0, если начало пути Σ то же, что и конец пути Σ_0. В этом случае осмыслена *операция присоединения* пути Σ к пути Σ_0, результат которой называется *присоединением* к пути Σ_0 пути Σ и обозначается через $\Sigma_0 + \Sigma$. Сущность операции присоединения - в выписывании вслед за последним этапом первого пути первого, второго и т.д. этапов второго пути.

Заметим, что отнюдь не исключена возможность того, что одно и то же ребро графа встречается несколько раз в качестве этапа некоторого пути. Если каждое ребро графа участвует в роли этапа данного пути не более одного раза, то этот путь называется *простым*.

Путь, среди этапов которого нет вырожденных ребер, т.е. ребер вида (ξ,ξ) (ξ - какая-либо вершина графа), называется *приведенным*. Приведенным мы будем называть также путь, единственным этапом которого является вырожденное ребро. Из произвольного пути легко получить приведенный путь, если из данного пути вычеркнуть все вырожденные ребра (в том случае, когда среди этапов пути имеются, кроме вырожденных, еще и невырожденные), либо (когда путь состоит лишь из вырожденных ребер - все они при этом должны совпадать друг с другом) оставить невычеркнутым одно. Такая операция приведения не меняет ни вершин пути, ни их взаимного расположения. В частности, начало исходного пути остается началом и приведенного, а конец исходного - концом приведенного.

Отправляясь от данного графа Γ (класс его вершин обозначим Ξ), образуем категорию, которую будем называть *категорией графа* Γ *и приведенных путей*. Объектами этой категории служат всевозможные вершины графа Γ, а морфизмы объекта (вершины) ξ в объект (вершину) η - все приведенные пути, соединяющие вершину ξ с вершиной η. Наконец, композиция морфизмов - это присоединение одного (приведенного) пути к другому[7] с последующим, если необходимо, приведением. Каждый путь, таким образом, есть композиция всех своих этапов: если $\Sigma = \sigma_1\sigma_2,\dots,\sigma_n$, то $\Sigma = \sigma_1 + \sigma_2 + \dots + \sigma_n$.

Наряду с графом Γ и порожденной им категорией вершин и (приведенных) путей рассмотрим категорию C с классом морфизмов M. Контравариантный функтор $\mathfrak{D}$ в эту последнюю категорию из категории графа Γ называется *диаграммой в категории* C. При этом граф Γ называется *схемой* этой диаграммы. Задавая диаграмму, достаточно, кроме объектов категории C, отвечающих вершинам графа, или, как мы будем говорить, подставляемых в вершины графа, указать лишь те морфизмы категории C (т.е. элементы класса M), которые функтор $\mathfrak{D}$ соотносит ребрам графа Γ, поскольку значение $\mathfrak{D}(\Sigma)$ для произвольного пути Σ однозначно восстанавливаются с помощью условия 3 определения функтора (см. п.2): если $\Sigma = \sigma_1\sigma_2,\dots,\sigma_n = \sigma_1 + \sigma_2 + \dots + \sigma_n$, где $\sigma_k \in \Gamma (k = 1,2,\dots,n)$, то $\mathfrak{D}(\Sigma)$ есть композиция $\mathfrak{D}(\sigma_n) \dots \mathfrak{D}(\sigma_2)\mathfrak{D}(\sigma_1)$ морфизмов указанно-

---

[7] Вопрос о композиции морфизмов Σ и Σ_0 возникает лишь в случае, когда путь Σ примыкает к пути Σ_0, т.е. когда определено присоединение $\Sigma_0 + \Sigma$.

го простого вида.

Диаграмма $\mathfrak{D}$ называется *коммутативной*, если, каковы бы ни были две вершины графа Γ и пути Σ_1 и Σ_2, соединяющие первую со второй, $\mathfrak{D}(\Sigma_1) = \mathfrak{D}(\Sigma_2)$. Иначе говоря, коммутативность диаграммы $\mathfrak{D}$ означает, что $\mathfrak{D}(\Sigma)$ для пути Σ, соединяющего вершину ξ графа Γ с вершиной η, однозначно определяется этими вершинами. В частности, если имеется несколько ребер графа, каждое из которых соединяет вершину ξ с вершиной η, то всем этим ребрам отвечает один и тот же морфизм категории C.

5. Категории морфизмов

Исходя из данной категории C с классом морфизмов M, образуем новую категорию, которую будем называть *категорией морфизмов*. Объектами этой новой категории являются морфизмы категории исходной. В роли же морфизмов конструируемой категории выступают (если речь идет о морфизмах из объекта $\lambda \in M$ в объект $\mu \in M$) такие пары (φ,ψ) "старых" морфизмов, что оказывается коммутативной диаграмма:

$$\begin{tikzcd} x \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "\lambda"'] & u \arrow[d, "\mu"] \\ y \arrow[r, "\psi"] & v \end{tikzcd} \qquad (12)$$

В этой диаграмме x,y,u,v - объекты категории C, значение которых достаточно ясно из диаграммы. Поскольку объекты данной категории, участвующие в рассматриваемой диаграмме, однозначно восстанавливаются по ребрам графа - схемы диаграммы, мы нередко будем оставлять вершины графа незаполненными.

Диаграмму (12) удобно трактовать как морфизм категории морфизмов. При такой трактовке закон композиции морфизмов описывается следующим образом. Пусть наряду с диаграммой (12) имеется еще одна диаграмма того же вида:

$$\begin{tikzcd} {} \arrow[r, "\theta"] \arrow[d, "\mu"'] & {} \arrow[d, "\nu"] \\ {} \arrow[r, "\pi"] & {} \end{tikzcd}$$

которую мы будем истолковывать как морфизм объекта μ в объект ν (в категории морфизмов). Приписывая ее справа к диаграмме (12) и затем удаляя среднюю часть, т.е. образуя диаграммы

$$\begin{tikzcd} \cdot \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "\lambda"'] & \cdot \arrow[r, "\theta"] \arrow[d, "\mu"] & \cdot \arrow[d, "\nu"] \\ \cdot \arrow[r, "\psi"] & \cdot \arrow[r, "\pi"] & \cdot \end{tikzcd} \quad \text{и} \quad \begin{tikzcd} \cdot \arrow[r, "\theta\varphi"] \arrow[d, "\lambda"'] & \cdot \arrow[d, "\nu"] \\ \cdot \arrow[r, "\pi\psi"] & \cdot \end{tikzcd}$$

вторую из них и примем за композицию морфизмов, описываемых соответствующими диаграммами.

Из сказанного ясно, что если морфизмы в категории морфизмов понимать как пары "старых" морфизмов, то закон композиции, опуская подробности, можно записать так: $(\theta,\pi)\cdot(\varphi,\psi)=(\theta\varphi,\pi\psi)$.

Зафиксируем какой-либо объект a категории C и рассмотрим подкатегорию $\mathrm{Hom}(a,\cdot)$ категории морфизмов. Объектами категории $\mathrm{Hom}(a,\cdot)$ являются всевозможные морфизмы (в категории C) объекта a в различные объекты категории C, так что

$$\mathrm{Hom}(a,\cdot)=\bigcup_{y\in C}\mathrm{Hom}(a,y).$$

В соответствии с общим определением морфизмов в категории морфизмов в подкатегории $\mathrm{Hom}(a,\cdot)$ под морфизмом объекта $\lambda\in\mathrm{Hom}(a,\cdot)$ в объект $\mu\in\mathrm{Hom}(a,\cdot)$ понимается пара $(\mathbf{1}_a,\psi)$, где ψ – такой морфизм данной категории, что диаграмма

$$\begin{tikzcd} & \cdot \arrow[dd, "\psi"] \\ a \arrow[ur, "\lambda"] \arrow[dr, "\mu"'] & \\ & \cdot \end{tikzcd}$$

коммутативна – в данном случае это означает справедливость равенства $\mu=\psi\lambda$. Таким образом, каждый морфизм категории $\mathrm{Hom}(a,\cdot)$ можно рассматривать как "оператор умножения слева".

Если исходную категорию C заменить двойственной к ней, сохранив, однако, терминологию первоначальной, то категория $\mathrm{Hom}(a,\cdot)$ обратится в категорию $\mathrm{Hom}(\cdot,a)$, объекты которой суть все морфизмы (данной категории) в объект a, так что

$$\mathrm{Hom}(\cdot,a)=\bigcup_{x\in C}\mathrm{Hom}(x,a).$$

Морфизмы в этой категории можно рассматривать как "операторы умножения справа".

Рассматривая морфизм данной категории как оператор умножения на него справа или слева, можно в зависимости от свойств этого оператора выделить некоторые классы морфизмов. Пусть φ – морфизм объекта a в объект b. Этот морфизм называется *мономорфизмом*, если отображение $\lambda \longmapsto \varphi\lambda$ $(\lambda \in \mathrm{Hom}(\cdot, a))$ взаимно однозначно. Это, очевидно, означает, что для любых $\lambda, \mu \in \mathrm{Hom}(\cdot, a)$ равенства $\lambda = \mu$ и $\varphi\lambda = \varphi\mu$ эквивалентны.

Если взаимно однозначно отображение $\lambda \longmapsto \lambda\varphi (\lambda \in \mathrm{Hom}(b, \cdot))$, морфизм φ называется *эпиморфизмом*. Морфизм, который является как мономорфизмом, так и эпиморфизмом, называется *биморфизмом*.

Ясно, что при переходе к двойственной категории мономорфизмы становятся эпиморфизмами и, наоборот, эпиморфизмы превращаются в мономорфизмы.

Морфизм μ (по-прежнему объекта a в объект b) называется *обратимым слева*, если существует морфизм $\varphi \in \mathrm{Hom}(b, a)$ – *левый обратный* по отношению к μ, который удовлетворяет условию $\varphi\mu = 1_a$. Если же существует такой морфизм $\psi \in \mathrm{Hom}(b, a)$, что $\mu\psi = 1_b$, то говорят, что μ *обратим справа*, а морфизм ψ называют при этом *правым обратным* по отношению к μ.

I. *Морфизм, обратимый слева, является мономорфизмом, обратимый справа – эпиморфизмом.*

◄ Пусть μ – обратимый слева морфизм объекта a в объект b и φ – левый обратный к μ. Возьмем такие морфизмы $\alpha, \beta \in \mathrm{Hom}(\cdot, a)$, что $\mu\alpha = \mu\beta$. Тогда

$$\alpha = 1_a \alpha = (\varphi\mu)\alpha = (\varphi\mu)\beta = 1_a\beta = \beta.$$

Вторая часть предложения может быть доказана или аналогично, либо с использованием уже доказанного с помощью перехода к двойственной категории.►

Данный морфизм может обладать несколькими левыми или несколькими правыми по отношению к нему морфизмами. Однако

II. *Если морфизм* μ (объекта x в объект y) *обратим как слева, так и справа, то существует единственный морфизм, который служит по отношению к* μ *как левым, так и правым обратным.*

◄ Пусть φ – левый, а ψ – правый обратный по отношению к μ. Согласно определению, $\varphi = \varphi 1_y = (\varphi\mu)\psi = 1_x\psi = \psi$.►

Морфизм, который является одновременно левым и правым обратным по отношению к данному морфизму μ, называется просто *обратным* к μ и обозначается через μ^{-1}. Очевидно, морфизм μ^{-1} определяется соотношениями

$$\mu^{-1}\mu = 1_x, \quad \mu\mu^{-1} = 1_y \quad (\mu \in \mathrm{Hom}(x,y)). \tag{13}$$

Морфизм, обладающий обратным, называется *изоморфизмом*. Ясно, что вместе с μ будет изоморфизмом и обратный к μ морфизм μ^{-1}, причем $(\mu^{-1})^{-1} = \mu$. Далее, если λ и μ – изоморфизмы, то их композиция $\mu\lambda$ (коль скоро она имеет смысл) также будет изоморфизмом, причем $(\mu\lambda)^{-1} = \lambda^{-1}\mu^{-1}$. Отметим, наконец, что единичный морфизм любого объекта данной категории является изоморфизмом.

Объекты x и y данной категории называются *изоморфными*, если множество $\mathrm{Hom}(x,y)$ всех морфизмов объекта x в объект y включает в себя хотя бы один изоморфизм. Из сказанного выше вытекает

III. *Отношение, состоящее из всех пар изоморфных один другому объектов, является отношением эквивалентности в классе объектов данной категории.*

Имея в виду это отношение эквивалентности, докажем

IV. *Если класс всех инициальных элементов* (см. п.1) *данной категории непуст, то он представляет собой один из классов эквивалентности, т.е. любые два инициальных объекта изоморфны друг другу, и если какой-либо объект изоморфен инициальному, то он и сам инициальный.*

◄ Пусть x и y – инициальные объекты. По условию, существуют такие морфизмы λ и μ, что $\mathrm{Hom}(x,y) = \{\lambda\}$ и $\mathrm{Hom}(y,x) = \{\mu\}$. Композиция $\mu\lambda$, будучи элементом множества $\mathrm{Hom}(x,x)$, должна совпадать с 1_x, и, аналогично, $\lambda\mu = 1_y$. Таким образом, $\lambda = \mu^{-1}$ (см. (13)).

Допустим теперь, что объект x изоморфен инициальному объекту ι и пусть μ – изоморфизм объекта ι в объект x. Возьмем какой-либо объект y и морфизмы $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathrm{Hom}(x,y)$. Так как $\lambda_1\mu, \lambda_2\mu \in \mathrm{Hom}(\iota,y)$, ввиду инициальности объекта ι должно быть $\lambda_1\mu = \lambda_2\mu$. В силу предложения 1 изоморфизм является эпиморфизмом, так что, "сократив" последнее равенство на изоморфизм μ, получим $\lambda_1 = \lambda_2$. Таким образом, множество $\mathrm{Hom}(x,y)$ имеет не более одного элемента. Но если через ν обозначить (единственный) морфизм объекта ι в объект y, то, как очевидно, $\nu\mu^{-1} \in \mathrm{Hom}(x,y)$. Следовательно, множество $\mathrm{Hom}(x,y)$ состоит в точности из одного элемента, что и означает инициальность объекта x.▸

6. Пополнение

С изученными в предыдущем пункте категориями морфизмов связано важное понятие пополнения. Предположим, что имеется категория C и полная (см. п.1) ее подкатегория $\hat{C}$, объекты которой мы будем называть *полными*. Возьмем объект a исходной категории C и, образовав категорию $\mathrm{Hom}(a,\cdot)$ морфизмов (см. п.5), построим ее полную подкатегорию $\mathrm{Hom}(a,\cdot)$, объектами которой служат всевозможные морфизмы (категории C) в полные объекты, так что

$$\overline{\mathrm{Hom}}(a,\cdot) = \bigcup_{x \in \hat{C}} \mathrm{Hom}(a,x).$$

Морфизмы подкатегории $\overline{\mathrm{Hom}}(a,\cdot)$ определяются из условия ее полноты в категории $\mathrm{Hom}(a,\cdot)$, в соответствии со сказанным в п.5 - это есть морфизмы категории C, "замыкающие" диаграмму

$$\begin{tikzcd} & {} \arrow[dd, dashed, "\mu"] \\ a \arrow[ur, "\varphi"] \arrow[dr, "\psi"'] & \\ & {} \end{tikzcd}$$

Предположим, что категория $\overline{\mathrm{Hom}}(a,\cdot)$ имеет инициальный объект $\varphi : a \longrightarrow \hat{a}$. Полный объект $\hat{a}$ называют при этом *пополнением* объекта a, а морфизм φ - *вложением* объекта a в свое пополнение. В соответствии с данным в п.1 определением пополнение $\hat{a}$ и вложение φ характеризуются тем свойством, что для любого полного (т.е. принадлежащего подкатегории $\hat{C}$) объекта x и морфизма $\lambda : a \longrightarrow x$ существует единственный морфизм $\bar{\lambda}$ пополнения $\hat{a}$ в объект x, делающий диаграмму

$$\begin{tikzcd} & \hat{a} \arrow[dd, "\hat{\lambda}"] \\ a \arrow[ur, "\varphi"] \arrow[dr, "\lambda"] & \\ & x \end{tikzcd}$$

коммутативной. Последнее означает, что $\lambda = \bar{\lambda}\varphi$. Иначе говоря, пополнение $\hat{a}$ (вместе с вложением φ) определяются тем, что всякий морфизм $\lambda : a \to x (x \in \hat{C})$ можно "пропустить" через пополнение.

Вложение φ является эпиморфизмом относительно подкатегории $\hat{C}$ в том смысле (ср. п.5), что отображение $\mu \mapsto \mu\varphi (\mu \in \mathrm{Hom}(a,x); x \in \hat{C})$ взаимно однозначно; очевидное доказательство этого факта предоставляем читателю.

7. Спектры в категориях

В ряде случаев в данной категории удается осуществить конструкцию, подобную конструкции произведения семейства множеств. Делается это с помощью понятия спектра.

Условимся в обозначениях, которыми мы будем пользоваться на протяжении настоящего пункта. В основе, как всегда, лежит категория C с классом морфизмов $\mathcal{M}$. Пусть дана, кроме того, коммутативная диаграмма $\mathfrak{D}$ в категории C. Схему диаграммы $\mathfrak{D}$ обозначим через Γ, а класс вершин ориентированного графа Γ – через Ξ. Будем предполагать, что класс Ξ является множеством. Поскольку $\Gamma \subset \Xi^2$, множеством будет и сам граф Γ. Так как Ξ не исчерпывает класса U всех множеств, дополнение Ξ' непусто. Выберем из него какой-либо элемент o. Расширим граф Γ, присоединив к нему, во-первых, все упорядоченные пары вида (ξ, o) с $\xi \in \Xi$ и, во-вторых, пару (o,o). Полученный в результате ориентированный граф обозначим через $\mathrm{dir}\Gamma$. Таким образом, $\mathrm{dir}\Gamma = \Gamma \cup (\Xi_0 \times \{o\})$, где $\Xi_0 = \Xi \cup \{o\}$ представляет собой класс вершин графа $\mathrm{dir}\Gamma$.

Отправляясь от всех этих данных, образуем категорию $\mathrm{dir}\mathfrak{D}$, называемую *прямым спектром диаграммы* $\mathfrak{D}$. Объектами этой категории служат всевозможные коммутативные диаграммы $\mathfrak{H}$, имеющие схему $\mathrm{dir}\Gamma$ и содержащие диаграмму $\mathfrak{D}$.

Чтобы описать морфизмы категории $\mathrm{dir}\mathfrak{D}$, введем граф $\mathrm{dir}^2\Gamma$, который получается из графа $\mathrm{dir}\Gamma$ применением операции dir к графу $\mathrm{dir}\Gamma$. Именно, к множеству Ξ_0 всех вершин графа $\mathrm{dir}\Gamma$ добавляется новая вершина o', а к графу $\mathrm{dir}\Gamma$ присоединяются ребра, соединяющие вершины графа $\mathrm{dir}\Gamma$ с новой вершиной o', и, разумеется, вырожденное ребро (o',o'). Схема графа $\mathrm{dir}^2\Gamma$ выглядит, следовательно, таким образом:

$$\begin{array}{|l|}\hline \mathrm{dir}\Gamma \quad \Xi \rightrightarrows o \\ \hline \mathrm{dir}'\Gamma \ \Xi \rightrightarrows o' \\ \hline \end{array} \qquad (14)$$

т.е. граф $\mathrm{dir}^2\Gamma$ можно рассматривать как два экземпляра графа $\mathrm{dir}\Gamma$: один – с присоединенной вершиной o, другой – с присоединенной вершиной o', соединенных ребром (o,o'). Этот второй экземпляр графа $\mathrm{dir}\Gamma$ мы будем в отличие от первого обозначать через $\mathrm{dir}'\Gamma$.

Пусть $\mathfrak{H}$ и $\mathfrak{H}'$ – объекты категории $\mathrm{dir}\mathfrak{D}$. Объект $\mathfrak{H}'$ будем рассматривать как диаграмму со схемой $\mathrm{dir}'\Gamma$, т.е. заменим диаграмму $\mathfrak{H}'$ диаграммой $\bar{\mathfrak{H}}$, которую определим, полагая $\bar{\mathfrak{H}}(\xi,o') = \mathfrak{H}'(\xi,o)(\xi \in \Xi)$, $\bar{\mathfrak{H}}(o') = \mathfrak{H}'(o)$. Под морфизмом объекта $\mathfrak{H}$ в объект $\mathfrak{H}'$ будем понимать всякую коммутативную диаграмму Λ, имеющую схему $\mathrm{dir}^2\Gamma$ и содержащую объединение $\mathfrak{H} \cup \bar{\mathfrak{H}}$. Чтобы задать такого рода диаграмму Λ надо, кроме уже имеющихся в нашем распоряжении данных, указать морфизм $\lambda = \Lambda(o,o')$ объекта $u = \Lambda(o) = \mathfrak{H}(o)$ в объект $u' = \Lambda(o') = \bar{\mathfrak{H}}(o') = \mathfrak{H}'(o)$. Коммутативность диаграммы Λ равносильна коммутативности треугольных диаграмм вида

$$\begin{tikzcd} & u \arrow[d, "\lambda"] \\ \cdot \arrow[ur, "\varphi_\xi"] \arrow[r, "\varphi'_\xi"'] & u' \end{tikzcd} \qquad (\xi \in \Xi), \qquad (15)$$

где $\varphi_\xi = \Lambda(\xi,o) = \mathfrak{H}(\xi,o)$, $\varphi'_\xi = \Lambda(\xi,o') = \bar{\mathfrak{H}}(\xi,o') = \mathfrak{H}'(\xi,o)$. Коммутативность диаграммы (15) означает, что

$$\varphi'_\xi = \lambda\varphi_\xi \quad (\xi \in \Xi). \qquad (16)$$

Дадим теперь такое определение. Инициальный объект (см. п.1) категории $\mathrm{dir}\mathfrak{D}$ – прямого спектра диаграммы $\mathfrak{D}$ – называется *пределом данного прямого спектра* или просто *индуктивным пределом* диаграммы $\mathfrak{D}$ и обозначается $\varinjlim \mathfrak{D}$ или $\mathrm{limind}\,\mathfrak{D}$. Заметим, что согласно предложению IV из п.6 индуктивный предел, будучи инициальным объектом некоторой категории, определяется этим условием лишь с точностью до изоморфизма, так что, строго говоря, не есть объект прямого спектра, а является классом эквивалентности в этой категории.

"Аналитическую" теорию прямого спектра мы изложим, предполагая дополнительно транзитивность графа Γ - схемы диаграммы $\mathfrak{D}$. При этом условии, как легко понять, коммутативность диаграммы равнозначна коммутативности всех ее "треугольных" фрагментов. Применительно к диаграмме $\mathfrak{D}$, если обозначить $x_\xi = \mathfrak{D}(\xi)(\xi \in \Xi)$, $h_{\xi\eta} = \mathfrak{D}(\xi,\eta)$ $((\xi,\eta) \in \Gamma)$, это означает коммутативность любой диаграммы вида

$$\begin{tikzcd} x_\xi \arrow[rr, "h_{\xi\eta}"] \arrow[dr, "h_{\xi\zeta}"'] & & x_\eta \arrow[dl, "h_{\eta\zeta}"] \\ & x_\zeta & \end{tikzcd} \qquad ((\xi,\eta),(\eta,\zeta) \in \Gamma), \tag{17}$$

т.е. справедливость равенств

$$h_{\xi\zeta} = h_{\eta\zeta}h_{\xi\eta} \quad ((\xi,\eta),(\eta,\zeta) \in \Gamma). \tag{18}$$

Объекты категории $\operatorname{dir}\mathfrak{D}$ - диаграммы $\mathfrak{H}$ - задаются указанием объекта $u = \mathfrak{H}(o)$ и морфизмов $\varphi_\xi = \mathfrak{H}(\xi,o)(\xi \in \Xi)$ объекта x_ξ в объект u. Для проверки коммутативности диаграммы $\mathfrak{H}$ достаточно установить коммутативность лишь тех ее треугольных фрагментов, которые не входят в диаграмму $\mathfrak{D}$, т.е. всех диаграмм вида

$$\begin{tikzcd} x_\xi \arrow[dr, "\varphi_\xi"] \arrow[dd, "h_{\xi\eta}"'] & \\ & u \\ x_\eta \arrow[ur, "\varphi_\eta"'] & \end{tikzcd} \qquad ((\xi,\eta) \in \Gamma), \tag{19}$$

что равносильно равенствам

$$\varphi_\xi = \varphi_\eta h_{\xi\eta} \quad ((\xi,\eta) \in \Gamma). \tag{20}$$

В связи со сказанным диаграмму $\mathfrak{H}$ - объект прямого спектра - мы будем истолковывать как комплекс, состоящий из объекта u, и семейства $\{\varphi_\xi\}(\xi \in \Xi)$ морфизмов в u (точнее: $\varphi_\xi \in \operatorname{Hom}(x_\xi,u)$), удовлетворяющих условию (20).

Если, кроме объекта $\mathfrak{H}$, имеется еще объект $\mathfrak{H}'$ категории $\operatorname{dir}\mathfrak{D}$, т.е. объект u' и семейство $\{\varphi'_\xi\}(\xi \in \Xi)$ морфизмов, удовлетворяющих условию, аналогичному условию (20), то морфизм объекта $\mathfrak{H}$ в объект $\mathfrak{H}'$ интерпретируется как такой морфизм $\lambda : u \longrightarrow u'$ данной категории, что семейства $\{\varphi_\xi\}(\xi \in \Xi)$ и $\{\varphi'_\xi\}(\xi \in \Xi)$ связаны условиями (16): $\varphi'_\xi = \lambda\varphi_\xi(\xi \in \Xi)$.

Таким образом, под индуктивным пределом диаграммы $\mathfrak{D}$, т.е. семейства объектов $\{x_\xi\}$, связанных морфизмами $h_{\xi,\eta}((\xi,\eta) \in \Gamma)$, понимается такой объект u и такое семейство $\{\varphi_\xi\}(\xi \in \Xi)$ морфизмов (объекта x_ξ в объект u), называемых *вложениями* x_ξ в u, что, каков бы ни был объект u' и семейство морфизмов $\{\varphi'_\xi\}(\xi \in \Xi)$, удовлетворяющих условию, аналогичному условию (20), существует единственный морфизм $\lambda : u \longrightarrow u'$, связывающий семейства $\{\varphi_\xi\}$ и $\{\varphi'_\xi\}$ соотношениями (16). Нередко, допуская вольность речи, мы будем называть индуктивным пределом сам объект u.

Простейшим и во многих отношениях важнейшим примером прямого спектра является так называемая сумма объектов данного семейства $\{x_\xi\}(\xi \in \Xi)$. Речь в этом случае идет о коммутативной диаграмме $\mathfrak{D}$, схема которой, кроме вершин - элементов множества Ξ, имеет только вырожденные ребра (вида (ξ,ξ) с $\xi \in \Xi$). Предел прямого спектра этой диаграммы и называется *прямой суммой семейства* $\{x_\xi\}(\xi \in \Xi)$ и обозначается символом $\sum\limits_{\xi\in\Xi} x_\xi$. Согласно данному выше определению, прямая сумма $\sum\limits_{\xi\in\Xi} x_\xi$ есть такой объект u и семейство морфизмов φ_ξ в u (условия (20) при этом, очевидно, отсутствуют), что для любого другого объекта u' и семейства морфизмов φ'_ξ в него существует единственный морфизм $\lambda : u \longrightarrow u'$ такой, что $\varphi'_\xi = \lambda\varphi_\xi(\xi \in \Xi)$.

В категории множеств и отображений (см. пример 2 в п.3) сумма любого семейства $\{x_\xi\}$ объектов существует. В качестве $\sum\limits_{\xi\in\Xi} x_\xi$ можно взять, например, объединение $\bigcup\limits_{\xi\in\Xi}(x_\xi \times \{\xi\})$, а если множества, отвечающие различным индексам, не пересекаются, то и просто объединение $\bigcup\limits_{\xi\in\Xi} x_\xi$. Роль морфизмов φ_ξ не нуждается в пояснениях.

Двойственной по отношению к прямому спектру конструкцией является конструкция обратного спектра. Как и в случае прямого спектра, она исходит из заданной коммутативной диаграммы $\mathfrak{D}$ со схемой Γ. Граф Γ расширяется до графа $\mathrm{inv}\Gamma$ с помощью присоединения к множеству Ξ всех вершин графа Γ новой вершины o и к Γ новых ребер вида $(o,\xi)(\xi \in \Xi)$ и вырожденного ребра (o,o). Коммутативные диаграммы $\mathfrak{S}$, содержащие данную диаграмму $\mathfrak{D}$ и имеющие схему $\mathrm{inv}\Gamma$, являются объектами категории, которая называется *обратным спектром диаграммы* $\mathfrak{D}$ и обозначается через $\mathrm{inv}\mathfrak{D}$. Подобно графу $\mathrm{dir}^2\Gamma$ строится граф $\mathrm{inv}^2\Gamma$:

$$\begin{tikzcd}
\Xi \arrow[d, equal] & o \arrow[l, shift left=2] \arrow[l, dotted] \arrow[l, shift right=2] \\
\Xi & o' \arrow[l, shift left=2] \arrow[l, dotted] \arrow[l, shift right=2] \arrow[u]
\end{tikzcd} \tag{21}$$

Рассмотрим объекты $\mathfrak{S}$ и $\mathfrak{S}'$ обратного спектра $\mathrm{inv}\mathfrak{D}$. Диаграмму $\mathfrak{S}$ "разместим" в верхней части графа (21), а диаграмму $\mathfrak{S}'$ – в нижней части этого графа. Всякая коммутативная диаграмма N, имеющая схему (21) и содержащая объединение $\mathfrak{S} \cup \mathfrak{S}'$, принимается за морфизм объекта $\mathfrak{S}'$ в объект $\mathfrak{S}$ категории обратного спектра $\mathrm{inv}\mathfrak{D}$. Терминальный объект (см. п.1) называется *пределом обратного спектра диаграммы* $\mathfrak{D}$ и обозначается через $\lim\limits_{\longleftarrow} \mathfrak{D}$ (говорят также: *проективный предел* диаграммы $\mathfrak{D}$ и пишут в этом случае $\mathrm{limpr}\ \mathfrak{D}$).

Возьмем объекты $\mathfrak{S}$ и $\mathfrak{S}'$ категории $\mathrm{inv}\mathfrak{D}$ и введем обозначения:

$$\upsilon = \mathfrak{S}(o),\ \upsilon' = \mathfrak{S}'(o'),\ \nu = \mathrm{N}(o',o) \in \mathrm{Hom}(\upsilon',\upsilon),$$

$$x_\xi = \mathfrak{D}(\xi) = \mathfrak{S}(\xi) = \mathfrak{S}'(\xi) = \mathrm{N}(\xi),$$

$$\pi_\xi = \mathfrak{S}(o,\xi) \in \mathrm{Hom}(\upsilon,x_\xi),$$

$$\pi'_\xi = \mathfrak{S}'(o',\xi) \in \mathrm{Hom}(\upsilon',x_\xi),\ \text{где } \xi \in \Xi.$$

Предполагая транзитивность графа Γ, заметим, что коммутативность диаграмм $\mathfrak{S}$ и $\mathfrak{S}'$ равносильна коммутивности треугольных фрагментов этих диаграмм вида (ср. с диаграммой (19)):

$$\begin{tikzcd} x_\xi \arrow[d, "h_{\xi\eta}"'] & & v \arrow[ll, "\pi_\xi"'] \arrow[dll, "\pi_\eta"] \\ x_\eta & & \end{tikzcd} \quad ((\xi,\eta) \in \Gamma), \qquad \begin{tikzcd} x_\xi \arrow[d, "h_{\xi\eta}"'] & & v' \arrow[ll, "\pi'_\xi"'] \arrow[dll, "\pi'_\eta"] \\ x_\eta & & \end{tikzcd}$$

что, в свою очередь, эквивалентно равенствам

$$\pi_\eta = h_{\xi\eta}\pi_\xi;\ \pi'_\eta = h_{\xi\eta}\pi'_\xi \quad ((\xi,\eta) \in \Gamma). \tag{22}$$

Коммутативность диаграммы N, представляющей собой морфизм объекта $\mathfrak{S}'$ в объект $\mathfrak{S}$, означает коммутативность диаграмм вида

$$\begin{tikzcd} & v \arrow[dl, "\pi_\xi"'] \\ x_\xi & \\ & v' \arrow[ul, "\pi'_\xi"] \arrow[uu, "\nu"'] \end{tikzcd}$$

т.е. справедливость формулы

$$\pi'_\xi = \pi_\xi \nu (\xi \in \Xi). \tag{23}$$

При соответствующей интерпретации объекты обратного спектра можно отождествить с объектом v данной категории и семейством $\{\pi_\xi\}$ $(\xi \in \Xi)$ морфизмов объекта v в объекты x_ξ, называемые *проекциями* (объекта v в объекты x_ξ), такими, что удовлетворены условия (22). Морфизм одного такого объекта в другой отождествляется с морфизмом $\nu : v' \to v$, удовлетворяющим условию (23). Проективный предел семейства $\{x_\xi\}$ (связанного морфизмами $h_{\xi\eta}((\xi,\eta) \in \Gamma)$) есть такой объект v и семейство его проекций π_ξ, что удовлетворены условия (22) и для любого объекта v' и удовлетворяющего условиям (22) семейства $\{\pi'_\xi\}(\xi \in \Xi)$ его проекций существует единственный морфизм $\nu : v' \to v$, для которого соблюдены условия (23).

В простейшем случае, когда схема диаграммы $\mathfrak{D}$ сводится лишь к множеству вырожденных ребер, проективный предел семейства $\{x_\xi\}(\xi \in \Xi)$ называется *произведением* этого семейства и обозначается через $\prod_{\xi\in\Xi} x_\xi$. В категории множеств и отображений (см. пример 2 из п.3) произведение любого семейства объектов существует и совпадает с обычным произведением множеств.