Выпуск 46(63) ОПТИМИЗАЦИЯ 1989 г.

Выпуклый анализ

УДК 519.853

ЗАДАЧИ ОПТИМАЛЬНОГО ПЕРЕМЕЩЕНИЯ МАССЫ НА ПОВЕРХНОСТЯХ И СВЯЗАННЫЕ С НИМИ ФУНКЦИИ ЛИПШИЦА

Ю.Н.Владимиров

Изучаются вопросы, связанные с восстановлением функций Липшица по линиям тока на поверхностях с внутренней метрикой. Полученные результаты применяются для построения оптимальных перемещений массы в задаче Монжа - Канторовича. Рассматриваются конкретные примеры.

§1. Предварительные сведения о задаче оптимального перемещения массы

Пусть на системе $\mathcal{B}$ борелевских множеств сепарабального метрического пространства X с метрикой r заданы конечные меры φ_i с компактными носителями $S_i = supp\,\varphi_i,\ i=1,2$, причем $\varphi_1(X) = \varphi_2(X) > 0$. Введем в рассмотрение семейство Ψ определенных на $\mathcal{B}^2 = \mathcal{B}\times\mathcal{B}$ неотрицательных σ-аддитивных по каждому аргументу функций (перемещений) ψ. Следующую задачу принято называть задачей оптимального перемещения массы или задачей Монжа - Канторовича [1,2].

ЗАДАЧА 1.1. В множестве допустимых перемещений

$$\Psi_{\varphi_1\varphi_2} = \{\psi\in\Psi \mid \psi(e,X) = \varphi_1(e),\ \ \psi(X,e) = \varphi_2(e),\ e\in\mathcal{B}\}$$

найти оптимальное перемещение, для которого достигает минимума величина

$$\tau_r(\psi) = \int\limits_X\int\limits_X r(x,y)\psi(dx,dy).$$

Заметим, что в поставленной задаче множество $\Psi_{\varphi_1,\varphi_2}$ всегда не пусто. В него входит, например, функция

$$\psi(e,e') = \frac{\varphi_1(e)\varphi_2(e')}{\varphi_1(X)}, \quad e,e' \in \mathcal{B}.$$

Известно [I-6], что задача I.I всегда разрешима. Допустимое перемещение $\psi \in \Psi_{\varphi_1\varphi_2}$ в том и только в том случае является оптимальным, если найдется так называемая потенциальная функция $u: S = S_1 \cup S_2 \to R$, удовлетворяющая следующему условию.

I.I. При любых $x, y \in S$ выполняется неравенство

$$u(y) - u(x) \leq r(x,y), \tag{I.I}$$

причем

$$u(y) - u(x) = r(x,y), \tag{I.2}$$

если пара (x,y) принадлежит носителю $supp\,\psi$ перемещения ψ.

Обозначим через Φ_α, где $\alpha > 0$, множество всех определенных на $\mathcal{B}$ мер φ с компактными носителями, для которых $\varphi(X) = \alpha$. Неотрицательная функция

$$\rho_{\alpha,r}(\varphi_1,\varphi_2) = \min\{\tau_r(\psi) \mid \psi \in \Psi_{\varphi_1\varphi_2}\}, \quad \varphi_1,\varphi_2 \in \Phi_\alpha,$$

является метрикой на множестве Φ_α. Эту метрику принято называть метрикой Канторовича - Рубинштейна [3-6]. Заметим, что при любых $\alpha, \beta > 0$ имеют место равенства

$$\Phi_\alpha = \alpha\Phi_1 = \{\alpha\varphi \mid \varphi \in \Phi_1\}; \quad \Psi_{\varphi_1\varphi_2} = \alpha\Psi_{\frac{\varphi_1}{\alpha}\frac{\varphi_2}{\alpha}} = \{\alpha\psi \mid \psi \in \Psi_{\frac{\varphi_1}{\alpha}\frac{\varphi_2}{\alpha}}\},$$

$$\rho_{\alpha,\beta r}(\varphi_1,\varphi_2) = \alpha\beta\rho_{1,r}\left(\frac{\varphi_1}{\alpha}, \frac{\varphi_2}{\alpha}\right), \quad \varphi_1,\varphi_2 \in \Phi_\alpha.$$

Следовательно, исходные меры φ_1 и φ_2 в задаче I.I можно выбирать из множества Φ_1. Положим. $\rho_r = \rho_{1,r}$.

Допустим теперь, что для фигурирующих в задаче I.I мер φ_1 и φ_2 имеет место неравенство $\varphi_2(X) > \varphi_1(X) = 1$. В этом случае возникает следующая экстремальная задача.

ЗАДАЧА I.2. В множестве

$$\Phi_1^{\varphi_2} = \{\varphi \in \Phi_1 \mid \varphi(e) \leq \varphi_2(e),\ e \in \mathcal{B}\}$$

найти оптимальную меру, для которой достигает минимума величина

$$\varkappa_r(\varphi)=\rho_r(\varphi_1,\varphi).$$

В задаче I.2 всегда существует решение φ_2' [5], характеризующееся наличием перемещения $\psi\in\Psi_{\varphi_1\varphi_2'}$ и функции $u:S\to R$, для которых наряду с условием I.I выполняется следующее условие.

I.2. При любых $x\in supp\,\varphi_2'$ и $y\in supp(\varphi_2-\varphi_2')$ имеет место неравенство $u(x)\le u(y)$.

Задача I.2 является задачей наилучшего приближения меры φ_1 мерами из множества $\Phi_1^{\varphi_2}$ в метрике Канторовича - Рубинштейна. Положим

$$\rho_r(\varphi_1,\Phi_1^{\varphi_2})=\min\{\rho_r(\varphi_1,\varphi)\,|\,\varphi\in\Phi_1^{\varphi_2}\}.$$

§2. Необходимые сведения из внутренней геометрии

Рассмотрим конечномерное пространство R^n с евклидовой метрикой r_0. Кривой γ_{xy}, соединяющей точки x и y из R^n, назовем образ замкнутого отрезка $[a,b]\subset R$ при непрерывном отображении $\nu:[a,b]\to R^n$, для которого $\nu(a)=x$, $\nu(b)=y$. Отображение ν при этом называется параметризацией кривой γ_{xy}, точки x и y - концами кривой. Кривая γ_{xy} называется спрямляемой, если величина (длина кривой)

$$S_{r_0}(\gamma_{xy})=\sup\left\{\sum_{i=1}^{m}r_0(\nu(t_{i-1}),\nu(t_i))\,|\,a=t_0<t_1\ldots<t_m=b,\ m\in N\right\}$$

конечна.

Выделим в R^n некоторое множество X. Для точек x и y из X через Γ_{xy} обозначим множество спрямляемых кривых γ_{xy}, которые целиком лежат в X. Будем предполагать, что X является метрически связным, т.е. при любых x и y из X множество Γ_{xy} не пусто. Введем в рассмотрение функцию

$$r_X(x,y)=\inf\{S_{r_0}(\gamma_{xy})\,|\,\gamma_{xy}\in\Gamma_{xy}\},\ x,y\in X.$$

Эта функция удовлетворяет всем аксиомам метрики и называется внутренней метрикой множества X.

Новая метрика r_X позволяет измерять длины $S_{r_X}(\gamma_{xy})$ кривых γ_{xy}, лежащих в X. Такое измерение не приводит к новому результату. Оказывается, что $S_{r_X}(\gamma_{xy})=S_{r_0}(\gamma_{xy})$.

Кривая $\gamma_{xy}\in\Gamma_{xy}$ называется кратчайшей, если $S_{r_0}(\gamma_{xy})=$ $=r_X(x,y)$. Кратчайшую, соединяющую точки x и y, будем обозначать через $\widehat{xy}$. Заметим, что в произвольном метрически связном множестве $X \subset R^n$ не всякие две точки можно соединить кратчайшей. С другой стороны, может случиться, что две данные точки x и y из X можно соединить несколькими кратчайшими; в таком случае $\widehat{xy}$ будет обозначать любую из этих кратчайших, если только заранее не оговорено противное.

Из определения кратчайших вытекают следующие их свойства:

2.1. Всякий отрезок кратчайшей есть кратчайшая.

2.2. Для того чтобы кратчайшие $\widehat{xz}$ и $\widehat{zy}$ образовывали вместе кратчайшую $\widehat{xy}$, необходимо и достаточно, чтобы

$$r_X(x,z) + r_X(z,y) = r_X(x,y).$$

2.3. Кратчайшая гомеоморфна прямолинейному отрезку.

2.4. Если последовательность кратчайших сходится, то ее предел есть кратчайшая.

Введем так называемое [7,8] условие неналегания кратчайших: если две кратчайшие $\widehat{xy}$ и $\widehat{xz}$ совпадают на некотором отрезке $\widehat{xx_1}$, то одна из них содержится в другой. При условии неналегания для взаимного расположения двух кратчайших могут быть только следующие возможности: а) они не имеют общих точек; б) они имеют только одну общую точку; в) они имеют только две общие точки, и тогда эти точки суть их концы; г) одна из кратчайших содержится в другой; д) кратчайшие совпадают на некотором отрезке, одним концом которого является конец одной кратчайшей, а другим концом - конец другой кратчайшей.

Заметим, что если метрически связное множество M содержится в X, то для его внутренней метрики r_M справедливы неравенства

$$r_X(x,y) \le r_M(x,y), \quad x, y \in M. \tag{2.1}$$

Множество $M \subset X$ назовем выпуклым (в смысле метрики r_X), если любые две его точки можно соединить кратчайшей, целиком лежащей в M. Внутренняя метрика r_M выпуклого множества $M \subset X$, очевидно, удовлетворяет равенствам

$$r_X(x,y) = r_M(x,y), \quad x, y \in M. \tag{2.2}$$

Особую роль в геометрии играют так называемые двумерные многообразия с внутренней метрикой [7,8]. Выпуклые области в двумерном многообразии с внутренней метрикой при условии неналегания кратчайших обладают рядом свойств, аналогичных свойствам выпуклых областей на плоскости. Каждая точка двумерного многообразия с внутренней метрикой, в котором выполняется условие неналегания кратчайших, имеет сколь угодно малую окрестность в виде выпуклого многоугольника. Топологии такого многообразия, индуцированные евклидовой метрикой исходного пространства и внутренней метрикой многообразия, совпадают.

Нетривиальным примером двумерного многообразия с внутренней метрикой, в котором выполняется условие неналегания кратчайших, является выпуклая поверхность [7]. Другим примером такого многообразия может служить регулярная (дважды непрерывно дифференцируемая) поверхность [9]. Заметим, что внутренняя геометрия гладких (и тем более негладких) поверхностей обладает рядом особенностей. Одна из них заключается в том, что на таких поверхностях могут существовать точки, через которые не проходит никакая кратчайшая. Кроме того, на указанных поверхностях могут существовать точки, из которых в некоторых направлениях не исходят никакие кратчайшие [7].

Более подробно о свойствах внутренней метрики см. в [7-9].

§3. Функции Липшица

Пусть (X,r) - метрическое пространство и $Lip_1(X,r)$ - класс функций $u: X \to \mathbb{R}$, удовлетворяющих при любых x и y из X неравенству (I.I). Сразу заметим, что неравенство (I.I) из соображений симметрии равносильно неравенству $|u(y)-u(x)| \leq r(x,y)$. Приведем простейший пример функции из рассматриваемого класса.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.I. *Для любого непустого множества $M \subset X$ функция*

$$u(x) = r(x,M) = \inf\{r(x,y) \mid y \in M\}, \; x \in X,$$

принадлежит классу $Lip_1(X,r)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Выберем произвольно x и y из X. Тогда для каждого $z \in M$ имеем

$$u(y) = r(y,M) \leq r(y,z) \leq r(x,y) + r(x,z).$$

Отсюда

$$u(y) \leq r(x,y) + r(x,M) = r(x,y) + u(x),$$

т.е. имеет место неравенство (I.I). Предложение 3.I доказано.

Нетрудно видеть, что если функции u, u_0, u_1 принадлежат классу $Lip_1(X,r)$, то функции $v = au + b$ и $u_\lambda = (1-\lambda)u_0 + \lambda u_1$, где $a, b, \lambda \in \mathbb{R}$, $|a| \le 1$, $0 < \lambda < 1$, также принадлежат этому классу.

Пусть M – некоторое подмножество X. Сужение $r|_{M\times M}$ функции r на множество $M \times M$ является, естественно, метрикой на M. Соответствующее метрическое пространство в дальнейшем обозначается через (M,r). Если $u \in Lip_1(X,r)$, то сужение $v = u|_M$ функции u на множество M, очевидно, принадлежит $Lip_1(M,r)$. Верно и обратное утверждение [10,11].

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.2. *Если $v \in Lip_1(M,r)$, то найдется функция $u \in Lip_1(X,r)$, для которой $u|_M = v$.*

Выделим теперь метрически связное множество $X \subset \mathbb{R}^n$ с внутренней метрикой $r = r_X$. Заметим, что если метрически связное множество M содержится в X, то на основании неравенств (2.1) справедливо включение

$$Lip_1(M, r_X) \subset Lip_1(M, r_M).$$

Причем, если M выпукло (в смысле метрики r_X), то из равенств (2.2) вытекает, что

$$Lip_1(M, r_X) = Lip_1(M, r_M).$$

Если $u \in Lip_1(X, r_X)$, то, как уже отмечалось, $v = u|_M \in Lip_1(M,r_X)$ и тем более $v \in Lip_1(M, r_M)$. В общем случае, очевидно, не для любого $v \in Lip_1(M, r_M)$ можно найти функцию $u \in Lip_1(X, r_X)$, для которой $u|_M = v$. Однако, если M выпукло (в смысле метрики r_X), то каждая функция $v \in Lip_1(M, r_M)$ обладает указанным продолжением; это продолжение, вообще говоря, не однозначно.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.3. *Предположим, что выполнены следующие условия:* а) *множество X выпукло (в смысле метрики r_X);* б) *$X = X_1 \cup X_2$, где X_1 и X_2 – замкнутые подмножества пространства (X, r_X);* в) *$u_i \in Lip_1(X_i, r_X)$, $i = 1, 2$;* г) *$u_1(x) = u_2(x)$ при $x \in X_1 \cap X_2$. Тогда функция*

$$u(x)=\begin{cases} u_1(x), & x\in X_1, \\ u_2(x), & x\in X, \end{cases}$$

п р и н а д л е ж и т к л а с с у $Lip_1(X, r_X)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если x и y принадлежат одному из множеств X_1 или X_2, то неравенство (I.I), очевидно, выполняется. Пусть $x\in X_1\setminus X_2$, $y\in X_2\setminus X_1$. Из условия выпуклости множества X вытекает, что существует кратчайшая $\widehat{xy}$, целиком лежащая в X. Так как множество X_2 замкнуто, то множество $X_1\setminus X_2 = X\setminus X_2$ открыто в пространстве (X, r_X). Это означает, что в числовом промежутке $(0; r(x,y)]$ найдется такое ε, что любой отрезок $\widehat{xz}$ кратчайшей $\widehat{xy}$ при $r(x,z)<\varepsilon$ не имеет общих точек с X_2. Пусть ε_0 - наибольшее из чисел ε, удовлетворяющих этому условию. Выберем $x_0\in \widehat{xy}$, для которого $r(x,x_0)=\varepsilon_0$. Тогда в силу замкнутости множеств X_1 и X_2 точка x_0 принадлежит пересечению $X_1\cap X_2$. Следовательно, $u(x_0)=u_1(x_0)=u_2(x_0)$. Отсюда на основании свойств 2.I и 2.2 получаем

$$u(y)-u(x)=[u(y)-u(x_0)]+[u(x_0)-u(x)]=[u_2(y)-u_2(x_0)]+$$
$$+[u_1(x_0)-u_1(x)]\leq r_X(x_0,y)+r_X(x,x_0)=r_X(x,y).$$

Это завершает доказательство предложения 3.3.

Каждая функция $u\in Lip_1(X,r_X)$ порождает на X [II] частичный порядок: $x\leq^u y$ в том и только в том случае, когда для пары (x,y) имеет место равенство (I.2). Перечислим простейшие свойства введенного порядка.

3.I. Если $x\leq^u y$ и $\widehat{xy}$ - некоторая кратчайшая, то для любого $z\in\widehat{xy}$ справедливы неравенства $x\leq^u z\leq^u y$.

Действительно, всегда имеют место неравенства

$$u(z)-u(x)\leq r_X(x,z),\quad u(y)-u(z)\leq r_X(z,y).$$

С другой стороны, так как $z\in\widehat{xy}$, то из свойств 2.I и 2.2 вытекает равенство $r_X(x,y)=r_X(x,z)+r_X(z,y)$ и, следовательно,

$$[u(z)-u(x)]+[u(y)-u(z)]=u(y)-u(x)=r_X(x,y)=r_X(x,z)+r_X(z,y).$$

Это возможно в том и только в том случае, когда

$$u(z)-u(x)=r_X(x,z), \quad u(y)-u(z)=r_X(z,y).$$

3.2. Если $x \leq^u z \leq^u y$ и $\widehat{xz}, \widehat{zy}$ - некоторые кратчайшие, то $\widehat{xz} \cup \widehat{zy}$ является кратчайшей, соединяющей точки x и y. Действительно,

$$r_X(x,y)=u(y)-u(x)=[u(z)-u(x)]+$$
$$+[u(y)-u(z)]=r_X(x,z)+r_X(z,y).$$

На основании свойства 2.2 это и означает, что $\widehat{xz} \cup \widehat{zy}$ является кратчайшей, соединяющей точки x и y.

3.3. График отношения $\leq^u$ замкнут: если $x_k \leq^u y_k$ для всех $k \in N$ и $\lim\limits_{k\to\infty} r_X(x_k,x)=\lim\limits_{k\to\infty} r_X(y_k,y)=0$, то $x \leq^u y$.

Действительно,

$$u(y)-u(x)=\lim_{k\to\infty}[u(y_k)-u(x_k)]=\lim_{k\to\infty} r_X(x_k,y_k)=r_X(x,y).$$

3.4. Если $x <^u y$ $(y <^u x)$, $u(y)=c$, $r_X(x,y)=\varepsilon$, то $u^{-1}(c) \cap \cap B_{r_X}(x,\varepsilon)=\emptyset$, где $u^{-1}(c)=\{z \in X \mid u(z)=c\}$ - полный прообраз точки c, а $B_{r_X}(x,\varepsilon)=\{z \in X \mid r_X(x,z)<\varepsilon\}$ - открытый шар с центром x радиуса ε.

Действительно, для любого $z \in u^{-1}(c)$ имеем

$$r_X(x,z) \geq u(z)-u(x)=u(y)-u(x)=r_X(x,y)=\varepsilon,$$

т.е. $z \notin B_{r_X}(x,\varepsilon)$.

Предположим, что множество X выпукло (в смысле метрики r_X) и в нем выполняется условие неналегания кратчайших. В этом случае из свойств 2.I–2.4, 3.I–3.3 вытекает, что для каждой пары $x \leq^u y$ точек из X существует максимальное по включению линейно-упорядоченное множество, содержащее эти точки. Максимальные по включению линейно-упорядоченные множества, отвечающие функции $u \in Lip_1(X, r_X)$, назовем линиями тока этой функции. Из предыдущих рассуждений следует, что каждая линия тока является подмножеством X одного из следующих типов: а) точкой; б) замкнутым направленным отрезком кратчайшей; в) замкнутым направленным "лучом", т.е. множеством, изометричным промежутку $[0,+\infty)$; г) направленной "прямой", т.е.

множеством, изометричным вещественной прямой.

Для взаимного расположения двух линий тока могут быть следующие возможности: а) они не имеют общих точек; б) они имеют только одну общую точку и тогда эта точка наименьший (наибольший) элемент каждой из них; в) они имеют только две общие точки и тогда одна из этих точек является наименьшим, а другая - наибольшим элементом каждой из этих линий тока.

Пусть $M \subset X$ и $v \in Lip_1(M, r_X)$. Максимальные по включению линейно-упорядоченные множества, отвечающие функции v, естественно назвать линиями тока v. Как отмечалось в предложении 3.2, в $Lip_1(X, r_X)$ всегда найдется такая функция u, что $u|_M = v$. При этом, очевидно, каждая линия тока функции v является пересечением некоторой линии тока функции u с множеством M.

Рассмотрим теперь некоторое метрически связное множество $Y \subset \mathbb{R}^m$ с внутренней метрикой r_Y. Предположим, что пространства (X, r_X) и (Y, r_Y) изометричны и пусть $f: X \to Y$ - некоторая изометрия. Тогда, как легко видеть, класс $Lip_1(X, r_X)$ состоит из функций u вида $v \circ f$, где $v \in Lip_1(Y, r_Y)$. Кроме того,

$$x \overset{u}{\leq} y \iff f(x) \overset{v}{\leq} f(y).$$

Следовательно, линии тока функции $u \in Lip_1(X, r_X)$ переходят при отображении f в линии тока соответствующей функции $v = u \circ f^{-1} \in Lip_1(Y, r_Y)$.

§4. Восстановление функций Липшица по линиям тока

Проблема восстановления функций Липшица по линиям тока представляет самостоятельный интерес и тесно связана с построением так называемых максимальных функций Липшица (см. [11], а также [12,13]). Для задачи оптимального перемещения массы эта проблема, кроме того, имеет и прикладное значение [10,14,15].

Пусть M - открытое выпуклое (в смысле метрики $r = r_X$) подмножество X. Рассмотрим в X семейство $\mathcal{L}_M$ кривых ℓ удовлетворяющих условиям:

4.1. Каждая кривая $\ell \in \mathcal{L}_M$ разбивает замыкание $\overline{M}$ множества M на две компоненты.

4.2. Через каждую точку $x \in M$ проходит единственная кривая $\ell = \ell_x \in \mathcal{L}_M$.

4.3. Если $x, y \in \ell \cap M$, то отрезок кривой ℓ, соединяющий точки x и y, является кратчайшей.

4.4. На каждой кривой $\ell \in \mathcal{L}_M$ выбрано направление $\overset{\ell}{\leq}$ таким образом, что если $x_k, y_k, x, y \in M, y_k \in \ell x_k, x_k \overset{\ell x_k}{\leq} y_k$ при всех $k \in N$ и $\lim\limits_{k\to\infty} r_X(x_k, x) = \lim\limits_{k\to\infty} r_Y(y_k, y) = 0$, то $x \overset{\ell x}{\leq} y$.

ТЕОРЕМА 4.I. Если открытое выпуклое (в смысле метрики r_X) множество $M \subset X$ изометрично некоторой регулярной (дважды непрерывно дифференцируемой) поверхности $\Phi \subset R^3$ с внутренней метрикой r_φ, то для любого семейства $\mathcal{L}_M$ кривых в X, удовлетворяющих условиям 4.I-4.4, найдется функция $u \in \in Lip_1(\bar{M}, r_X)$, для которой замкнутые линейно-упорядоченные множества $d_\ell = \ell \cap \bar{M}, \ell \in \mathcal{L}_M$, являются линиями тока.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $f : M \to \Phi$ - некоторая изометрия:

$$r_X(x,y) = r_M(x,y) = r_\varphi(f(x), f(y)), \; x, y \in M.$$

На множествах $h^\ell = f(\ell \cap M), \ell \in \mathcal{L}_M$, введем порядок $\overset{h^\ell}{\leq}$, полагая

$$f(x) \overset{h^\ell}{\leq} f(y) \Leftrightarrow x \overset{\ell}{\leq} y, \; \ell \in \mathcal{L}_M, \; x, y \in \ell \cap M.$$

Построим сначала функцию $v \in Lip_1(\Phi, r_\varphi)$, для которой линейно-упорядоченные множества $h^\ell, \ell \in \mathcal{L}_M$, являются линиями тока.

Заметим, что если через точку p поверхности Φ по всевозможным направлениям провести геодезические (локально кратчайшие) линии и отложить на них, начиная от точки p, дуги равной длины, то концы этих дуг образуют так называемую геодезическую окружность, которая ортогональна этим геодезическим [9]. На основании свойства 3.4 это означает, что линии уровня функции v должны быть ортогональны соответствующим кривым $h^\ell, \ell \in \mathcal{L}_M$.

Зафиксируем произвольно точку $p_0 \in \Phi$. Из условий 4.I-4.3 вытекает (см. [9]), что через эту точку проходит некоторая элементарная гладкая кривая γ, ортогональная кривым h^l, $l \in \mathcal{L}_y$. Пусть $\Gamma = \bigcup_{p\in\gamma} h_p$, где через h_p обозначена кривая h^l, содержащая точку p. Так как на поверхности φ выполняется условие неналегания кратчайших, то Γ - выпуклое (в смысле метрики r_φ) множество. Кривая γ разбивает множество Γ на две связные компоненты Γ_1 и Γ_2 такие, что

$$\Gamma_1 \cup \Gamma_2 = \Gamma;\ \Gamma_1 \cap \Gamma_2 = \gamma;\ p \in \Gamma_1,\ q \in h_p \cap \Gamma_2 \Rightarrow p \leq^{h_p} q,$$

причем последняя импликация возможна благодаря условию 4.4. Положим

$$v(p) = (-1)^i r_\varphi(p, \gamma),\ p \in \Gamma_i,\ i = 1, 2.$$

Из предложений 3.I и 3.3 следует, что $v \in Lip_1(\Gamma, r_\varphi)$.

Проверим, что линейно-упорядоченные множества h_p, $p \in \gamma$, являются линиями тока функции v. Прежде всего покажем, что если $p \in \gamma$, $q \in h_p$ и

$$r_\varphi(q, p) < \sup\{r_\varphi(q, p') \mid p' \in \gamma\}, \tag{4.I}$$

то

$$r_\varphi(q, p) = r_\varphi(q, \gamma). \tag{4.2}$$

Действительно, предположим, что $r_\varphi(q,p) > r_\varphi(q,\gamma)$. Тогда на основании неравенства (4.I) существует точка $p_1 \in \gamma \setminus \{p\}$, для которой $r_\varphi(q, p_1) = r_\varphi(q, \gamma)$. Значит, кратчайшая $p_1 q$ ортогональна кривой γ. С другой стороны, кривая h_{p_1} также ортогональна кривой γ. Таким образом, из точки q в одном и том же направлении выходят две кратчайшие, а это противоречит условию неналегания кратчайших. Следовательно, равенство (4.2) справедливо.

Обозначим

$$h_p^\varepsilon = \{q \in h_p \mid r_\varphi(q, p) \leq \varepsilon\},\ \varepsilon > 0,\ p \in \gamma.$$

Нетрудно видеть, что $h_p^{\varepsilon_1} \subset h_p^{\varepsilon_2}$ при $\varepsilon_1 < \varepsilon_2$ и $h_p = \bigcup_{\varepsilon>0} h_p^\varepsilon, p \in \gamma$.
Выберем теперь произвольно точки $p_1, p_2 \in \gamma$, $p_1 \neq p_2$, и пусть $\gamma_{p_1 p_2}$ - дуга кривой γ, соединяющая p_1 и p_2. Из предыдущего замечания вытекает, что найдется такое $\varepsilon_0 > 0$, для которого направленные кривые $h_p^{\varepsilon_0}$, $p \in \gamma_{p_1 p_2}$, являются отрезками линий тока функции v. Более того, если кривые $h_p^{\varepsilon_1}, p \in \gamma_{p_1 p_2}$, являются отрезками линий тока функции v, то при некотором

$\varepsilon_2 > \varepsilon_1$ таковыми будут и кривые $h_p^{\varepsilon_2}$, $p \in \gamma_{p_1 p_2}$. Далее, из свойства 3.3 вытекает, что если при любом $\varepsilon < \varepsilon_3$ кривые h_p^{ε}, $p \in \gamma_{p_1 p_2}$, являются отрезками линий тока функции v, то таковыми будут и кривые $h_p^{\varepsilon_3}$, $p \in \gamma_{p_1 p_2}$. Из приведенных свойств кривых h_p^{ε}, $p \in \gamma_{p_1 p_2}$, следует, что линейно-упорядоченные множества h_p, $p \in \gamma_{p_1 p_2}$, являются линиями тока v, а так как точки $p_1, p_2 \in \gamma$ выбраны произвольно, то таковыми являются все множества h_p, $p \in \gamma$.

Итак, функция v определена на выпуклом множестве Γ, которое, вообще говоря, не совпадает с Φ. Схема продолжения функции v на множество Φ следующая. Предположим, что v определена на выпуклом множестве $F \subset \Phi$, которое вместе с каждой своей точкой p содержит кривую h_p, причем $F \neq \Phi$. Если F не является замкнутым в пространстве (Φ, r_φ), то на его замыкание $\bar{F}$ функция v продолжается "по непрерывности". Предположим теперь, что F – замкнутое множество. Выберем точку $q_0 \in \Phi$, которая является граничной для F. Тогда, как и выше, из q_0 выходит некоторая гладкая кривая γ', расположенная в $\overline{\Phi \setminus F}$ и ортогональная кривым h^ℓ, $\ell \in \mathcal{D}_M$. Рассмотрим выпуклое множество $\Gamma' = \bigcup_{p \in \gamma'} h_p$. Кривая γ' разбивает множество Γ' на две связные компоненты Γ_1' и Γ_2' такие, что

$$\Gamma_1' \cup \Gamma_2' = \Gamma';\ \Gamma_1' \cap \Gamma_2' = \gamma';\ p \in \Gamma_1',\ q \in h_p \cap \Gamma_2' \Longrightarrow p \overset{h_p}{\leq} q.$$

Так как точка q_0 принадлежит множеству F, то значение $v(q_0)$ определено. Положим

$$v(p) = v(q_0) + (-1)^i r_\varphi(p, \gamma'),\ p \in \Gamma_i',\ i = 1, 2.$$

Как и выше, сужение $v|_{\Gamma'}$ функции v на множество Γ' принадлежит классу $Lip_1(\Gamma', r_\varphi)$ и линейно-упорядоченные множества h_p, $p \in \gamma'$, являются ее линиями тока. Кроме того, множество $F \cup \Gamma'$ выпукло (в смысле метрики r_φ), а множества F и Γ' замкнуты в пространстве $(F \cup \Gamma', r_\varphi)$. Следовательно, по предложению 3.3 функция v принадлежит классу $Lip_1(F \cup \Gamma', r_\varphi)$. Указанным способом, очевидно, функция v может быть продолжена на все множество Φ.

Определим теперь функцию $u : M \to \mathbb{R}$, полагая $u(x) = v(\varphi(x))$, $x \in M$. Тогда, очевидно, имеют место соотношения

$$u(y)-u(x)=v(f(y))-v(f(x))\leq r_{\varphi}(f(x),f(y))=r_X(x,y),\ x,y\in M;$$

$$u(y)-u(x)=r_X(x,y)\iff v(f(y))-v(f(x))=r_{\varphi}(f(x),f(y)).$$

На замыкание $\overline{M}$ множества M функция u продолжается "по непрерывности". В силу построений $u\in Lip_1(\overline{M},r_X)$ и, кроме того, замкнутые линейно-упорядоченные множества $d_\ell=\ell\cap\overline{M}$, $\ell\in\mathcal{L}_M$, являются линиями тока функции u. Теорема 4.I доказана.

Заметим, что из условия 4.I вытекает следующее условие:

4.I.I. Множество M не содержит концов кривых $\ell\in\mathcal{L}_M$. Условие 4.I.I не равносильно условию 4.I. На регулярных поверхностях могут существовать выпуклые (в смысле внутренней метрики) множества M и семейства кривых $\mathcal{L}_M$, удовлетворяющие условию 4.I.I и не удовлетворяющие условию 4.I. Для таких семейств $\mathcal{L}_M$ теорема 4.I, вообще говоря, не имеет места. Чтобы убедиться в этом, рассмотрим следующий пример. Пусть

$$X=\{(\xi,\eta,\zeta)\in\mathbb{R}^3\,|\,\xi^2+\eta^2=1,\ \zeta\in\mathbb{R}\}.$$

Зафиксируем в X однопараметрическое семейство $\mathcal{L}=\{\ell^\alpha|0\leq\alpha\leq 2\pi\}$ винтовых линий:

$$\xi=\cos(t+\alpha),\ \eta=\sin(t+\alpha),\ \zeta=t;\ t\in\mathbb{R}.$$

На каждой линии $\ell\in\mathcal{L}$ введем порядок, полагая

$$(\xi_1,\eta_1,\zeta_1)\leq^{\ell}(\xi_2,\eta_2,\zeta_2)\iff\zeta_1\leq\zeta_2.$$

Линии $\ell\in\mathcal{L}$ являются в X геодезическими. Зафиксируем число $t_0\in(0,\pi)$. Тогда при $t\in[0,t_0]$ соответствующие отрезки d_ℓ линий $\ell\in\mathcal{L}$ являются кратчайшими в X. Выделим теперь в X подмножество

$$M=\{(\xi,\eta,\zeta)\in X\,|\,0<\zeta<t_0\},$$

которое, очевидно, является открытым и выпуклым (в смысле метрики r_X). Семейство $\mathcal{L}_M=\mathcal{L}$ направленных винтовых линий удовлетворяет условию 4.I.I 4.2–4.4 и не удовлетворяет условию 4.I. Покажем, что замкнутые направленные отрезки d_ℓ, $\ell\in\mathcal{L}$, не могут служить линиями тока никакой функции $u\in Lip_1(\overline{M},r_X)$. Действительно, рассмотрим ортогональное семейство $\mathcal{L}^\perp=\{\ell^{\perp\beta}|0\leq\beta<2\pi\}$ винтовых линий:

$$\xi = \cos(s+\beta),\ \eta = \sin(s+\beta),\ \zeta = -s;\ s \in \mathbb{R}.$$

Если предположить, что нашлась функция $u \in Lip_1(\bar{M}, r_X)$, для которой замкнутые направленные отрезки $d_\ell = \ell \cap \bar{M},\ \ell \in \mathcal{L}$, являются линиями тока, то отрезки $d_{\ell^\perp} = \ell^\perp \cap \bar{M},\ \ell^\perp \in \mathcal{L}^\perp$, должны быть ее линиями уровня. Выберем произвольно точку $x_0 = (\xi_0, \eta_0, 0) \in \bar{M}$ и рассмотрим две последовательности: $\{\widehat{x_i y_i} \mid i = 0,1,2,\ldots\}$ – линий тока и $\{\widehat{y_i x_{i+1}} \mid i = 0,1,2,\ldots\}$ – линий уровня функции u. Пусть i_0 – наименьший номер, для которого линия уровня $\widehat{y_{i_0} x_{i_0+1}}$ пересекает линию тока $\widehat{x_0 y_0}$ в некоторой точке $z_0 \neq y_0$. Так как все линии тока имеют одну и ту же длину, равную $\sqrt{2}\, t_0$, то $u(y_{i_0}) = u(x_0) + (i_0+1)\sqrt{2}\, t_0$. Следовательно,

$$u(z_0) - u(x_0) = u(y_{i_0}) - u(x_0) =$$
$$= (i_0+1)\sqrt{2}\, t_0 \geq 2t_0 = r_X(x_0, y_0) > r_X(x_0, z_0),$$

что противоречит неравенству (I.I).

Теорема 4.I, как нетрудно видеть, является обобщением предложения 8 из статьи [I0]. Чтобы в этом убедиться, достаточно в качестве X выбрать плоскость $\mathbb{R}^2$ с евклидовой метрикой r_0.

Теорема 4.I в сочетании с предложением 3.3 может быть применена для построения функций Липшица на кусочно-регулярных поверхностях (в частности, на многогранных поверхностях).

§5. Потенциальные функции и оптимальные перемещения

В этом параграфе мы покажем, как по линиям тока потенциальной функции можно строить оптимальные перемещения массы в задаче I.I.

Прежде всего заметим, что исходные распределения массы φ_i в сепарабельном метрическом пространстве X удовлетворяют равенствам $\varphi_i(X \setminus S_i) = 0$, т.е.

$$\varphi_i(e) = \varphi_i(e \cap S_i),\ e \in \mathcal{B},\ i = 1,2.$$

Это означает, что носитель $supp\,\psi$ любого допустимого перемещения $\psi \in \Psi_{\varphi_1 \varphi_2}$ содержится в произведении $S_1 \times S_2$ и, следовательно,

$$\psi(e,e')=\psi(e\cap S_1, e'\cap S_2),\ e,e'\in\mathcal{B}.$$

Кроме того, для каждого $x\in S_1$ (или $y\in S_2$) всегда найдется такой $y\in S_2$ (соответственно $x\in S_1$), что $(x,y)\in supp\,\psi$. Далее, если перемещения ψ_0 и ψ_1 принадлежат множеству $\Psi_{\varphi_1\varphi_2}$, то при любом $\lambda\in(0,1)$ перемещение $\psi_\lambda=(1-\lambda)\psi_0+\lambda\psi_1$ также принадлежит этому множеству; при этом $supp\,\psi_\lambda=supp\,\psi_0\cup supp\,\psi_1$. Оптимальные перемещения в задаче I.I определяются, вообще говоря, неоднозначно. Если $\psi_0,\psi_1\in\Psi_{\varphi_1\varphi_2}$ – оптимальные перемещения, то таковым является и ψ_λ, $\lambda\in(0,1)$. На основании предложения 3.2 потенциальные функции в задаче I.I можно считать заданными на всем пространстве X.

Зафиксируем некоторые борелевские множества $M_i\subset S_i, i=1,2,$ и пусть f – борелевское отображение с областью определения M_1 и областью значений M_2. Рассмотрим σ-аддитивную по каждому аргументу функцию

$$\psi_f(e,e')=\varphi_1(e\cap f^{-1}(e'\cap M_2)),\ e,e'\in\mathcal{B}. \tag{5.I}$$

Носитель $supp\,\psi_f$ перемещения ψ_f, как нетрудно проверить, содержится в замыкании $\bar G_f$ графика $G_f\subset X^2$ отображения f. Действительно, если $(x,y)\in supp\,\psi_f$, то $x\in S_1$, $y\in S_2$ и для любых окрестностей e_x и e_y точек x и y справедливо неравенство

$$\psi_f(e_x,e_y)=\varphi_1(e_x\cap f^{-1}(e_y\cap M_2))>0.$$

Из этого неравенства, в частности, вытекает, что $e_x\cap f^{-1}(e_y\cap \cap M_2)\neq\emptyset$, т.е. найдется точка $z\in e_x\cap M_1$, для которой $f(z)\in e_y\cap M_2$.

Заметим, что для функции (5.I) имеют место равенства

$$\psi_f(e,X)=\varphi_1(e\cap f^{-1}(M_2))=\varphi_1(e\cap M_1),\ \psi_f(X,e)=\varphi_1(f^{-1}(e\cap M_2)),e\in\mathcal{B}.$$

Следовательно, ψ_f принадлежит допустимому множеству $\Psi_{\varphi_1\varphi_2}$ в том и только в том случае, когда

$$\varphi_1(e)=\varphi_1(e\cap M_1),\ e\in\mathcal{B}; \tag{5.2}$$

$$\varphi_2(e)=\varphi_1(f^{-1}(e\cap M_2)),e\in\mathcal{B}. \tag{5.3}$$

Из равенства (5.3), как нетрудно видеть, вытекает

$$\varphi_2(e) = \varphi_2(e \cap M_2),\ e \in \mathcal{B}. \qquad (5.4)$$

На основании равенств (5.2) и (5.4) можно сделать заключение, что $S_i = \overline{M}_i,\ i=1,2$. Если, кроме того, найдется функция $u \in Lip_1(X, r)$, для которой

$$x \leq^u f(x),\ x \in M_1, \qquad (5.5)$$

то в силу свойства 3.3 и условия оптимальности I.I допустимое перемещение ψ_f будет оптимальным в задаче I.I.

Предположим теперь, что f обладает обратным борелевским отображением. f^{-1}. При выполнении равенств (5.2) и (5.4) условие (5.5) равносильно условию

$$\varphi_1(e) = \varphi_2(f(e \cap M_1)),\ e \in \mathcal{B}. \qquad (5.6)$$

Из условия (5.6), в свою очередь, вытекают равенства

$$\psi_f(e, e') = \varphi_2(f(e \cap M_1) \cap e'),\ e, e' \in \mathcal{B}. \qquad (5.7)$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5.I. *Пусть открытые множества* $M_i \subset S_i,\ i=1,2$, *и топологическое отображение* $f: M_1 \to M_2$ *удовлетворяют равенствам* (5.4) *и* (5.6). *Тогда*

$$supp\,\psi_f = \overline{G}_f, \qquad (5.8)$$

$$\mathcal{T}_r(\psi_f) = \int_{M_1} r(x, f(x))\,\varphi_1(dx). \qquad (5.9)$$

При этом перемещение (5.7) *является оптимальным в задаче* I.I *в том и только в том случае, когда найдется функция* $u \in Lip_1(X, r)$, *для которой справедливы неравенства* (5.5).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Как отмечалось выше, $supp\,\psi_f \subset \overline{G}_f$. С другой стороны, так как f – топологическое отображение, то для любого $x \in M_1$ и любых окрестностей $e_x \subset M_1$ и $e_{f(x)} \subset M_2$ точек x и $f(x)$ множество $f(e_x) \cap e_{f(x)}$ является окрестностью точки $f(x) \in M_2 \subset S_2$, т.е.

$$\psi_f(e_x, e_{f(x)}) = \varphi_2(f(e_x) \cap e_{f(x)}) > 0.$$

Это означает, что $G_f \subseteq supp\,\psi_f$, а так как множество $supp\,\psi_f$ замкнуто в X^2, то $\overline{G}_f \subset supp\,\psi_f$. Следовательно, равенство (5.8) справедливо.

Для доказательства равенства (5.9) представим M_1 в виде объединения возрастающей по включению последовательности компактных множеств $B_k, k\in N$. Тогда M_2 является объединением возрастающей по включению последовательности компактных множеств $f(B_k), k\in N$. При этом

$$\varphi_1(S_1)=\varphi_1(M_1)=\lim_{k\to\infty}\varphi_1(B_k),$$

$$\varphi_2(S_2)=\varphi_2(M_2)=\lim_{k\to\infty}\varphi_2(f(B_k)).$$

Следовательно,

$$\int_{M_1} r(x,f(x))\varphi_1(dx)=\lim_{k\to\infty}\int_{B_k} r(x,f(x))\varphi_1(dx),$$
$$\tau_r(\psi_f)=\lim_{k\to\infty}\iint_{B_k\times f(B_k)} r(x,y)\,\psi_f(dx,dy). \tag{5.10}$$

Пусть теперь $\{e_i^k\mid i=1,\dots,m\}$ - некоторое разбиение множества B_k, т.е.

$$e_i\in\mathcal{B},\ i=1,\dots,m;\ \bigcup_{i=1}^m e_i^k=B_k;\ e_i^k\cap e_j^k=\emptyset,\ i\neq j.$$

Так как f - топологическое отображение, то $\{f(e_i^k)\mid i=1,\dots,m\}$ - разбиение множества $f(B_k)$. Отсюда

$$\psi_f(e_i^k,f(e_j^k))=\varphi_2(f(e_i^k)\cap f(e_j^k))=\varphi_2(\emptyset)=0,\ i\neq j;$$

$$\psi_f(e_i^k,f(e_i^k))=\varphi_2(f(e_i^k)\cap f(e_i^k))=\varphi_2(f(e_i^k))=\varphi_1(e_i^k),\ i=1,\dots,m.$$

Выберем произвольно точки $x_i^k\in e_i^k, i=1,\dots,m$. Тогда $f(x_i^k)\in f(e_i^k), i=1,\dots,m$, и

$$\sum_{i,j=1}^m r(x_i^k,f(x_j^k))\,\psi_f(e_i^k,f(e_j^k))=\sum_{i=1}^m r(x_i^k,f(x_i^k))\,\psi_f(e_i^k,f(e_i^k))=$$
$$=\sum_{i=1}^m r(x_i^k,f(x_i^k))\,\varphi_1(e_i^k).$$

Отображение f равномерно непрерывно на B_k. Значит, для всякого $\varepsilon>0$ можно указать такое $\delta_k>0$, что при $diam\, e_i^k<\delta_k, i=1,\dots,m$, справедливы неравенства $diam\, f(e_i^k)<\varepsilon, i=1,\dots,m$, где $diam\, e=\sup\{r(x,y)\mid x,y\in e\}$ - диаметр множества e. Следовательно,

$$\iint\limits_{B_k\, f(B_k)} r(x,y)\psi_f(dx,dy) = \int\limits_{B_k} r(x,f(x))\varphi_1(dx). \qquad (5.11)$$

Из равенств (5.10) и (5.11) вытекает равенство (5.9).

Приведенный выше критерий оптимальности перемещения ψ_f является простым следствием условия оптимальности 1.1, свойства 3.3, неравенств (5.5) и равенства (5.8). Предложение 5.1 доказано.

Отождествим в дальнейшем множество X с некоторой регулярной выпуклой (в смысле метрики $r = r_X$) поверхностью в R^3. Пусть компактные множества $S_i \subset X$ совпадают с замыканием множеств $M_i = \operatorname{int} S_i$ своих внутренних точек, $i=1,2$. Предположим, что для площадей $\mu(M_i)$ множеств M_i, $i=1,2$, справедливы равенства $\mu(M_1) = \mu(M_2) = 1$. (Определение и свойства площади поверхности см. в [7,9].) Рассмотрим задачу 1.1 с исходными распределениями массы

$$\varphi_i(e) = \mu(e \cap M_i),\ e \in \mathcal{B},\ i=1,2. \qquad (5.12)$$

В рассматриваемом случае, очевидно, $\operatorname{supp}\varphi_i = S_i, i=1,2$. Зафиксируем некоторое оптимальное перемещение $\psi \in \Psi_{\varphi_1\varphi_2}$ и отвечающую ему потенциальную функцию $u \in Lip_1(X, r_X)$. Из условия оптимальности 1.1 вытекает, что функция u должна обладать, в частности, следующим свойством: для каждого $x \in S_1$ (или $y \in S_2$) найдется такой $y \in S_2$ (соответственно $x \in S_1$), что $x \leq^u y$. Предположим, что функция u удовлетворяет более сильному условию:

5.1. Для каждого $y \in M = M_1 \cup M_2$ найдутся такие $x \in M_1 \setminus \{y\}$, $z \in M_2 \setminus \{y\}$, что $x \leq^u y \leq^u z$.

Из этого условия следует, что через каждую точку $x \in M$ проходит единственная линия тока l_x функции u. Линии l_x, $x \in M$, пересекают множества M_1 и M_2, причем M не содержит их концов. Так как u является потенциальной функцией перемещения ψ, то в этом случае должно выполняться следующее условие:

5.2. Для любого множества $L \in \mathcal{B}$, которое является объединением некоторого семейства линий тока функции u, справедливо равенство $\varphi_1(L) = \varphi_2(L)$.

Наложим на функцию u еще одно дополнительное условие:

5.3. Если $x \in M_i$, $y \in S_i$ и $x \leq^u y$ (или $y \leq^u x$), то кратчайшая $\widehat{xy}$ содержится в множестве $M_i \cup \{y\}, i=1,2.$

ТЕОРЕМА 5.I. Пусть некоторая функция $u \in Lip_1(X, r_X)$ удовлетворяет условиям 5.I-5.3. Тогда найдется топологическое отображение $f: M_1 \longrightarrow M_2$, для которого справедливы соотношения (5.5) и (5.6).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим множество $\widetilde{M}$, которое состоит из точек, принадлежащих кратчайшим $\widehat{xy}$, где $x \in M_1$, $y \in M_2, x \overset{u}{\leq} y$. Из условий 2.I, 2.4, 5.I и условия неналегания кратчайших вытекает, что $\widetilde{M}$ является открытым подмножеством X. Выделим в $\widetilde{M}$ некоторую компоненту связности K. Введем в K полугеодезическую систему координат $x=\omega(\xi,\eta), (\xi,\eta)\in U \subset \mathbb{R}^2,$ в которой координатные линии $\xi = const$ совпадают с линиями тока функции $v = u|_K$, а координатные линии $\eta = const$ - с линиями уровня функции v. В этой системе координат первая квадратичная форма поверхности (см. [9]) имеет вид

$$I(\xi,\eta,d\xi,d\eta) = G(\xi,\eta)d\xi^2 + d\eta^2,$$

где $G(\xi,\eta) > 0, (\xi,\eta) \in U$. Выберем произвольную точку $x_0 = \omega(\xi_0, \eta_0) \in M_1$. На основании условий 5.I и 5.3 линия тока ℓ_{x_0} пересекает границу каждого из множеств $M_i, i=1,2$, в двух точках. Пусть координаты $\eta_1(\xi_0) < \eta_2(\xi_0)$ и $\eta_3(\xi_0) < \eta_4(\xi_0)$ соответствуют точкам пересечения линии ℓ_{x_0} с границами множеств M_1 и M_2. Тогда, очевидно, $\eta_1(\xi_0) \leq \eta_3(\xi_0)$ и $\eta_2(\xi_0) \leq \eta_4(\xi_0)$. При этом из условия 5.2 вытекает равенство

$$\int_{\eta_1(\xi_0)}^{\eta_2(\xi_0)} \sqrt{G(\xi_0,\eta)}\,d\eta = \int_{\eta_3(\xi_0)}^{\eta_4(\xi_0)} \sqrt{G(\xi_0,\eta)}\,d\eta,$$

где соответствующие интегралы понимаются как несобственные. Следовательно, при фиксированном $\eta_0 \in (\eta_1(\xi_0), \eta_2(\xi_0))$ уравнение

$$\int_{\eta_1(\xi_0)}^{\eta_0} \sqrt{G(\xi_0,\eta)}\,d\eta = \int_{\eta_3(\xi_0)}^{\zeta} \sqrt{G(\xi_0,\eta)}\,d\eta \qquad (5.13)$$

имеет единственное решение $\zeta_0 = \zeta_0(\xi_0, \eta_0) \in (\eta_3(\xi_0), \eta_4(\xi_0))$, причем $\eta_0 \le \zeta_0$. Точке $x_0 = \omega(\xi_0, \eta_0) \in M_1$ поставим в соответствие точку $y_0 = f(x_0) = \omega(\xi_0, \zeta_0) \in M_2$.

Заметим, что построенное таким способом отображение $f: M_1 \to M_2$ является взаимно-однозначным и удовлетворяет неравенствам (5.5). Кроме того, так как функция

$$\delta(\xi, \eta_1, \eta_2) = \int_{\eta_1}^{\eta_2} \sqrt{G(\xi,\eta)}\, d\eta$$

непрерывна по совокупности переменных, то f – топологическое отображение. Для доказательства равенств (5.6) рассмотрим множества вида

$$\Delta = \Delta(\xi_0, \xi_1, \eta_0) = \{x = \omega(\xi,\eta) \in M_1 \cap K \mid \xi_0 \le \xi \le \xi_1, \eta \le \eta_0\},$$

где $\xi_0 < \xi_1$ и $\eta_0 \in (\eta_1(\xi), \eta_2(\xi))$ при всех $\xi \in [\xi_0, \xi_1]$. Для этих множеств на основании (5.13) имеем

$$\mu(\Delta(\xi_0,\xi_1,\eta_0)) = \iint_{\omega^{-1}(\Delta)} \sqrt{G(\xi,\eta)}\, d\xi\, d\eta = \int_{\xi_0}^{\xi_1} \Big(\int_{\eta_1(\xi)}^{\eta_0} \sqrt{G(\xi,\eta)}\, d\eta \Big) d\xi =$$

$$= \int_{\xi_0}^{\xi_1} \Big(\int_{\eta_3(\xi)}^{\zeta_0(\xi,\eta_0)} \sqrt{G(\xi,\eta)}\, d\eta \Big) d\xi = \iint_{\omega^{-1}(f(\Delta))} \sqrt{G(\xi,\eta)}\, d\xi\, d\eta = \mu(f(\Delta(\xi_0,\xi_1,\eta_0))).$$

Следовательно, для множеств $\Delta(\xi_0,\xi_1,\eta_0) \subset M_1 \cap K$ равенства (5.6) справедливы. Это означает, что они справедливы и для множеств вида

$$\tilde{\Delta}(\xi_0,\xi_1,\eta_0,\eta_1) = \{x = \omega(\xi,\eta) \in M_1 \cap K \mid \xi_0 \le \xi \le \xi_1,\ \eta_0 \le \eta \le \eta_1\}.$$

Отсюда вытекает, что равенства (5.6) имеют место для любых борелевских множеств. Теорема 5.I доказана.

Заметим, что топологическое отображение $f: M_1 \to M_2$, удовлетворяющее соотношениям (5.5) и (5.6), вообще говоря, не единственно. Чтобы в этом убедиться, достаточно рассмотреть случай, когда при любом $x = \omega(\xi_0, \eta_0) \in M_1$ координаты точек пересечения линии ℓ_{x_0} с границами множеств M_1 и M_2 удовлетворяют неравенствам $\eta_1(\xi_0) < \eta_2(\xi_0) \le \eta_3(\xi_0) < \eta_4(\xi_0)$, и вместо уравнения (5.13) выбрать уравнение

$$\int_{\eta_0}^{\eta_2(\xi_0)} \sqrt{G(\xi_0,\eta)}\,d\eta = \int_{\eta_3(\xi_0)}^{\zeta_0} \sqrt{G(\xi_0,\eta)}\,d\eta .$$

Теоремы 4.1 и 5.1 в сочетании с предложениями 3.3 и 5.1 могут быть применены для построения оптимальных перемещений массы в задачах 1.1 и 1.2 на кусочно-регулярных поверхностях (в частности, на многогранных поверхностях).

§6. Простейшие примеры

Рассмотрим сначала примеры оптимального перемещения массы на сфере

$$X = \{x = (\xi,\eta,\zeta) \in \mathbb{R}^3 \mid \xi^2+\eta^2+\zeta^2 = R^2\}$$

с центром в нуле радиуса $R \geq \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$ = 0,398942. Как хорошо известно (см., например, [9]), кратчайшей , соединяющей две точки сферы $x=(\xi_1,\eta_1,\zeta_1)$ и $y=(\xi_2,\eta_2,\zeta_2)$, является малая дуга $\widehat{xy}$ большой окружности, проходящей через эти точки. Следовательно, внутреннее расстояние на сфере между указанными точками определяется по формуле

$$r_X(x,y) = R\cdot \arccos\left(\frac{\xi_1\xi_2+\eta_1\eta_2+\zeta_1\zeta_2}{R^2}\right). \qquad (6.1)$$

Введем в X сферические координаты:

$$x = x(\alpha,\beta) = (R\sin\beta\cos\alpha,\ R\sin\beta\sin\alpha,\ R\cos\beta),\ 0\leq\alpha\leq 2\pi,\ 0\leq\beta\leq\pi .$$

Коэффициенты первой квадратичной формы в этой системе координат имеют вид

$$E = x_\alpha^2 = R^2\sin^2\beta,\quad F = x_\alpha x_\beta = 0,\quad G = x_\beta^2 = R^2.$$

Следовательно,

$$\mu(dx) = \sqrt{EG-F^2}\,d\alpha\, d\beta = R^2\sin\beta\, d\alpha\, d\beta .$$

Заметим, что для точек $x = x(\alpha,\beta_1)$ и $y = x(\alpha,\beta_2)$ формула (6.1) упрощается: $r_X(x,y) = R\cdot|\beta_1-\beta_2|$.

Зададим открытые множества

$$M_1=\{x=x(\alpha,\beta)\,|\,0\le\alpha\le 2\pi,\ 0<\beta<\beta_1\},$$
$$M_2=\{x=x(\alpha,\beta)\,|\,0\le\alpha\le 2\pi,\ \beta_2<\beta<\pi\},$$

где $\beta_1=\arccos\left(1-\frac{1}{2\pi R^2}\right)$, а β_2 - фиксированное число из отрезка $[\beta_1,\pi-\beta_1]$. Тогда $\mu(M_1)=1\le\mu(M_2)$. Рассмотрим задачу I.2 с исходными распределениями массы (5.I2).

Выделим на сфере X точки $P_1=(0,0,R)$ и $P_2=(0,0,-R)$. Положим

$$u(x)=r_X(x,P_1)=\beta R,\ x=x(\alpha,\beta),\ 0\le\alpha\le 2\pi,\ 0\le\beta\le\pi. \qquad (6.2)$$

Согласно предложению 3.I функция u принадлежит классу $Lip_1(X,r_X)$.

Зафиксируем открытое множество

$$M_2'=\{x=x(\alpha,\beta)\,|\,0\le\alpha\le 2\pi,\ \beta_2<\beta<\beta_3\},$$

где $\beta_3=\arccos\left(\cos\beta_2-\frac{1}{2\pi R^2}\right)$. Тогда $M_2'\subset M_2,\ \mu(M_2')=1.$ Точке $x=x(\alpha,\beta)\in M_1$ поставим в соответствие точку $f(x)=x(\alpha,\beta')\in M_2'$, где $\beta'=\arccos(\cos\beta+\cos\beta_2-1)$ определено из соответствующего уравнения вида (5.I3). Топологическое отображение $f: M_1\longrightarrow M_2'$ и функция u удовлетворяют соотношениям (5.5) и (5.6) . На основании предложения 5.I и условия оптимальности I.2 мера $\varphi_2'(e)=\mu(e\cap M_2'),\ e\in\mathcal{B}$, и перемещение вида (5.7) являются оптимальными в задаче I.2. При этом

$$\rho_{r_X}(\varphi_1,\varphi_1^{\varphi_2})=\rho_{r_X}(\varphi_1,\varphi_2')=\tau_{r_X}(\psi_f)=\int\limits_{M_1} r_X(x,f(x))\,\mu(dx)=$$
$$=R^3\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{\beta_1}(\beta'-\beta)\sin\beta\, d\beta\, d\alpha=2\pi R^3\int\limits_0^{\beta_1}[\arccos(\cos\beta+\cos\beta_2-1)-\beta]\sin\beta\, d\beta=$$
$$=2\pi R^3\left[\sqrt{1-T^2}-T\cdot\arccos T+\beta_1\cos\beta_1+\beta_2\cos\beta_2-\sin\beta_1-\sin\beta_2\right],$$

где $T=\cos\beta_1+\cos\beta_2-1.$

Приведем конкретные числовые значения.

6.I. $R=1; \beta_1=\beta_2=\arccos(1-\frac{1}{2\pi})=0,571954$; $\beta_3=\arccos(1-\frac{1}{\pi})=$
$=0,820726$; $\rho_{r_X}(\varphi_1, \Phi_1^{\varphi_2})=0,323317$.

6.2. $R=1; \beta_1=0,571954$; $\beta_2=\frac{\pi}{2}=1,570796$; $\beta_3=\arccos(-\frac{1}{\pi})=$
$=1,894740$; $\rho_{r_X}(\varphi_1, \Phi_1^{\varphi_2})=1,271343$.

6.3. $R=1$; $\beta_1=0,571954$; $\beta_2=\pi-\beta_1=2,569639$; $\beta_3=\pi=$
$=3,141593$; $\rho_{r_X}(\varphi_1, \Phi_1^{\varphi_2})=\rho_{r_X}(\varphi_1, \varphi_2)=2,383196$.

6.4. $R=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}=0,398942$; $\beta_1=\beta_2=\frac{\pi}{2}=1,570796$; $\beta_3=\pi=$
$=3,141593$; $\rho_{r_X}(\varphi_1, \Phi_1^{\varphi_2})=\rho_{r_X}(\varphi_1, \varphi_2)=0,455430$.

Заметим, что в примере 6.4 множества $M_3=M_1\cup\{P_1\}$, $M_4=M_2\cup\{P_2\}, int(\overline{M}_3\cup\overline{M}_4)=X$ являются открытыми и выпуклыми (в смысле метрики r_X). При этом

$$\varphi_1(e)=\mu(e\cap M_1)=\mu(e\cap M_3)=\varphi_3(e),\ \varphi_2(e)=\mu(e\cap M_2)=\mu(e\cap M_4)=\varphi_4(e),\ e\in\mathcal{B}.$$

Следовательно, функция (6.2) является потенциальной функцией и в задаче I.I с исходными распределениями массы φ_i, $i=3,4$. Линии тока этой функции начинаются в точке $P_1\in M_3$ и заканчиваются в точке $P_2\in M_4$. На плоскости такая ситуация невозможна (см. [I0, предложение 2]).

Перейдем теперь к рассмотрению оптимальных перемещений массы на границе X куба $Q=[0,1]^3\subset\mathbb{R}^3$. Зафиксируем открытое выпуклое (в смысле метрики r_X) множество

$$M_1=\{x=(\xi,\eta,0)\in\mathbb{R}^3 \mid 0<\xi<1,\ 0<\eta<1\}.$$

6.5. Пусть

$$M_2=\{x=(\xi,\eta,1)\in\mathbb{R}^3 \mid 0<\xi<1,\ 0<\eta<1\}.$$

Тогда $\mu(M_1)=\mu(M_2)=1$. Рассмотрим задачу I.I с исходными распределениями массы (5.I2). Положим

$$\gamma_0=\{x=(\xi,\eta,\zeta)\in X \mid \zeta=0,5\},$$

$$X_1=\{x=(\xi,\eta,\zeta)\in X \mid \zeta\le 0,5\},\ X_2=\{x=(\xi,\eta,\zeta)\in X \mid \zeta\ge 0,5\};$$

$$u(x)=(-1)^i r_X(x,\gamma_0),\ x\in X_i,\ i=1,2. \qquad (6.3)$$

Согласно предложениям 3.I и 3.3 функция u принадлежит классу $Lip_1(X, r_X)$. Каждой точке $x=(\xi,\eta,0)\in M_1$ поставим в соответствие точку $f(x)=(\xi,\eta,1)\in M_2$. Топологическое отображение $f: M_1 \to M_2$ и функция u удовлетворяют соотношениям (5.5) и (5.6). На основании предложения 5.I перемещение вида (5.7) является оптимальным в задаче I.I. При этом

$$\rho_{r_X}(\varphi_1,\varphi_2)=\tau_{r_X}(\psi_f)=\int\limits_{M_1} r_X(x,f(x))\mu(dx)=8\int\limits_0^{0,5}\int\limits_0^{\xi}(2\eta+1)d\eta d\xi=1,333333.$$

6.6. Пусть

$$M_2=\{x=(0,\eta,\zeta)\in R^3 \mid 0<\eta<1,\ 0<\zeta<1\}.$$

Тогда $\mu(M_1)=\mu(M_2)=1$. Рассмотрим задачу I.I с исходными распределениями массы (5.I2). Положим

$$\gamma_0=\{x=(\xi,\eta,\zeta)\in X \mid \xi=\zeta\},$$

$$X_1=\{x=(\xi,\eta,\zeta)\in X \mid \xi\geq\zeta\},\ X_2=\{x=(\xi,\eta,\zeta)\in X \mid \xi\leq\zeta\}.$$

Функцию $u\in Lip_1(X,r_X)$ определим равенствами (6.3). Каждой точке $x=(\xi,\eta,0)\in M_1$ поставим в соответствие точку $f(x)=$ $=(0,\eta,\xi)\in M_2$. Топологическое отображение $f: M_1\to M_2$ и функция u удовлетворяют соотношениям (5.5) и (5.6). На основании предложения 5.I перемещение вида (5.7) является оптимальным в задаче I.I. При этом

$$\rho_{r_X}(\varphi_1,\varphi_2)=\tau_{r_X}(\psi_f)=\int\limits_{M_1} r_X(x,f(x))\mu(dx)=3-2\sqrt{2}+$$
$$+4\int\limits_0^{\sqrt{2}-1}\int\limits_0^{(\sqrt{2}+1)\eta}\xi d\xi d\eta+2\sqrt{2}\int\limits_0^{\sqrt{2}-1}\int\limits_{(\sqrt{2}+1)\eta}^{1}(\xi+\eta)d\xi d\eta=\frac{7}{3}-\sqrt{2}=0,919120.$$

6.7. Пусть

$$M_2=\{x=(\xi,\eta,\zeta)\in X \mid 0<\zeta<0,25\}.$$

Тогда $\mu(M_1)=\mu(M_2)=1$. Рассмотрим задачу I.I с исходными распределениями массы (5.I2). В силу симметрии, а также на основании теорем 4.I, 5.I и предложений 3,3, 5.I, достаточно построить оптимальное перемещение массы треугольника

$$M_1' = \{x = (\xi, \eta, 0) \mid \xi > 0,\ \xi < \eta < 1 - \xi\} \qquad (6.4)$$

в прямоугольник

$$M_2' = \{x = (0, \eta, \zeta) \in M_2 \mid 0 < \zeta < 0{,}25\}$$

относительно метрики $r_{M_1' \cup M_2'}$. Это равносильно построению оптимального перемещения массы треугольника M_1' в прямоугольник

$$M_2'' = \{x = (\xi, \eta, 0) \in R^3 \mid -0{,}25 < \xi < 0,\ 0 < \eta < 1\}$$

относительно евклидовой метрики плоскости $\zeta = 0$. Последняя задача в системе координат

$$\bar{\xi} = 2\eta - 1, \quad \bar{\eta} = -2\xi \qquad (6.5)$$

уже рассматривалась в [I0] (см. пример I.3). Оптимальное значение интеграла перемещения в этой задаче равно $\tau_0 = 0{,}613090$. Следовательно, в нашем примере

$$\rho_{r_X}(\varphi_1, \varphi_2) = 4\left(\frac{\tau_0}{8}\right) = \frac{\tau_0}{2} = 0{,}306545.$$

6.8. Пусть

$$M_2 = \{x = (\xi, \eta, \zeta) \in X \mid \zeta > 0\}.$$

Тогда $\mu(M_1) = 1 < 5 = \mu(M_2)$. Рассмотрим задачу I.2 с исходными распределениями массы (5.I2). В силу симметрии, а также на основании теорем 4,I, 5.I и предложений 3,3, 5,I, достаточно построить оптимальное перемещение массы треугольника в квадрат

$$M_2' = \{x = (0, \eta, \zeta) \in M_2 \mid 0 < \zeta < 1\}$$

относительно метрики $r_{M_1' \cup M_2'}$. Это равносильно построению оптимального перемещения массы треугольника (6.4) в полуполосу

$$M_2'' = \{x = (\xi, \eta, 0) \in R^3 \mid \xi < 0,\ 0 < \eta < 1\}$$

относительно евклидовой метрики плоскости $\zeta = 0$. Последняя задача в системе координат (6.5) уже рассматривалась в [I0] (см. пример 2.I). Там же составлено и численно решено дифференциальное уравнение кривой γ , определяющей искомую меру φ_γ . Оптимальное значение интеграла перемещения в этой задаче равно $\tau_1 = 0{,}607490$. Следовательно, в нашем примере

$$\rho_{\tau_X}(\varphi_1, \Phi_1^{\varphi_2}) = \frac{\tau_1}{2} = 0{,}303745.$$

Литература

1. Канторович Л.В. О перемещении масс// Докл. АН СССР. - 1942. - Т.37, № 7-8. - С.227-229.
2. Канторович Л.В. Об одной проблеме Монжа// Усп. мат. наук. - 1948. - Т.3, вып. 2. - С.225-226.
3. Канторович Л.В., Рубинштейн Г.Ш. Об одном функциональном пространстве и некоторых экстремальных задачах. Докл. АН СССР. - 1957. - Т.115, №6. - С.1058-1061.
4. Канторович Л.В., Рубинштейн Г.Ш. Об одном пространстве вполне аддитивных функций. - Вестник ЛГУ. - 1958. - №7. - С.52-59.
5. Рубинштейн Г.Ш. Двойственность в математическом программировании и некоторые вопросы выпуклого анализа. - Усп. мат. наук. - 1970. - Т.25. - С.171-201.
6. Канторович Л.В., Акилов Г.П. Функциональный анализ. - М.: Наука, 1977.
7. Александров А.Д. Внутренняя геометрия выпуклых поверхностей. - М.-Л.: ГИТТЛ, 1948.
8. Погорелов А.В. Внешняя геометрия выпуклых поверхностей. - М.: Наука, 1969.
9. Погорелов А.В. Дифференциальная геометрия. - М.: Наука, 1974.
10. Владимиров Ю.Н. К задаче перемещения лебеговой меры на евклидовой плоскости// Оптимизация. - 1985. - Вып.36(53). - С.17-30.
11. Владимиров Ю.Н. О максимальных функциях Липшица, связанных с задачей оптимального перемещения массы. - Оптимизация. - 1988. - Вып.44(61), - С.96-113.
12. Владимиров Ю.Н. Об одном классе функций Липшица в конечномерном евклидовом пространстве. - Оптимизация. - 1980. - Вып. 24(41). - С.60-69.
13. Владимиров Ю.Н. Добавление к статье// Оптимизация. - 1981.- Вып. 26(43). - С.141-142.

14. Владимиров Ю.Н. О наилучших приближениях нормального распределения в метрике Канторовича – Рубинштейна. – Оптимизация. – 1984. – Вып. 34(51). – С.13-23.
15. Владимиров Ю.Н. Задачи оптимального перемещения массы на плоскости и связанные с ними функции Липшица. – Оптимизация. – 1989. – Вып. 45(62). – С.87-98.

Поступила в ред.-изд. отдел
17.08.1989 г.