Численные методы

УДК 519.853

МЕТОД ДЕКОМПОЗИЦИИ ДЛЯ РЕШЕНИЯ БЛОЧНОЙ ЗАДАЧИ О ДОПОЛНИТЕЛЬНОСТИ

В.В.Калашников, Н.И.Калашникова

I. Метод декомпозиции

Рассмотрим следующую линейную задачу о дополнительности специального вида: найти вектор $x=(x_0, x_1, \ldots, x_N) \in R^n$ такой, что

$$x_0 \geq 0, \; w_0 = \sum_{k=0}^{N} A_k x_k + q_0 \geq 0, \; x_0^T \cdot w_0 = 0, \tag{1}$$

$$x_k \geq 0, w_k = C_k \cdot x_0 + B_k x_k + q_k \geq 0, \; x_k^T \cdot w_k = 0, \; k=1,\ldots,N, \tag{2}$$

где $x_0 \in R^{s_0}$; $x_1 \in R^{s_1}, \ldots, x_N \in R^{s_N}$ и $s_0 + s_1 + \ldots + s_N = n$. Здесь матрица A_k имеет размер $s_0 \times s_k$, $k=0,1,\ldots,N$, вектор $q_0 \in R^{s_0}$; матрицы C_k и B_k имеют размеры $s_k \times s_0$ и $s_k \times s_k$ соответственно; вектор $q_k \in R^{s_k}$, $k=1,2,\ldots,N$. Будем предполагать, что матрица A системы (I)-(2), составленная из описанных выше матриц

$$A = \begin{bmatrix} A_0 & A_1 & A_2 & \ldots & A_N \\ C_1 & B_1 & 0 & \ldots & 0 \\ C_2 & 0 & B_2 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ C_N & 0 & 0 & \ldots & B_N \end{bmatrix} \tag{3}$$

I) является P-матрицей, т.е. все ее главные миноры положительны;

2) имеет строгое диагональное преобладание, т.е.

$$(A_0)_{ii} > \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{s_0} |(A_0)_{ij}| + \sum_{k=1}^{N}\sum_{j=1}^{s_k} |(A_k)_{ij}|,\ i=1,\dots,s_0, \tag{4}$$

$$(B_k)_{ii} > \sum_{j=1}^{s_0} |(C_k)_{ij}| + \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{s_k} |(B_k)_{ij}|,\ i=1,\dots,s_k,\ k=1,\dots,N. \tag{5}$$

Из условия I вытекает, как известно, что задача (I)-(2) имеет единственное решение $x^* = x^*(q)$ для любого $q=(q_0,q_1,\dots,q_N)\in$ $\in R^n$. Кроме того, так как любая главная подматрица P-матрицы также является P-матрицей, можем заключить, что для любого фиксированного $\bar{x}_0 \in R^{s_0}$ задача (2) имеет единственное решение $y_k = x_k(\bar{x}_0) \in R_+^{s_k}$, $k=1,2,\dots,N$; с другой стороны, для всякого набора $\bar{x} = (x_1, x_2,\dots,x_N)$ задача (I) также имеет единственное решение $x_0 = x_0(\bar{x}) \in R_+^{s_0}$. Эти факты позволяют предложить следующий итерационный процесс для решения задачи (I)-(2).

Выберем произвольное начальное приближение $x_0^{(0)} \in R_+^{s_0}$ и опишем m-й шаг алгоритма ($m \geq 1$), считая, что к началу этого шага имеем приближение $x_0^{(m-1)} \in R_+^{s_0}$. Тогда находим каким-либо способом решения $y_k^{(m)} = x_k(x_0^{m-1}) \in R_+^{s_k}$ "малых" задач (2) при $k=1,2,\dots,N$, в которых вместо вектора x_0 подставлен $x_0^{(m-1)}$. Затем определяем очередное приближение $x_0^{(m)}$ как решение задачи

$$x_0 \geq 0,\ w_0 = A_0 x_0 + \Big(\sum_{k=1}^{N} A_k y_k^{(m)} + q_0\Big) \geq 0,\ x_0^T \cdot w_0 = 0.$$

ТЕОРЕМА I. Последовательность итераций $x^{(m)} = (x_0^{(m)}, y_1^{(m)},\dots, y_N^{(m)})$, полученная описанным выше алгоритмом, сходится к x^*-решению задачи (I) - (2) - с линейной скоростью при $m \to \infty$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для решения $x^* = (x_0^*,\dots,x_N^*)$ задачи (I)-(2) выполнены соотношения

$$x_0^* \geq 0,\ w_0^* = \sum_{k=0}^{N} A_k x_k^* + q_0 \geq 0,\ (x_0^*)^T w_0^* = 0, \tag{6}$$

$$x_k^*\geq 0,\ w_k^*=C_k x_0^*+B_k x_k^*+q_k\geq 0,\ (x_k^*)^T\cdot w_k^*=0,\ k=1,\dots,N. \qquad (7)$$

Зафиксируем некоторое $m\geq 1$ и $1\leq k\leq N$. Рассмотрим для произвольного $1\leq i\leq s_k$ произведение $(x_k^*-y_k^{(m)})_i\times(w_k^*-w_k^{(m)})_i$, где $w_k^{(m)}=C_k x_0^{(m-1)}+B_k y_k^{(m)}+q_k$. С одной стороны,

$$(x_k^*-y_k^{(m)})_i\cdot(w_k^*-w_k^{(m)})_i=(x_k^*)_i(w_k^*)_i-(y_k^{(m)})_i(w_k^*)_i-(x_k^*)_i(w_k^{(m)})_i+$$

$$+(y_k^{(m)})_i(w_k^{(m)})_i=-(y_k^{(m)})_i(w_k^*)_i-(x_k^*)_i(w_k^{(m)})_i\leq 0$$

в силу неотрицательности всех величин в скобках. С другой стороны,

$$(x_k^*-y_k^{(m)})_i(w_k^*-w_k^{(m)})_i=(x_k^*-y_k^{(m)})_i\cdot\big[(B_k)_{i1}(x_k^*-y_k^{(m)})_1+\dots$$

$$\dots+(B_k)_{ii}(x_k^*-y_k^{(m)})_i+\dots+(B_k)_{is_k}(x_k^*-y_k^{(m)})_{s_k}\big]+$$

$$+(x_k^*-y_k^{(m)})_i\big[(C_k)_{i1}(x_0^*-x_0^{(m-1)})_1+\dots+(C_k)_{is_0}\cdot(x_0^*-x_0^{(m-1)})_{s_0}\big].$$

Объединяя эти две цепочки в одну и перенося второе слагаемое последнего выражения в левую часть, получим неравенство

$$-(x_k^*-y_k^{(m)})_i\cdot\big[(C_k)_{i1}(x_0^*-x_0^{(m-1)})_1+\dots+(C_k)_{is_0}\times$$

$$\times(x_0^*-x_0^{(m-1)})_{s_0}\big]\geq(x_k^*-y_k^{(m)})_i\cdot\big[(B_k)_{ii}\cdot(x_k^*-y_k^{(m)})_i+$$

$$+\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{s_k}(B_k)_{ij}\,(x_k^*-y_k^{(m)})_j\,\big].$$

Пусть i - тот номер, для которого

$$|(x_k^* - y_k^{(m)})_i| = \|x_k^* - y_k^{(m)}\|_\infty = \max_{1 \le j \le s_k} |(x_k^* - y_k^{(m)})_j| .$$

Тогда из последнего неравенства следует оценка

$$\Big[(B_k)_{ii} - \sum_{\substack{j=1 \\ j \ne i}}^{s_k} |(B_k)_{ij}|\Big] \cdot \|x_k^* - y_k^{(m)}\|_\infty^2 \le$$

$$\le \|x_k^* - y_k^{(m)}\|_\infty \cdot \|x_0^* - x_0^{(m-1)}\|_\infty \cdot \sum_{j=1}^{s_0} |(C_k)_{ij}| ,$$

или

$$\|x_k^* - y_k^{(m)}\|_\infty \le \sigma_{ki} \cdot \|x_0^* - x_0^{(m-1)}\|_\infty , \tag{8}$$

где

$$\sigma_{ki} = \frac{\sum\limits_{j=1}^{s_0} |(C_k)_{ij}|}{(B_k)_{ii} - \sum\limits_{\substack{j=1 \\ j \ne i}}^{s_0} |(B_k)_{ij}|} < 1$$

по условию (5).

Приняв $\sigma_k = \max\limits_{1 \le i \le s_k} \sigma_{ki} \; (<1)$, окончательно из (8) получим оценку

$$\|x_k^* - y_k^{(m)}\|_\infty \le \sigma_k \cdot \|x_0^* - x_0^{(m-1)}\|_\infty . \tag{9}$$

Далее, рассмотрим для любого $1 \le i \le s_0$ произведение $(x_0^* - x_0^{(m)})_i \cdot (w_0^* - w_0^{(m)})_i$, которое, как нетрудно убедиться, неположительно (здесь $w_0^{(m)} = A_0 x_0^{(m)} + \sum\limits_{k=1}^{N} A_k y_k^{(m)} + q_0$).

С другой стороны,

$$(x_0^* - x_0^{(m)})_i (w_0^* - w_0^{(m)})_i = (x_0^* - x_0^{(m)})_i \cdot \Big[A_0 (x_0^* - x_0^{(m)}) +$$

$$+ \sum_{k=1}^{N} A_k (x_k^* - y_k^{(m)})\Big]_i .$$

Следовательно,

$$(x_0^* - x_0^{(m)})_i \Big[\sum_{j=1}^{s_0} (A_0)_{ij} (x_0^* - x_0^{(m)})_j\Big] \le$$

$$\le |(x_0^* - x_0^{(m)})_i| \cdot \Big[\sum_{k=1}^{N} \sum_{j=1}^{s_k} |(A_k)_{ij}| \cdot |(x_k^* - y_k^*)_j|\Big].$$

Оценивая левую часть снизу, выводим неравенство

$$\Big[(A_0)_{ii} - \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{s_0} |(A_0)_{ij}|\Big] \cdot |(x_0^* - x_0^{(m)})_i|^2 \le$$

$$\le \Big(\sum_{k=1}^{N} \sum_{j=1}^{s_k} |(A_k)_{ij}|\Big) \cdot |(x_0^* - x_0^{(m)})_i| \max_{1\le k\le N} \|x_k^* - y_k^{(m)}\|_\infty. \tag{10}$$

Здесь номер i выбран таким, что

$$|(x_0^* - x_0^{(m)})_i| = \|x_0^* - x_0^{(m)}\|_\infty = \max_{1\le j\le s_0} |(x_0^* - x_0^{(m)})_j|.$$

В этом случае (10) равносильно неравенству

$$\|x_0^* - x_0^{(m)}\|_\infty \le \delta_i \cdot \max_{1\le k\le N} \|x_k^* - y_k^{(m)}\|_\infty, \tag{11}$$

где

$$\delta_i = \frac{\sum_{k=1}^{N} \sum_{j=1}^{s_k} |(A_k)_{ij}|}{(A_0)_{ii} - \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{s_0} |(A_0)_{ij}|} < 1$$

по условию (4). Из (11) вытекает оценка

$$\|x_0^* - x_0^{(m)}\|_\infty \le \delta \cdot \max_{1\le k\le N} \|x_k^* - y_k^{(m)}\|_\infty \tag{12}$$

с

$$\delta = \max_{1\le i\le s_0} \delta_i \ (< 1).$$

Из оценок (9) и (11) следует утверждение теоремы. В самом деле, имеем оценки

$$\|x_0^* - x_0^{(m)}\|_\infty \le \delta \cdot \max_{1\le k\le N} \|x_k^* - y_k^{(m)}\|_\infty \le$$

$$\le \sigma \cdot \|x_0^* - x_0^{(m-1)}\|,$$

где $\quad \sigma = \delta \cdot \max_{1\le k\le N} \sigma_k < 1;$

$$\|x_\ell^* - y_\ell^{(m+1)}\|_\infty \le \sigma_\ell \cdot \delta \cdot \max_{1\le k\le N} \|x_k^* - y_k^{(m)}\|_\infty, \quad \ell = 1,2,\dots,N,$$

откуда

$$\max_{1\le k\le N} \|x_k^* - y_k^{(m+1)}\|_\infty \le \sigma \cdot \max_{1\le k\le N} \|x_k^* - y_k^{(m)}\|_\infty .$$

Теорема доказана.

2. Итерационные методы решения вспомогательных задач

На каждом шаге (с номером $m \ge 1$) рассмотренного выше алгоритма требуется отыскивать решения $\{y_k^{(m)}\}_{k=1}^N$ задачи (2), т.е.

$$y_k^{(m)} \ge 0,\ w_k^{(m)} = B_k y_k^{(m)} + (C_k x_0^{(m-1)} + q_k) \ge 0,\ (y_k^{(m)})^T \cdot w_k^{(m)} = 0,\ k = 1,2,\dots,N, \tag{13}$$

и решение $x_0^{(m)}$ задачи

$$x_0^{(m)} \ge 0,\ w_0^{(m)} = A_0 x_0^{(m)} + (\sum_{k=1}^N A_k y_k^{(m)} + q_0) \ge 0,\ (x_0^{(m)})^T w_0^{(m)} = 0. \tag{14}$$

Каждую из этих задач можно решать каким-либо конечным методом, изложенным, например, в [1,2]. Однако в ряде случаев может потребоваться применение итерационных процессов и для нахождения решений задач (13) и (14). Такие итерационные методы решения линейной задачи о дополнительности изучены во многих работах, в частности в статьях [3-5]. В работе [5] предложена даже некоторая классификация таких алгоритмов, объединенных общей формой записи. Мы, однако, предположим, что задачи (13) и (14) имеют свою специфику и исследуем два метода в отличной от [5] манере.

Пусть для задачи о дополнительности

$$x \geq 0,\ w = Ax + q \geq 0,\ x^T \cdot w = 0 \tag{15}$$

известно, что A является P-матрицей и имеет строгое диагональное преобладание. Рассмотрим следующий итерационный метод решения (15), начинающий работу с произвольного начального приближения $x^0 \in R^n$ и являющийся аналогом метода Якоби для решения систем линейных уравнений.

Именно, если $x^\ell \in R^n$ – текущее приближение, определим $x^{\ell+1}$ как решение ЛЗД

$$x \geq 0,\ w = \mathcal{D}x + (Fx^\ell + q) \geq 0,\ x^T \cdot w = 0. \tag{16}$$

Здесь

$$\mathcal{D} = \begin{pmatrix} a_{11} & & 0 \\ & a_{22} & \\ 0 & & \ddots\, a_{nn} \end{pmatrix},\quad F = A - \mathcal{D}.$$

ЛЕММА I. Последовательность $\{x^\ell\}_{\ell=0}^{\infty}$ сходится с линейной скоростью к решению x^* задачи (15).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Легко установить соотношения

$$x_i^{\ell+1} = \frac{1}{a_{ii}}(-F_i x^\ell - q_i)_+,\quad i = 1, 2, \ldots, n, \tag{17}$$

где F_i – i-я строка матрицы F, а $\xi_+ = max\{0, \xi\}$ для $\xi \in R^1$. Кроме того, очевидно,

$$x_i^* = \frac{1}{a_{ii}}(-F_i x^* - q_i)_+,\quad i = 1, 2, \ldots, n. \tag{18}$$

Из (17) и (18) следует цепочка соотношений

$$|x_i^{\ell+1} - x_i^*| = \left|\frac{1}{a_{ii}}(-F_i x^\ell - q_i)_+ - \right.$$

$$\left. - \frac{1}{a_{ii}}(-F_i x^* - q_i)_+\right| \leq \frac{1}{a_{ii}}\left|(-F_i x^\ell - q_i) - \right.$$

$$\left. -(-F_i x^* - q_i)\right| = \frac{1}{a_{ii}}\left|F_i(x^* - x^\ell)\right| \leq$$

$$\leq \frac{1}{a_{ii}} \sum_{j \neq i} |a_{ij}| \cdot \|x^* - x^\ell\|_\infty, \; i = 1, 2, \ldots, n.$$

В итоге получается оценка

$$\|x^{\ell+1} - x^*\|_\infty \leq \mu \cdot \|x^\ell - x^*\|_\infty, \; \ell = 0, 1, \ldots, \tag{19}$$

где

$$\mu = \max_{1 \leq i \leq n} \frac{1}{a_{ii}} \sum_{j \neq i} |a_{ij}| < 1$$

в силу строгого диагонального преобладания. Лемма доказана.

Теперь рассмотрим другой вариант итерационного метода решения задачи (15): аналог метода Зейделя для решения системы линейных уравнений. Пусть $z^0 \in R^n$ – начальное приближение. Если $z^\ell \in R^n$, $\ell \geq 0$, – текущая итерация, то на $(\ell+1)$-м шаге находим $z^{\ell+1}$ как решение ЛЗД

$$z \geq 0, \; w = Gz + A^+ z^\ell + q \geq 0, \; z^T \cdot w = 0. \tag{20}$$

Здесь

$$G = \begin{pmatrix} a_{11} & & & 0 \\ a_{21} & a_{22} & & \\ \cdots\cdots & & \ddots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}, \quad A^+ = \begin{pmatrix} 0 & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ & 0 & \ldots & a_{2n} \\ 0 & & \ddots & \vdots \\ & & & 0 \end{pmatrix},$$

$A^- = G - D$.

ЛЕММА 2. Последовательность $\{z^\ell\}_{\ell=0}^\infty$ сходится с линейной скоростью к решению z^* задачи (15).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Нетрудно видеть, что

$$x_1^{\ell+1} = \frac{1}{a_{11}}(-A_1^+ x^\ell - A_1^- x^{\ell+1} - q_1)_+,$$

$$x_2^{\ell+1} = \frac{1}{a_{22}}(-A_2^+ x^\ell - A_2^- x^{\ell+1} - q_2)_+,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$x_i^{\ell+1} = \frac{1}{a_{ii}}(-A_i^+ x^\ell - A_i^- x^{\ell+1} - q_i)_+,$$

. . . .

$$x_n^{\ell+1} = \frac{1}{a_{nn}}(-A_n^+ x^\ell - A_n^- x^{\ell+1} - q_n)_+ .$$

Кроме того, очевидно,

$$x_i^* = \frac{1}{a_{ii}}(-A_i^+ x^* - A_i^- x^* - q_i)_+ , \quad i = 1,\ldots,n.$$

Следовательно,

$$|x_1^{\ell+1} - x_1^*| = \frac{1}{a_{11}} |(-A_1^+ x^\ell - A_1^- x^{\ell+1} - q_1)_+ -$$

$$-(-A_1^+ x^* - A_1^- x^* - q_1)_+| \le \frac{1}{a_{11}} | A_1^+ (x^* - x^\ell) +$$

$$+ A_1^- (x^* - x^{\ell+1})| \le \frac{1}{a_{11}} \sum_{j \ne 1} |a_{1j}| \cdot \| x^\ell - x^* \|_\infty =$$

$$= \mu_1 \cdot \| x^\ell - x^* \|_\infty ,$$

где $\mu_1 = \frac{1}{a_{11}} \cdot \sum_{j \ne 1} |a_{ij}| < 1$ в силу строгого диагонального преобладания.

Аналогично,

$$|x_i^{\ell+1} - x_i^*| = \frac{1}{a_{ii}} |(-A_i^+ x^\ell - A_i^- x^{\ell+1} - q_i)_+ -$$

$$-(-A_i^+ x^* - A_i^- x^* - q_i)_+ | \le \frac{1}{a_{ii}} | A_i^+ (x^* - x^\ell) +$$

$$+ A_i^- (x^* - x^{\ell+1})| \le \frac{1}{a_{ii}} \sum_{j > i} |a_{ij}| \cdot \| x^* - x^\ell \|_\infty +$$

$$+ \frac{1}{a_{ii}} \sum_{j < i} |a_{ij}| \cdot |x_j^{\ell+1} - x_j^*| .$$

Так как, очевидно, для любого $i \ge 1$

$$|x_j^{\ell+1} - x_j^*| \le (\max_{1 \le k \le j} \mu_k) \cdot \| x^\ell - x^* \|_\infty$$

при $j < i$, где $\mu_k = \frac{1}{a_{kk}} \cdot \sum_{s \ne k} |a_{ks}| < 1, \ 1 \le k \le j$, то

$$|x_i^{l+1}-x_i^*| \le \frac{1}{a_{ii}}\Big[\sum_{j>i}|a_{ij}|+\sum_{j<i}|a_{ij}|\times$$

$$\times \max_{1\le k\le j}\mu_k\Big]\cdot\|x^l-x^*\|_\infty \le \mu_i\|x^l-x^*\|_\infty \le$$

$$\le \max_{1\le k\le i}\mu_k\cdot\|x^l-x^*\|_\infty.$$

В итоге можно выписать оценку

$$\|x^{l+1}-x^*\|_\infty \le \mu\cdot\|x^l-x^*\|_\infty,\quad l=0,1,\dots, \tag{21}$$

$\mu=\max\limits_{1\le k\le n}\mu_k<1$, из которой вытекает утверждение леммы.

3. Итерационные методы с неточным выполнением внутренних шагов

Так как решение задачи (I5) в описываемом подходе мы собирается проводить итерационными методами, которые требуется останавливать после проведения конечного числа шагов, для практического применения изложенного аггоритма необходимо иметь вычислимый критерий близости очередного приближения $x^l\in R_+^n$ к точному решению x^* задачи (I5). Для этого воспользуемся методикой работы [6]. Именно, рассмотрим отображение $Q: R_+^{2n}\longrightarrow R_+^n\times R^n$, определенное формулой

$$Q(x,y)=(x_1y_1,\dots,x_ny_n,\ A_1x+q_1-y_1,\dots,A_nx+q_n-y_n)$$

для любого $(x,y)\in R_+^{2n}$. Обозначим для краткости $f_i(x)=A_ix+q_i$, $i=1,2,\dots,n$. Известно [6 , лемма 2] , что для любых $(x^1,y^1),(x^2,y^2)\in R_+^{2n}$ справедлива оценка

$$\|x^1-x^2\|_2\le\{\beta+(\beta^2+4\alpha\beta)^{1/2}\}/(2\alpha), \tag{22}$$

где $\beta=\|Q(x^1,y^1)-Q(x^2,y^2)\|_2$. Здесь $\|\cdot\|_2$ – евклидова норма в соответствующем пространстве (R^n или R^{2n}), $\alpha>0$ – параметр, характеризующий A как P-матрицу, т.е. $\max\limits_{1\le i\le n}u_i(A_iu)\ge\alpha\|u\|_2^2$ для любых $u\in R^n$. Легко видеть, что $Q(x^*, f(x^*)) = 0$. Следовательно, для любых $y \in R^n_+$ можно получить из (22) оценку

$$\|x^\ell - x^*\|_2 \leq \{\beta + (\beta^2 + 4\alpha\beta)^{1/2}\}/(2\alpha), \tag{23}$$

где $\beta = \|Q(x^\ell, y)\|_2$. В частности, отсюда имеем оценку

$$\|x^\ell - x^*\|_2 \leq \{\bar\beta + (\bar\beta^2 + 4\alpha\bar\beta)^{1/2}\}/(2\alpha), \tag{24}$$

где $\bar\beta = \min\limits_{y \geq 0} \|Q(x^\ell, y)\|_2$.

ЛЕММА 3. $\bar\beta = \left[\sum\limits_{i=1}^{n} \psi_i^2(x^\ell)\right]^{1/2}$, где

$$\psi_i^2(x^\ell) = \begin{cases} [f_i(x^\ell)]^2 & \text{, е с л и } f_i(x^\ell) < 0, \\ \dfrac{(x_i^\ell)^2 \cdot [f_i(x^\ell)]^2}{1 + (x_i^\ell)^2} & \text{, е с л и } f_i(x^\ell) \geq 0. \end{cases}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим для фиксированного $x \in R^n_+$ задачу

$$\varphi(y) = \|Q(x,y)\|_2^2 = \sum_{i=1}^{n} [x_i^2 y_i^2 + (f_i(x) - y_i)^2] \longrightarrow \min_{y \in R^n_+}. \tag{25}$$

Так как функция $\varphi \in C^1(R^n)$, очевидно, сильно выпуклая, то для решения задачи (25) достаточно найти такую точку $y^* \in R^n_+$, для которой справедливо соотношение

$$\nabla\varphi(y^*) \cdot (y - y^*) \geq 0 \quad \text{для всех } y \geq 0.$$

Пусть $y_i^* = \dfrac{[f_i(x)]_+}{1 + x_i^2}$, $i = 1, \ldots, n$. Тогда

$$(\nabla\varphi(y^*))_i = \begin{cases} 0 & \text{, если } f_i(x) \geq 0, \\ -2f_i(x) & \text{, если } f_i(x) < 0. \end{cases}$$

Поэтому

$$\nabla\varphi(y^*) \cdot (y - y^*) = 2\sum_{i \in I} [-f_i(x)] \cdot y_i \geq 0$$

для любых $y \in R^n_+$; здесь $I = \{1 \leq i \leq n : f_i(x) < 0\}$. Значит, y^* – решение задачи (25). Но

$$x_i^2 (y_i^*)^2 + (f_i(x) - y_i^*)^2 \quad = \begin{cases} [f_i(x)]^2 & \text{, если } f_i(x) < 0, \\ \dfrac{x_i^2 \cdot [f_i(x)]^2}{1+x_i^2} & \text{, если } f_i(x) \geq 0, \end{cases}$$

$i = 1, 2, \ldots, n$, откуда вытекает утверждение леммы.

Таким образом, для того, чтобы гарантировать $\|x^\ell - x^*\|_2 \leq \varepsilon$, достаточно добиться выполнения неравенства $(\bar{\beta} + (\bar{\beta}^2 + 4\alpha\bar{\beta})^{1/2})/(2\alpha) \leq \leq \varepsilon$. Но последнее неравенство выполнено в том и только в том случае, когда

$$\bar{\beta} \leq \frac{\alpha \cdot \varepsilon^2}{1+\varepsilon} . \tag{26}$$

ЛЕММА 4. Для любого $x \in R_+^n$ выполнены соотношения

$$\bar{\beta} = \bar{\beta}(x) \leq \sqrt{n} \cdot [\|q\|_\infty + \|A\|_\infty \times (1 + \sup_{J \subseteq \{1,2,\ldots,n\}} (\|A_{JJ}^{-1} \cdot q_J\|_\infty)] \cdot \|x - x^*\|_\infty . \tag{27}$$

Здесь x^* - точное решение задачи (I5).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Как было определено ранее,

$$\bar{\beta} = \bar{\beta}(x) = \min_{y \in R_+^n} \|Q(x,y)\|_2 \leq \|Q(x, f(x^*))\|_2 =$$

$$= \|Q(x, f(x^*)) - Q(x^*, f(x^*))\|_2 =$$

$$= \|((x_1 - x_1^*) \cdot (A_1 x^* + q_1), \ldots, (x_n - x_n^*) \cdot (A_n x^* + q_n),$$

$$A_1 \cdot (x - x^*), \ldots, A_n (x - x^*))\|_2 \leq \|x - x^*\|_\infty \times$$

$$\times (\|Ax^* + q\|_2 + \sqrt{n} \cdot \|A\|_\infty) \leq \sqrt{n} \cdot \|x - x^*\|_\infty \times$$

$$\times (\|Ax^* + q\|_\infty + \|A\|_\infty) \leq \sqrt{n} \cdot [\|q\|_\infty + \|A\|_\infty (1 + \|x^*\|_\infty)] \times$$

$$\times \|x - x^*\|_\infty .$$

Далее, если $J=\{1\le j\le n: A_j x^* + q_j = 0\}$, то $x_i^* = 0,\ i\notin J$. Следовательно, $\|x^*\|_\infty = \|x_J^*\|_\infty$ и $A_{JJ}x_J^* = -q_J$. Отсюда вытекает, что

$$\|x^*\|_\infty = \|x_J^*\|_\infty = \|A_{JJ}^{-1} q_J\|_\infty \le \sup_{J\in\{1,2,\dots,n\}} \|A_{JJ}^{-1} q_J\|_\infty .$$

Используя эту оценку в предыдущей цепочке, получим соотношения (27). Лемма доказана.

Теперь можно организовать следующий (двухуровневый) итерационный процесс для поиска приближенного решения блочной задачи (I)-(2). Он состоит в построении последовательностей $\{\tilde{x}_0^{(m)}\}$ и $\{\tilde{y}_\kappa^{(m)}\}$, $\kappa=1,2,\dots,N$, которое осуществляется следующим образом. Пусть перед началом m-го шага мы имеем (очередные) приближения $x_0^{(m-1)}\in R_+^{s_0}$ и $\tilde{y}_\kappa^{(m-1)}\in R_+^{s_\kappa}, \kappa=1,2,\dots,N$. Подсчитаем сначала величину

$$\bar{\beta} = \Big[\|\psi_0(\tilde{x}_0^{(m-1)},\tilde{y}^{(m-1)})\|_2^2 + \sum_{\kappa=1}^{N}\|\psi_\kappa(\tilde{x}_0^{(m-1)},\tilde{y}^{(m-1)})\|_2^2\Big]^{1/2},$$

где

$$(\psi_0(\tilde{x}_0^{(m-1)},\tilde{y}^{(m-1)}))_i = \begin{cases} (\tilde{w}_0)_i = (A_0)_i\tilde{x}_0^{(m-1)} + \\ +\sum_{\kappa=1}^{N}(A_\kappa)_i\tilde{y}_\kappa^{(m-1)} + (q_0)_i, & \text{если } (\tilde{w}_0)_i < 0, \\ \dfrac{(\tilde{x}_0^{(m-1)})_i\cdot(\tilde{w}_0)_i}{\sqrt{1+(\tilde{x}_0^{(m-1)})_i^2}}, & \text{если } (\tilde{w}_0)_i \ge 0, \end{cases}$$

для $i=1,2,\dots,s_0$;

$$(\psi_\kappa(\tilde{x}_0^{(m-1)},\tilde{y}^{(m-1)}))_i = \begin{cases} (\tilde{w}_\kappa)_i = (C_\kappa)_i\tilde{x}_0^{(m-1)} + \\ +(B_\kappa)_i\tilde{y}_\kappa^{(m-1)} + (q_\kappa)_i, & \text{если } (\tilde{w}_\kappa)_i \ge 0, \\ \dfrac{(\tilde{y}_\kappa^{(m-1)})_i(\tilde{w}_\kappa)_i}{\sqrt{1+(\tilde{y}_\kappa^{(m-1)})_i^2}}, & \text{если } (\tilde{w}_\kappa)_i \ge 0, \end{cases}$$

где $i=1,2,\dots,s_\kappa$, $\kappa=1,2,\dots,N$.

Если оказалось, что $\bar{\beta} \leq \frac{\alpha \cdot \varepsilon^2}{1+\varepsilon}$, то процесс решения прекращается, точка $(\tilde{x}_0^{(m-1)}, \tilde{y}^{(m-1)})$ принимается за требуемое приближение. Если же $\bar{\beta} > \frac{\alpha \cdot \varepsilon^2}{1+\varepsilon}$, то при определении новых приближений $\tilde{x}_0^{(m)}$ и $\tilde{y}^{(m)}$ точность их нахождения может быть выбрана исходя из следующих соображений. Сначала отметим, что при доказательстве теоремы I фактически получена оценка

$$\|(x_0^*, y^*) - (x_0^{(m)}, y^{(m)})\|_\infty \leq \sigma \cdot \|(x_0^*, y^*) - (\tilde{x}_0^{(m-1)}, \tilde{y}^{(m-1)})\|_\infty, \qquad (28)$$

где $x_0^{(m)}$, $y^{(m)} = (y_1^{(m)}, \ldots, y_N^{(m)})$ – точные решения соответствующих задач (I4), (I3), в которых использованы приближения $\tilde{x}_0^{(m-1)}$, $\tilde{y}^{(m)}$. Если же упомянутые задачи будут решаться приближенно, и $\tilde{x}_0^{(m)}$, $\tilde{y}^{(m)}$ – окончательные приближения, то получаем соотношение

$$\|(x_0^*, y^*) - (\tilde{x}_0^{(m)}, \tilde{y}^{(m)})\|_\infty \leq \|(x_0^*, y^*) - (x_0^{(m)}, y^{(m)})\|_\infty +$$

$$+ \|(\tilde{x}_0^{(m)}, \tilde{y}^{(m)}) - (x_0^{(m)}, y^{(m)})\|_\infty . \qquad (29)$$

Если в ходе реализации m-го шага будет достигнута относительная точность $\varkappa < 1 - \sigma$, т.е. если выполнено

$$\|(\tilde{x}_0^{(m)}, \tilde{y}^{(m)}) - (x_0^{(m)}, y^{(m)})\|_\infty \leq \varkappa \|(x_0^*, y^*) - (\tilde{x}_0^{(m-1)}, \tilde{y}^{(m-1)})\|_\infty, \qquad (30)$$

то из (28), (29) и (30) следует соотношение

$$\|(x_0^*, y^*) - (\tilde{x}_0^{(m)}, \tilde{y}^{(m)})\|_\infty \leq (\sigma + \varkappa) \cdot \|(x_0^*, y^*) - (\tilde{x}_0^{(m-1)}, \tilde{y}^{(m-1)})\|_\infty,$$

т.е. приближения $(\tilde{x}_0^{(m)}, \tilde{y}^{(m)})$ сходятся к решению (x_0^*, y^*) задачи (I)-(2) линейно. Как следует из леммы 4, соотношение (30) будет выполнено, если справедливы оценки

$$\|\tilde{x}_0^{(m)} - x_0^{(m)}\|_\infty \leq \varkappa \cdot \bar{\bar{\beta}}, \qquad (31)$$

$$\|\tilde{y}_k^{(m)} - y_k^{(m)}\|_\infty \leq \varkappa \cdot \bar{\bar{\beta}}, \quad k = 1, 2, \ldots, N,$$

где

$$\bar{\bar{\beta}} = \frac{\bar{\beta}}{\sqrt{n}\cdot[\|q\|_\infty + \|A\|_\infty\cdot(1+\sup\limits_{J\in\{1,\dots,n\}}\|A_{JJ}^{-1}q_J\|_\infty)]},$$

$$n = s_0 + s_1, \dots, s_N, \quad q = (q_0^T, q_1^T, \dots, q_N^T)^T.$$

А оценки (3I) будут, очевидно, выполнены, если добиться выполнения в ходе m-го шага неравенства

$$\frac{\bar{\beta}_0 + (\bar{\beta}_0^2 + 4\alpha_0\bar{\beta}_0)^{1/2}}{2\alpha_0} \leq \varkappa\cdot\bar{\bar{\beta}},$$

$$\frac{\bar{\beta}_k + (\bar{\beta}_k^2 + 4\alpha_0\cdot\bar{\beta}_k)^{1/2}}{2\alpha_k} \leq \varkappa\cdot\bar{\bar{\beta}}, \tag{32}$$

$k = 1, 2, \dots, N,$

где $\alpha_0 > 0$ - параметр, характеризующий P-матрицу A_0, $\alpha_k > 0$ - параметр, характеризующий P-матрицу B_k, $k = 1, 2, \dots, N$ (см. [6]); кроме того,

$$\bar{\beta}_0 = \left\{\sum_{i=1}^{s_0}[\psi_0(\tilde{x}_0^{(m)}, \tilde{y}^{(m)})]_i^2\right\}^{1/2} = \|\psi_0(\tilde{x}_0^{(m)}, \tilde{y}^{(m)}\|_2,$$

$$\bar{\beta}_k = \left\{\sum_{k=1}^{s_k}[\psi_k(\tilde{x}_0^{(m-1)}; \tilde{y}^{(m)})]_i^2\right\} = \|\psi_k(\tilde{x}_0^{(m-1)}, \tilde{y}^{(m)})\|_2, \quad k = 1, \dots, N.$$

Наконец, в силу (26), соотношение (32) заведомо выполнено, если

$$\bar{\beta}_0 \leq \frac{\alpha_0\cdot\varkappa^2\cdot\bar{\bar{\beta}}^2}{1+\varkappa\bar{\bar{\beta}}},$$

$$\bar{\beta}_k \leq \frac{\alpha_k\cdot\varkappa^2\bar{\bar{\beta}}^2}{1+\varkappa\cdot\bar{\bar{\beta}}}, \quad k = 1, 2, \dots, N. \tag{33}$$

Итак, построение приближений $\tilde{x}_0^{(m)}, \tilde{y}^{(m)}$ осуществляется путем итераций, описанных в п.2 статьи, примененных к задачам (I4) и (I3) с фиксированным $\tilde{y}^{(m)}$ и $\tilde{x}^{(m-1)}$ соответственно; итерации прекращаются и в качестве новых приближений решения берутся векторы $\tilde{x}_0^{(m)}$ и $\tilde{y}^{(m)}$, когда будут выполнены оценки (33). Как следует из леммы I, леммы 2 и леммы 4, такой момент обязательно наступит после некоторого числа итераций.

Литература

I. Lemke C.E. Bimatrix eguilibrium points and mathematical programming// Manag. Sci. - 1965. - V.II, N7. - P.681-689.

2. Cottle R.W., Dantzig G.B. Complementarity pivot theory of mathematical programming// Linear algebra Appl. - 1968. - V.I. - P.103-125.

3. Ahn B.-N. Iterative methods for linear complementarity problems with upper bounds on primary variables// Math. Program. - 1983. - V.26, N3.- P.295-315.

4. Mangasarian O.L. Solutions of symmetric linear complementarity problems by iterative methods// J. Optim. Theory Appl.- 1977. - V.22. - P.465-485.

5. Noor M.A. Iterative methods for a class of complementarity problems. - J. Math. Analysis Appl. - 1988. - V.133, N2. - P.366-382.

6. Kojima M., Mizuno S., Nome T. A new continuation method for complementarity problems with uniform P-functions// Math. Program. - 1988.- V.43, NI.- P.107-113.

Поступила в ред.-изд. отдел
06.07.1989 г.