Выпуск 46(63) ОПТИМИЗАЦИЯ 1989 г.

Численные методы

УДК 519.862.64:67

ОБ АЛГОРИТМАХ РЕШЕНИЯ БЛОЧНЫХ ЗАДАЧ ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ ПРИМЕНИТЕЛЬНО К ПАКЕТУ РЕАЛИЗУЮЩИХ ИХ ПРОГРАММ

Р.А.Звягина

В пакете основных процедур, реализующих на ЭВМ метод последовательного улучшения [1,2] в случае, когда матрица системы ограничений в задаче линейного программирования обладает иерархически разветвленной блочностью [3], можно выделить три группы, так или иначе учитывающие эту специфику. Первая - преобразование квадратной невырожденной матрицы, наследующей структуру исходной, в блочно-треугольную [4] (обновление базиса), вторая - переход к новому базису заменой некоторого столбца "лучшим" (итерация с тем или иным, например мультипликативным, представлением матрицы, "обратной" к базисной). Наконец, третья группа программ приводит исходную информацию о задаче к виду, удобному для ее решения, в частности, извлекает из исходной иерархии блоков порядок исключения "лишних" ненулевых элементов при обновлении базиса [5], обеспечивая по возможности наименьшее искажение исходной структуры, кроме того, устанавливает порядок перебора главных подматриц на диагонали в преобразованной базисной матрице, проявляя тем самым ее блочную треугольность [6,7] в процессе решения систем линейных уравнений на каждой итерации. Однократное (для задачи) построение этих порядков унифицирует и значительно сокращает просмотровые операции в многократно повторяющихся процедурах обновления и итерации.

Двухэтапное решение задачи (вовсе не связанное с ее спецификой) автоматически выявляет совместность или несовместность системы ограничений. В последнем случае "подавление" суммы относительных невязок проводится до минимального уровня, и поиск оптимального относительно исходной целевой функции решения продолжается в условиях скорректированной соответственно этому уровню правой части системы.

§I. Постановка задачи и общая схема алгоритма

I. Пусть $A=A[M,N]$ - матрица с множествами $M=\{1,2,\dots,m\}$ номеров строк и $N=\{1,2,\dots,n\}$ номеров столбцов, $c[N]$ - матрица-строка, $b[M]$ - матрица-столбец. Задача линейного программирования, рассматриваемая здесь в одной из канонических форм, к которой сводится любая другая, состоит в том, чтобы минимизировать линейную функцию $c[N]\cdot x[N]$ при следующих условиях на искомый столбец $x[N]=(x_1,x_2,\dots,x_n)^T$:

I) $x_j \geqslant 0,\ j\in N,$

2) $x_j \leqslant d_j\ (d_j \geqslant 0),\ j\in N_b \subset N,$

3) $A[M,N]\cdot x[N] = b[M].$

При заданном множестве $P=\{1,2,\dots,p\}$, содержащем элемент $\bar{k}$, для которого $M^{\bar{k}}=M,\ N^{\bar{k}}=N$, предполагается, что все ненулевые элементы матрицы $A[M,N]$ заключены в попарно-непересекающихся клетках

$$A[M_k,N_k]\quad (M_k\subset M,\ N_k\subset N),\qquad k\in P,$$

упорядоченных в иерархическую структуру: при любом $k\in P$, в частности при $k=\bar{k}$, в матрице

$$A[M^k,N^k]=\left[\begin{array}{c|c} A[M^k\setminus M_k,\ N_k] & 0 \\ \hline A[M_k,N_k] & A[M_k,\ N^k\setminus N_k] \end{array}\right]$$

клетки $A[M^k\setminus M_k,\ N_k]$ и $A[M_k,N^k\setminus N_k]$ на диагонали распадаются на независимые блоки $A[M^\tau,N^\tau],\ \tau\in Z_{\sigma|k|}\subset P$, соответственно при $\sigma=-1$ и $\sigma=1$. В случае $Z(k)\equiv Z_{-|k|}\cup Z_{|k|}\neq\varnothing$ очередная ступень иерархии строится путем замены k, в частности $k=\bar{k}$, последовательно на каждый из элементов $\tau\in Z(k)$. Процесс обрывается на концевых блоках ($Z(k)=\varnothing$), которые, в свою очередь, могут обладать некоторой спецификой, например, быть узкоблочной, транспортной, двухкомпонентной или редко заполненной матрицей.

2. Итерация. Предположим, что известны множества J и $\bar{N}$ $(J \subset \bar{N} \subset N,\ \bar{N} \setminus J \subset N_b)$, при которых $A[M,J]$ - квадратная невырожденная матрица, а столбец $x[J]$, определяемый системой

$$A[M,J] \cdot x[J] = b[M] - \sum_{j \in \bar{N} \setminus J} d_j \cdot A[M,j], \qquad (\mathrm{I.I})$$

неотрицательный и $x_j \le d_j$ для всех $j \in J \cap N_b$. Дополняя $x[J]$ компонентами

$$x_j = d_j,\ j \in \bar{N} \setminus J, \qquad x_j = 0,\ j \in N \setminus \bar{N},$$

получим допустимое базисное решение $x[N]$. Если при этом для строки $y[M] = (y_1, y_2, \ldots, y_m)$, определяемой системой

$$y[M] \cdot A[M,J] = c[J], \qquad (\mathrm{I.2})$$

выполнены условия

$$\delta_j \cdot (y[M] \cdot A[M,j] - c[j]) \le 0,\ j \in N, \qquad (\mathrm{I.3})$$

где

$$\delta_j = \begin{cases} -\mathrm{I}, \text{ если } j \in \bar{N} \setminus J, \\ \mathrm{I}, \text{ если } j \in N \setminus (\bar{N} \setminus J), \end{cases}$$

то $x[N]$ - оптимальное решение.

На ν -й итерации с множествами J и $\bar{N}$ выявляется номер $j_\nu \in N \setminus J$, на котором нарушается условие (I.3), затем по решению $g[J]$ системы

$$A[M,J] \cdot g[J] = A[M,j_\nu] \qquad (\mathrm{I.4})$$

и $g[j_\nu] = -1$ определяется верхняя граница параметра $\xi \ge 0$ в неравенствах

$$\begin{aligned} & x[J \cup \{j_\nu\}] - \xi \cdot \delta_{j_\nu} \cdot g[J \cup \{j_\nu\}] \ge 0, \\ & x_j - \xi \cdot \delta_{j_\nu} \cdot g[j] \le d_j,\ j \in (J \cup \{j_\nu\}) \cap N_b. \end{aligned} \qquad (\mathrm{I.5})$$

Если величина ξ не ограничена сверху, то при $g[j] = 0$, $j \in N \setminus (J \cup \{j_\nu\})$, значение целевой функции не ограничено на луче $x[N] - \xi \cdot \delta_{j_\nu} \cdot g[N]$, $\xi \ge 0$. В противном случае определяется номер $j(\nu) \in J \cup \{j_\nu\}$, на котором величина ξ достигает максимума $\bar{\xi}$ в неравенствах (I.5). Новое базисное решение $x^\nu[N] = x[N] - \bar{\xi} \cdot \delta_{j_\nu} \cdot g[N]$ удовлетворяет системе (I.I) с заменой J и $\bar{N}$ соответственно на

$J^{\nu} = (J \cup \{j_{\nu}\}) \setminus \{j(\nu)\}$ и $N^{\nu} = J^{\nu} \cup \{j \in (N \setminus J^{\nu}) \cap N_{\ell} : x^{\nu}[j] = d_j\}$.

В случае $j(\nu) \in J$ вычисляется "левый" преобразователь

$$\ell_{\nu} = E[J,J] - \frac{1}{g[j(\nu)]} \cdot \Big(g[J] - E[J, j(\nu)] \Big) \cdot E[j(\nu), J]$$

матрицы $A^{-1}[J,M]$, отличающийся от единичной матрицы $E[J,J]$ одним столбцом. Мультипликатор ℓ_{ν} либо запоминается в последовательности аналогичных множителей $\ell_1, \ell_2, \ldots, \ell_{\nu-1}$ (мультипликативные алгоритмы с блочным начальным базисом $A[M,J']$), либо используется для фактического преобразования всей обратной матрицы $A^{-1}[J,M]$ (модифицированный симплекс-метод) или ее части (алгоритм для узкоблочной матрицы с горизонтальным окаймлением [2,13]).

Через определенное число итераций, например, $\bar{\nu} = \frac{1}{3} \cdot m + m'$, где m' – число ортов в исходном базисе $A[M,J']$, происходит обновление базиса $A[M, J^{\bar{\nu}}]$: перевод его на роль $A[M,J']$ и преобразование в блочно-треугольную матрицу.

3. Начало процесса и совместность системы ограничений. Вместо множества N рассмотрим $N \cup N'$ при $N' = \{n+1, n+2, \ldots, n+m\}$. Если списки J и $\bar{N}$ в начальный момент не заданы, то при $\bar{N} = J = N'$ для каждого $i \in M$ полагаем

$$\left.\begin{array}{l} A[M, n+i] = E[M,i], \\ c[n+i] = 0, \quad d_{n+i} = 0, \end{array}\right\} \quad \text{если} \quad b[i] = 0,$$

$$\left.\begin{array}{l} A[M, n+i] = E[M,i] \cdot \operatorname{sign} b[i], \\ c[n+i] = \dfrac{1}{|b[i]|}, \end{array}\right\} \quad \text{если} \quad |b[i]| > 0.$$

Задача решается в два этапа с заменой на первом этапе $c[j]$ на 0 для всех $j \in N$: выбор допустимого (оптимального относительно $N \cup N'$), а затем оптимального (относительно N) решения. В конце первого этапа получается столбец $\bar{x}[N]$, и если $\bar{x}_j = 0$, $j \in J \cap N' \neq \varnothing$, то решение хотя и вырожденное, но допустимое. Переход ко второму этапу с множеством J в качестве начального безопасен, если положить $c[j] = 0$, $d_j = 0$ для всех $j \in J \cap N'$.

В случае $\bar{x}_j > 0$ для некоторых $j \in J \cap N'$ система несовместна. За счет замены $b[M]$ на

$$b'[M] = b[M] - \sum_{j \in J \cap N', \bar{x}_j > 0} \bar{x}_j \cdot A[M,j]$$

система становится совместной, и можно переходить ко второму этапу решения измененной задачи в условиях предыдущего случая: $c[j]=0,\ d_j=0,\ x_j=0$ для всех $j \in J \cap N'$.

§2. Преобразование структуры

I. Предположим, что множество P состоит из различных ненулевых чисел. При любом $\alpha \in P$ знак элемента $\tau \in Z(\alpha)$ будем использовать для указания его принадлежности подмножеству $Z_{-|\alpha|}$ или $Z_{|\alpha|}$ множества $Z(\alpha)$: $sign\,\tau = \sigma$, если $\tau \in Z_{\sigma|\alpha|}$, $\sigma = -1, 1$. Каждому $\alpha \in P$ поставим в соответствие число t элементов в последовательности

$$\alpha = \alpha(t), \alpha(t-1), \ldots, \alpha(1), \alpha(0) = \bar{k}, \qquad (2.I)$$

не считая $\alpha(0)$, где $\alpha(i) \in Z(\alpha(i-1))$ для $i = t, t-1, \ldots$ $\ldots, 1$. Обозначим через $\bar{t}$ наибольшую из величин t в (2.I) по всем $\alpha(t) \in P$. Для каждого $\alpha(t) \in P$ вычислим

$$\rho_{\alpha(t)} = \sum_{i=1}^{t} 2^{\bar{t}-i} \cdot sign\ \alpha(i), \quad \rho_{\bar{k}} = 0$$

и положим

$$V_\rho = \{\alpha \in P : \rho_\alpha = \rho\}, \quad \rho = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots, \pm(2^{\bar{t}}-1). \qquad (2.2)$$

Из семейства (2.2) выбросим все пустые множества V_ρ, а оставшиеся $V_{\rho_s} \equiv U_s$ перенумеруем индексами $s = 1, 2, \ldots, \ell < 2^{\bar{t}+1}$ в порядке возрастания ρ_s. Блочная треугольность преобразованной базисной матрицы $A[M, J']$ с главными подматрицами на диагонали, занумерованными в соответствии с исходной блочной структурой, проявляется за счет перебора множеств (уровней) U_ρ в порядке возрастания $\rho = 1, 2, \ldots, \ell$ при решении системы (I.2) и в порядке убывания $\rho = \ell, \ell-1, \ldots, 1$ при решении системы (I.4). Порядок перебора номеров $\alpha \in U_\rho$ при любом ρ в пределах $1 \le \rho \le \ell$ произвольный [6].

2. Для каждого $k \in P$ определим зону Z^k_σ знака $\sigma =$ $= -I, I$ как объединение множеств (сечений)

$$S_\sigma^k(1) = Z_{\sigma|k|}, \quad S_\sigma^k(t) = \bigcup_{\tau \in S_\sigma^k(t-1)} Z_{\sigma|\tau|},$$
$$t = 2, 3, \ldots, t_\sigma^k. \tag{2.3}$$

Здесь t_σ^k - наибольший номер, при котором $S_\sigma^k(t_\sigma^k) \neq \emptyset$. Это определение распространим на зону $Z_{-1}^0 = Z_{-1}^{\bar{k}} \cup \{\bar{k}\}$ (для $0 \notin P$), полагая $S_{-1}^0(1) = \{\bar{k}\}$ в последовательности (2.3) при $k = 0$, $\sigma = -1$. Заметим, что сечение $S_\sigma^k(t)$ зоны Z_σ^k для любого $k \in U_\rho$ ($1 \leq \rho \leq \ell$) и любого t в пределах $1 \leq t \leq t_\sigma^k$ целиком содержится [7] в уровне U_{ρ_t} при некотором ρ_t в пределах $1 \leq \rho_t < \rho$, если $\sigma = -1$, или в пределах $\rho < \rho_t \leq \ell$, если $\sigma = 1$. Это свойство разбиения $U_\rho, \rho = 1, 2, \ldots, \ell$, множества P можно использовать для алгоритмического вычисления зоны Z_σ^k при любых $k \in P \cup \{0\}$ и $\sigma = -1, 1$ $(Z_1^0 = \emptyset)$.

Построенное на основе определения зоны знака $\sigma = \pm 1$ семейство множеств (слоев)

$$L_1 = \{0\}, \quad L_s = \Big\{\tau \in \bigcup_{k \in L_{s-1}} Z_{(-1)^{s-1}}^k : Z_{(-1)^s}^\tau \neq \emptyset\Big\}, \tag{2.4}$$
$$s = 2, 3, \ldots, r,$$

где r - наибольший номер, при котором $L_r \neq \emptyset$, служит основой учета исходной блочности при обновлении любого базиса $A[M, J'], J' \subset N$. Процесс исключения "лишних" ненулевых элементов в подматрицах $A[M_\tau, N^\tau \cap J']$ или $A[M^\tau, N_\tau \cap J']$ матрицы $A[M, J']$ определяется следующим порядком перебора номеров $\tau \in P$:

$$\tau \in S_{(-1)^s}^k(t), \quad t = t_{(-1)^s}^k, \ldots, 2, 1,$$
$$k \in L_s, \quad s = 1, 2, \ldots, r, \tag{2.5}$$

т.е. номера k в пределах слоя L_s и номера τ в пределах сечения $S_{(-1)^s}^k(t)$ перебираются в произвольном порядке, слои L_s - строго по возрастанию $s = 1, 2, \ldots, r$, а сечения $S_{(-1)^s}^k(t)$ зоны $Z_{(-1)^s}^k$ - строго по убыванию t в пределах $1 \leq t \leq t_{(-1)^s}^k$ при каждом $k \in L_s$ и $1 \leq s \leq r$.

§3. Обновление базиса

I. Прежде всего в матрице $A[M,J']$ "вычеркиваются" орты – однокомпонентные столбцы, т.е. выделяются множества $I^0 \subset M$, $J^0 \subset J'$ таким образом, что в представлении

$$A[M,J'] = \left[\begin{array}{c|c} A[I^0,J^0] & 0 \\ \hline A[M \setminus I^0, J^0] & A[M \setminus I^0, J' \setminus J^0] \end{array}\right] \qquad (3.I)$$

нижняя правая клетка – диагональная матрица. Используя семейства (2.4), (2.5), требуется преобразовать клетку $A[I^0,J^0]$ в блочно-треугольную матрицу

$$D[I^0,J^0] = T[I^0,I^0] \cdot A[I^0,J^0] \cdot R[J^0,J^0] \qquad (3.2)$$

с главными подматрицами $D[I_\tau, J_\tau]$, $\tau \in P$, на диагонали. При этом

$$I_\tau \subset M_\tau \cap I^0, \quad \tau \in P, \qquad \bigcup_{\tau \in P} I_\tau = I^0,$$

$$J_\tau \subset N_\tau \cap J^0, \quad \tau \in P, \qquad \bigcup_{\tau \in P} J_\tau = J^0,$$

$$I_\tau \cap I_k = \varnothing, \quad J_\tau \cap J_k = \varnothing, \quad \tau \neq k, \quad \tau \in P, \; k \in P,$$

и в представлении (3.2) доступны в явном виде лишь матрица $A[I^0,J^0]$, преобразования $T[I^0,J^0]$ и $R[J^0,J^0]$ в мультипликативной форме, а также схемы решения систем с матрицей $D[I_\tau, J_\tau]$, например $D^{-1}[J_\tau, I_\tau]$, при любом $\tau \in P$.

2. Общая схема обновления. В качестве промежуточного базиса для элемента $k = 0$, которым исчерпывается слой L_1, выберем всю матрицу $A[I^0,J^0] \equiv A_k[I_{0k}, J_{0k}]$, считая на основе (3.I) множество I_{1k} номеров исключаемых по этому базису строк пустым. Принимая во внимание лишь блочность относительно зоны Z^k_{-1} и игнорируя в этом слое распадение клеток $A[M_\tau \cap I_{0k}, (N^\tau \setminus N_\tau) \cap J_{0k}]$ на независимые блоки $A[M^\alpha \cap I_{0k}, N^\alpha \cap J_{0k}]$, $\alpha \in Z_{|\tau|}$, при любом $\tau \in Z^k_{-1}$ (рис.I), положим $I_{0\tau} = M_\tau \cap I_{0k}$, $\tau \in Z^k_{-1}$, $k \in L_1$. По определению блочной структуры для любого $\tau \in Z^k_{-1}$ в полосе $A[I_{0\tau}, J_{0k}]$ отлична от нуля лишь часть $A[I_{0\tau}, N^\tau \cap J_{0k}]$, включающая блоки $A[M^\alpha \cap I_{0k}, N^\alpha \cap J_{0k}]$, $\alpha \in Z_{|\tau|}$, в случае $Z^\tau_1 \neq \varnothing$.

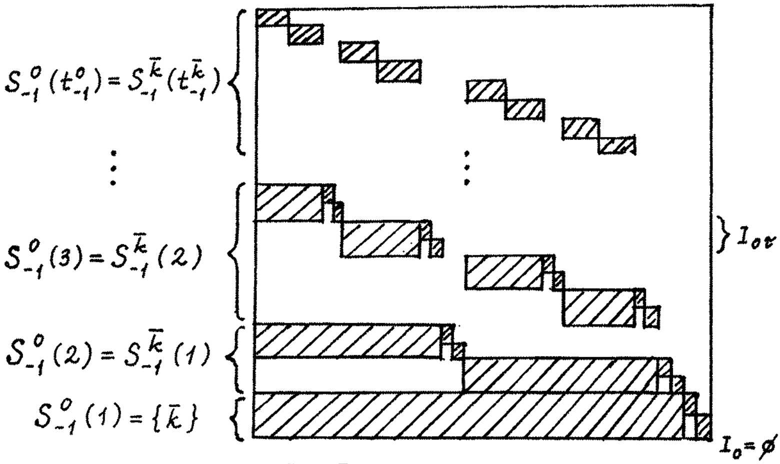


Рис.I

Для каждого $\tau \in Z^{k}_{-1}$, $k \in L_1$, начиная с $\tau \in S^{k}_{-1}(t^{k}_{-1})$, для которых $R_\tau[J^0, J^0] = E[J^0, J^0]$, в полосе

$$A_\tau[I_{o\tau}, N^\tau \cap J_{ok}] = A[I_{o\tau}, N^\tau \cap J_{ok}] \cdot R_\tau[N^\tau \cap J_{ok}, N^\tau \cap J_{ok}] \qquad (3.3)$$

с линейно-независимыми строками можно выбрать промежуточный базис $A_\tau[I_{o\tau}, J_{o\tau}]$ с множеством номеров столбцов

$$J_{o\tau} \subset N_{o\tau} = (N^\tau \cap J_{ok}) \setminus \Big(\bigcup_{\alpha \in Z^{\tau}_{-1}} J_{o\alpha} \Big). \qquad (3.4)$$

Здесь в представлении

$$R_\tau[J^0, J^0] = \prod_{i = t^{\tau}_{-1}, \dots, 2, 1} \Big(\prod_{\alpha \in S^{\tau}_{-1}(i)} \tilde R_\alpha [J^0, J^0] \Big) \qquad (3.5)$$

произведение по множеству $S^{\tau}_{-1}(i)$ перестановочно при каждом i, строго убывающем от t^{τ}_{-1} до I. В случае $Z^{\tau}_{-1} = \varnothing$, в частности для $\tau \in S^{k}_{-1}(t^{k}_{-1})$, формулы (3.3)-(3.5) определены, а при $\tau \in S^{k}_{-1}(t)$, $1 \le t < t^{k}_{-1}$, зона Z^{τ}_{-1} содержится в объединении сечений $S^{k}_{-1}(i)$, $t < i \le t^{k}_{-1}$, зоны Z^{k}_{-1} ($k \in L_1$). Исключение в полосе (3.3) столбцов с номерами $j \in J_{1\tau} = N_{o\tau} \setminus J_{o\tau}$ обеспечивается выбором клетки

$$\tilde R_\tau [J_{o\tau}, J_{1\tau}] = - A^{-1}_\tau [J_{o\tau}, I_{o\tau}] \cdot A_\tau [I_{o\tau}, J_{1\tau}] \qquad (3.6)$$

в правостороннем невырожденном мультипликаторе

$$\tilde R_\tau [J^0, J^0] = E[J^0, J^0] + E[J^0, J_{o\tau}] \cdot \tilde R_\tau [J_{o\tau}, J_{1\tau}] \cdot E[J_{1\tau}, J^0]. \qquad (3.7)$$

Таким образом, процесс (3.3)-(3.7) определен для всей зоны

Z^k_{-1} ($k \in L_1$) , если ее сечения (2.3) при $\sigma = -1$ перебирать в порядке убывания t от t^k_{-1} до I (перебор $\tau \in S^k_{-1}(t)$, как уже отмечалось, произвольный при любом t в пределах $1 \le t \le t^k_{-1}$). В результате для каждого $\tau \in Z^k_{-1}$, $k \in L_1$, можно положить $J_\tau = N_\tau \cap J_{o\tau}$ (рис.2). Если $Z^\tau_1 = \emptyset$, то $J_{o\tau} = J_\tau$ и, следовательно, $I_\tau = I_{o\tau}$.

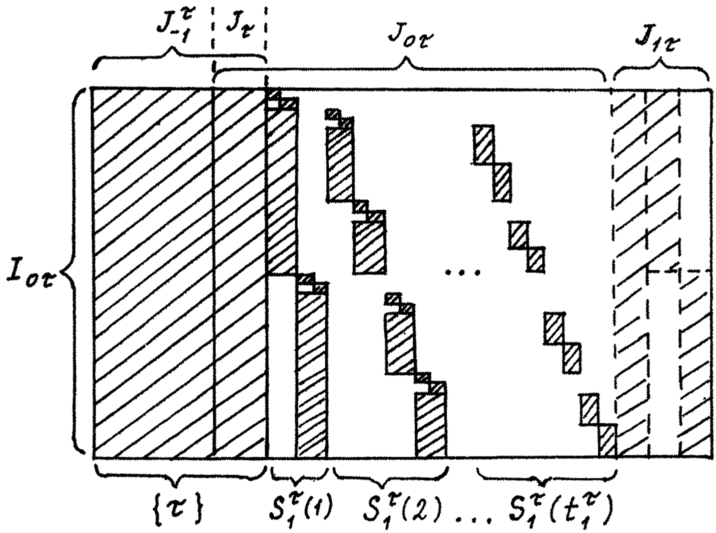


Рис.2

Если $Z^\tau_1 \ne \emptyset$ для некоторых $\tau \in Z^k_{-1}, k \in L_1$ (а именно из таких τ состоит слой L_2), то базисную матрицу $A_\tau[I_{o\tau}, J_{o\tau}]$ естественно преобразовать в блочно-треугольную, поскольку ее часть $A_\tau[I_{o\tau}, J_{o\tau} \setminus J_\tau]$, совпадающая с $A[I_{o\tau}, J_{o\tau} \setminus J_\tau]$, обладает блочной структурой относительно зоны Z^τ_1 , аналогичной (с точностью до транспонирования) структуре матрицы $A[I_{ok}, J_{ok}]$ относительно зоны Z^k_{-1} ($k \in L_1$) при $I_k = \emptyset$ (ср. рис.I и часть $A_\tau[I_{o\tau}, J_{o\tau}]$ на рис.2).

3. Переход к следующему слою. Перебирая $k \in L_2$ в произвольном порядке, для каждого $\tau \in Z^k_1$ полагаем по симметрии $J_{o\tau} = N_\tau \cap J_{ok}$, игнорируя в этом слое распадение клеток

$A[(M^{\tau} \setminus M_{\tau}) \cap I_{ok}, N_{\tau} \cap J_{ok}]$ на независимые блоки $A[M^{\alpha} \cap I_{ok}, N^{\alpha} \cap J_{ok}]$, $\alpha \in Z_{-|\tau|}$, при любом $\tau \in Z_1^k$. Начиная с $\tau \in S_1^k(t_1^k)$, в полосе

$$A_{\tau}[M^{\tau} \cap I_{ok}, J_{o\tau}] = T_{\tau}[M^{\tau} \cap I_{ok}, M^{\tau} \cap I_{ok}] \cdot A[M^{\tau} \cap I_{ok}, J_{o\tau}] \quad (3.8)$$

с линейно-независимыми столбцами, включающей в случае $Z_{-1}^{\tau} \neq \emptyset$ блоки $A[M^{\alpha} \cap I_{ok}, N^{\alpha} \cap J_{ok}]$, $\alpha \in Z_{-|\tau|}$, выделяем базис $A_{\tau}[I_{o\tau}, J_{o\tau}]$ с множеством номеров строк

$$I_{o\tau} \subset M_{o\tau} = (M^{\tau} \cap I_{ok}) \setminus \left(\bigcup_{\alpha \in Z_1^{\tau}} I_{o\alpha} \right). \quad (3.9)$$

Здесь в представлении

$$T_{\tau}[I^o, I^o] = \prod_{i=1,2,\ldots,t_1^{\tau}} \left(\prod_{\alpha \in S_1^{\tau}(i)} \widetilde{T}_{\alpha}[I^o, I^o] \right) \quad (3.10)$$

произведение по множеству $S_1^{\tau}(i)$ перестановочно при каждом i, строго возрастающем от I до t_1^{τ}. В случае $Z_1^{\tau} = \emptyset$, в частности для $\tau \in S_1^k(t_1^k)$, формулы (3.8)-(3.10) определены, а при $\tau \in S_1^k(t)$, $1 \le t < t_1^k$, зона Z_1^{τ} содержится в объединении сечений $S_1^k(i)$, $t < i \le t_1^k$, зоны Z_1^k при каждом $k \in L_2$. В очередном левостороннем мультипликаторе

$$\widetilde{T}_{\tau}[I^o, I^o] = E[I^o, I^o] + E[I^o, I_{1\tau}] \cdot \widetilde{T}_{\tau}[I_{1\tau}, I_{o\tau}] \cdot E[I_{o\tau}, I^o] \quad (3.11)$$

при $I_{1\tau} = M_{o\tau} \setminus I_{o\tau}$ выбор блока

$$\widetilde{T}_{\tau}[I_{1\tau}, I_{o\tau}] = -A_{\tau}[I_{1\tau}, J_{o\tau}] \cdot A_{\tau}^{-1}[J_{o\tau}, I_{o\tau}] \quad (3.12)$$

обеспечивает исключение клетки $A_{\tau}[I_{1\tau}, J_{o\tau}]$ в полосе (3.8). Таким образом, процесс (3.8)-(3.12) также определен для всей зоны Z_1^k, если ее сечения (2.3) при $\sigma = 1$ перебирать в порядке убывания t от t_1^k до I (перебор $\tau \in S_1^k(t)$ произвольный при любом t в пределах $1 \le t \le t_1^k$). В результате для каждого $\tau \in Z_1^k$, $k \in L_2$, можно положить $I_{\tau} = M_{\tau} \cap I_{o\tau}$. Если $Z_{-1}^{\tau} = \emptyset$, то $I_{o\tau} = I_{\tau}$ и, следовательно, $J_{\tau} = J_{o\tau}$.

Если $Z_1^{\tau} \neq \emptyset$ для некоторых $\tau \in Z_1^k$, $k \in L_2$ (а именно из таких τ состоит слой L_3), то при каждом $k \in L_3$ матрица $A_k[I_{ok} \setminus I_k, J_{ok}] = A[I_{ok} \setminus I_k, J_{ok}]$ обладает структурой относительно зоны Z_{-1}^k, аналогичной исходной (рис.I с заменой $\bar{k}$ на k). Переходя таким образом от слоя L_s к L_{s+1}

($1 \le s \le z$) с учетом четности его номера s , найдем, что в представлении (3.2) левостороннее преобразование $T[I^0, I^0]$ при определениях (3.10)-(3.12) является произведением матриц $T_\tau[I^0, I^0]$, $\tau \in L_s$, перестановочных при каждом s - четном и строго убывающем от $2 \cdot [z/2]$ до 2, а правостороннее преобразование $R[J^0, J^0]$ при определениях (3.5)-(3.7) является произведением матриц $R_\tau[J^0, J^0]$, $\tau \in L_s$, перестановочных при каждом s - нечетном и строго возрастающем от I до $2 \cdot [(z-1)/2] + 1$. Здесь $[\alpha]$ - целая часть числа α, не превосходящая α.

4. Вычислительная сторона формул (3.3)-(3.12). Если полоса $A[I_\tau, N_\tau \cap J_{0k}]$, $\tau \in Z^k_{-1}$, или полоса $A[M_\tau \cap I_{0k}, J_\tau]$, $\tau \in Z^k_1$, является концевым блоком с некоторой спецификой, то разбиение множества $N_\tau \cap J_{0k}$ или множества $M_\tau \cap I_{0k}$ на базисную и небазисную части и упорядочение множеств $I_\tau = I_{0\tau}$ и $J_\tau = J_{0\tau}$, позволяющее легко решать системы с матрицей $A[I_\tau, J_\tau]$, а также способ вычисления и хранения мультипликатора (3.7) или (3.11), опираются на специальные алгоритмы [2,12]. В общем случае при "неквадратности" полосы $A_\tau[I_{0\tau}, N_{0\tau}]$ или $A_\tau[M_{0\tau}, J_{0\tau}]$ выбор множества $J_{0\tau}$ и вычисление клетки (3.6) или множества $I_{0\tau}$ и клетки (3.12) происходят одновременно в процессе преобразования [8] начальной симплекс-таблицы $A_\tau[I_{0\tau}, N_{0\tau}]$ или $A_\tau[M_{0\tau}, J_{0\tau}]$. Здесь метод исключения (типа метода Гаусса [11]) с выбором главного элемента соответственно в строке или в столбце применяется к прямоугольной матрице с линейно-независимыми строками или столбцами. Если при этом $I_\tau = I_{0\tau}$, $J_\tau = J_{0\tau}$, то попутно вычисляется $D^{-1}[J_\tau, I_\tau] = A_\tau^{-1}[J_\tau, I_\tau]$ в матричной или мультипликативной форме. Последняя процедура выполняется и в случае $N_{0\tau} = J_\tau$ или $M_{0\tau} = I_\tau$.

Далее, при любом $s = 1, 2, \ldots, z$ в конце преобразований в зонах $Z^k_{(-1)^s}$ для каждого $k \in L_s$ в дополнение к уже вычисленному в предыдущем слое множеству $I_k = M_k \cap I_{0k}$ или $J_k = N_k \cap J_{0k}$ вычисляется множество

$$J_k = J_{0k} \setminus \left(\bigcup_{\tau \in Z^k_{(-1)^s}} J_{0\tau} \right) \quad \text{или} \quad I_k = I_{0k} \setminus \left(\bigcup_{\tau \in Z^k_{(-1)^s}} I_{0\tau} \right)$$

соответственно при нечетном или при четном s ($I_0 = \emptyset$ при $s = 1$), и для матрицы

$$D[I_k, J_k] = T_k[I_k, I_1^k] \cdot A[I_1^k, J_{-1}^k] \cdot R_k[J_{-1}^k, J_k] \qquad (3.13)$$

в случае $I_k \neq \emptyset, J_k \neq \emptyset$ вычисляется обратная в матричной или мультипликативной форме. Здесь

$$I_1^k = I_k \cup \left(\bigcup_{\tau \in Z_1^k} I_{0\tau} \right), \quad J_{-1}^k = J_k \cup \left(\bigcup_{\tau \in Z_{-1}^k} J_{0\tau} \right), \quad k \in P.$$

С целью обоснования формулы (3.13) при нечетном $s \geq 1$ для любых $k \in L_s$ и $\tau \in Z_{-1}^k$ разобьем множество $N^\tau \cap J_{0k}$ (рис.2) на части J_{-1}^τ, $J_{0\tau} \setminus J_\tau$, $J_{1\tau}$. Правую часть (3.3) представим в виде трех слагаемых согласно этому разбиению. Умножая (3.3) справа на $E[N^\tau \cap J_{0k}, J_{-1}^\tau]$, получим выражение

$$A_\tau[I_{0\tau}, J_{-1}^\tau] = A[I_{0\tau}, J_{-1}^\tau] \cdot R_\tau[J_{-1}^\tau, J_{-1}^\tau]. \qquad (3.14)$$

Если номер $\tau \in Z_{-1}^k$, $k \in L_s$, переходит в слой L_{s+1}, то матрица (3.14) на $(s+1)$-м шаге подвергается слева преобразованию $T_\tau[I_1^\tau, I_1^\tau]$ – вырезке из (3.10), причем $I_{0\tau} = I_1^\tau$, откуда с заменой τ на k следует (3.13). При четном s (по симметрии) для любых $k \in L_s$ и $\tau \in Z_1^k$ имеем

$$A_\tau[I_1^\tau, J_{0\tau}] = T_\tau[I_1^\tau, I_1^\tau] \cdot A[I_1^\tau, J_{0\tau}]. \qquad (3.15)$$

Если номер $\tau \in Z_1^k$, $k \in L_s$, переходит в слой L_{s+1}, то матрица (3.15) подвергается справа преобразованию $R_\tau[J_{-1}^\tau, J_{-1}^\tau]$ при $J_{-1}^\tau = J_{0\tau}$, откуда следует (3.13) с заменой τ на k.

§4. Решение систем с блочной матрицей

I. Если матрица $A[M,J]$ получается из $A[M,J']$ в процессе ν итераций, то

$$A^{-1}[J,M] = \mathcal{E}_\nu \cdot \mathcal{E}_{\nu-1} \cdot \ldots \cdot \mathcal{E}_1 \cdot A^{-1}[J', M].$$

Тогда решение систем (I.4) между обновлениями базиса сводится к решению систем

$$A[M,J'] \cdot h[J'] = A[M, j_\nu], \quad 1 \leq \nu \leq \bar{\nu},$$

с одной и той же матрицей $A[M,J']$ и к вычислению произведения

$$g[J] = \mathcal{E}_\nu \cdot \mathcal{E}_{\nu-1} \cdot \ldots \cdot \mathcal{E}_1 \cdot h[J'].$$

С учетом разбиения (3.I) столбец $h[J^0]$ получается как решение системы

$$A[I^0,J^0]\cdot h[J^0] = A[I^0,j_\nu],\qquad (4.1)$$

а часть $h[J'\setminus J^0]$ столбца $h[J']$ – как решение системы с диагональной матрицей:

$$A[M\setminus I^0,J'\setminus J^0]\cdot h[J'\setminus J^0]=A[M\setminus I^0,j_\nu]-A[M\setminus I^0,J^0]\cdot h[J^0].$$

Из представления (3.2) следует, что

$$h[J^0]=R[J^0,J^0]\cdot\tilde{h}[J^0]=\sum_{\tau\in P} R[J^0,J_\tau]\cdot\tilde{h}[J_\tau],\qquad (4.2)$$

где при $\alpha_1[I^0]=T[I^0,I^0]\cdot A[I^0,j_\nu]$ столбец $\tilde{h}[J^0]$ – решение системы

$$D[I^0,J^0]\cdot\tilde{h}[J^0] = \alpha_1[I^0].\qquad (4.3)$$

Если предполагать матрицу $D[I^0,J^0]$ известной, то при вычисленных $\tilde{h}[J_\alpha],\alpha\in U_s, 1\le s<\rho$, в частности при $\rho=1$, части $\tilde{h}[J_k]$, $k\in U_\rho$, можно получать, решая в порядке возрастания $\rho=1,2,\dots,\ell$, независимые системы

$$D[I_k,J_k]\cdot\tilde{h}[J_k]=\alpha_\rho[I_k]-D[I_k,J_{-1}^k\setminus J_k]\cdot\tilde{h}[J_{-1}^k\setminus J_k]\qquad (4.4)$$

и обеспечивая следующий шаг ($1\le\rho<\ell$) вычислением столбца

$$\alpha_{\rho+1}[I^0]=\alpha_\rho[I^0]-\sum_{k\in U_\rho}E[I^0,I_1^k\setminus I_k]\cdot D[I_1^k\setminus I_k,J_{-1}^k]\cdot\tilde{h}[J_{-1}^k].\qquad (4.5)$$

Алгоритм решения системы (4.I) выведем из процесса (4.4), (4.5), (4.2) с учетом предположений о неполной хранимой информации в представлении (3.2), т.е. в формулах (4.4)-(4.5) избавимся от всех клеток матрицы $D[I^0,J^0]$, кроме ее главных подматриц $D[I_k,J_k]$, $k\in P$. Предварительно заметим, что

$$R[J^0,J_\tau]=E[J_0,J_{-1}^\tau]\cdot R_\tau[J_{-1}^\tau,J_\tau],\quad \tau\in P,\qquad (4.6)$$

$$T[I_\tau,I^0]=T_\tau[I_\tau,I_1^\tau]\cdot E[I_1^\tau,I^0],\quad \tau\in P.\qquad (4.7)$$

Эти равенства следуют из определения преобразований $R[J^0,J^0]$, $T[I^0,I^0]$ и множеств $J_{-1}^\tau, I_1^\tau, \tau\in P$, если матрицы $R_\tau[J^0,J^0]$, $T_\tau[I_0^0,I^0]$ с номерами $\tau\in P$, для которых они не определены формулами (3.5), (3.IO), считать единичными.

Для любого t в пределах $0\le t\le\ell$ положим

$$h_t[J^0]=\sum_{1\le s\le t}\ \sum_{\tau\in U_s} E[J^0,J_{-1}^\tau]\cdot R_\tau[J_{-1}^\tau,J_\tau]\cdot\tilde{h}[J_\tau]\qquad (4.8)$$

и заметим, что $h_0[J^0]=0$, а $h_\ell[J^0]=h[J^0]$. Предположим, что для некоторого $\rho \geq 1$, в частности для $\rho = 1$ и $u_0[I^0] = A[I^0, j_\nu]$, вычислен столбец $u_{\rho-1}[I^0]$ такой, что

$$\alpha_\rho[I^0] = T[I^0, I^0] \cdot u_{\rho-1}[I^0].$$

Правую часть (4.4) представим в виде

$$T[I_k, I^0] \cdot \{u_{\rho-1}[I^0] - A[I^0, J^0] \cdot R[J^0, J_{-1}^k \setminus J_k] \cdot \tilde{h}[J_{-1}^k \setminus J_k]\}$$

и покажем, что

$$R[J^0, J_{-1}^k \setminus J_k] \cdot \tilde{h}[J_{-1}^k \setminus J_k] = E[J^0, J_{-1}^k \setminus J_k] \cdot h_{\rho-1}[J_{-1}^k \setminus J_k] \qquad (4.9)$$

при каждом $k \in U_\rho$. Так как $J_{-1}^k \setminus J_k$, с одной стороны, содержится в объединении множеств J_τ, $\tau \in U_s$, $1 \leq s < \rho$ (рис.2), а с другой - при каждом $\tau \in U_s$, $1 \leq s < \rho$, либо содержит множество J_τ, либо не пересекается с ним, то левая часть (4.9) в виде слагаемых $R[J^0, J_\tau] \cdot \tilde{h}[J_\tau]$ с теми τ, для которых $J_\tau \subset J_{-1}^k \setminus J_k$, входит в правую часть (4.8) при $t = \rho - 1$. Вырезка $h_{\rho-1}[J_{-1}^k \setminus J_k]$ представима через слагаемые с этими же номерами, откуда с учетом структуры вырезок $R[J_{-1}^k \setminus J_k, J_\tau]$, $\tau \in U_s$, $1 \leq s < \rho$, из матриц (4.6) следует (4.9). В силу равенства (4.7) при $\tau = k$ и определений

$$\beta_\rho[I_1^k] = u_{\rho-1}[I_1^k] - A[I_1^k, J_{-1}^k \setminus J_k] \cdot h_{\rho-1}[J_{-1}^k \setminus J_k], \; k \in U_\rho, \qquad (4.10)$$

системы (4.4) превращаются в

$$D[I_k, J_k] \cdot \tilde{h}[J_k] = T_k[I_k, I_1^k] \cdot \beta_\rho[I_1^k], \quad k \in U_\rho. \qquad (4.11)$$

Далее, если в правой части (4.5) учесть представления

$$D[I_1^k \setminus I_k, J_{-1}^k] = T[I_1^k \setminus I_k, I^0] \cdot A[I^0, J^0] \cdot R[J^0, J_{-1}^k], \quad k \in U_\rho,$$

то на тех основаниях, что и формулу (4.9), получим соотношения

$$R[J^0, J_{-1}^k] \cdot \tilde{h}[J_{-1}^k] = E[J^0, J_{-1}^k] \cdot h_\rho[J_{-1}^k], \quad k \in U_\rho.$$

Теперь в правой части (4.5) достаточно вынести $T[I^0, I^0]$ за скобки и показать, что

$$\begin{aligned} T^{-1}[I^0, I_1^k \setminus I_k] \cdot T[I_1^k \setminus I_k, I^0] = \\ = E[I^0, I_1^k \setminus I_k] \cdot E[I_1^k \setminus I_k, I^0], \quad k \in U_\rho, \end{aligned} \qquad (4.12)$$

чтобы получить представление столбца $\alpha_{\rho+1}[I^0]$ в виде произведения матрицы $T[I^0, I^0]$ на столбец

$$u_\rho[I^0]=u_{\rho-1}[I^0]-\sum_{k\in U_\rho} E[I^0_; I^k_1\setminus I_k]\cdot A[I^k_1\setminus I_k, J^k_{-1}]\cdot h_\rho[J^k_{-1}]. \qquad (4.13)$$

В полосе $T[I^k_1\setminus I_k, I^0]$ при каждом $k\in U_\rho$ отлична от нуля разве лишь часть $T[I^k_1\setminus I_k, I^k_1\setminus I_k]$, равная произведению вырезок $\tilde{T}_\tau[I^k_1\setminus I_k, I^k_1\setminus I_k]$ (некоторые из них, возможно, единичные матрицы) из мультипликаторов (3.II) по всем $\tau\in Z^k_1$, $k\in L_s$, $s=2\cdot[\tau/2],\dots,4,2$. Поэтому

$$T[I^k_1\setminus I_k, I^0]=T[I^k_1\setminus I_k, I^k_1\setminus I_k]\cdot E[I^k_1\setminus I_k, I^0].$$

Аналогично, в силу представления

$$\tilde{T}^{-1}_\tau[I^0_, I^0]=E[I^0_, I^0]-E[I^0_, I_{1\tau}]\cdot\tilde{T}_\tau[I_{1\tau}, I_{0\tau}]\cdot E[I_{0\tau}, I^0], \qquad (4.14)$$

легко проверяемого перемножением матриц (3.II) и (4.I4), при каждом $k\in U_\rho$ в полосе $T^{-1}[I^0_, I^k_1\setminus I_k]$ отлична от нуля лишь часть $T^{-1}[I^k_1\setminus I_k, I^k_1\setminus I_k]$, равная произведению вырезок $\tilde{T}^{-1}_\tau[I^k_1\setminus I_k, I^k_1\setminus I_k]$ из матриц (4.I4) для всех $\tau\in Z^k_1$, $k\in L_s$, $s=2,4,\dots,2\cdot[\tau/2]$, т.е.

$$T^{-1}[I^0_, I^k_1\setminus I_k]=E[I^0_; I^k_1\setminus I_k]\cdot T^{-1}[I^k_1\setminus I_k, I^k_1\setminus I_k],$$

откуда следует равенство (4.I2).

Таким образом, алгоритм решения системы (4.I) сводится к вычислению столбцов (4.I0) и к решению независимых систем (4.II) в порядке возрастания $\rho=1,2,\dots,\ell$. Переход к следующему шагу обеспечивается выражением (4.8) при $t=\rho$ в рекуррентной форме

$$h_\rho[J^0]=h_{\rho-1}[J^0]+\sum_{\tau\in U_\rho} E[J^0_, J^\tau_{-1}]\cdot R_\tau[J^\tau_{-1}, J_\tau]\cdot\tilde{h}[J_\tau]$$

и формулой (4.I3).

2. Алгоритм решения системы (I.2) сводится к вычислению произведения

$$\tilde{c}\,[J']=c[J]\cdot\mathcal{E}_\nu\cdot\mathcal{E}_{\nu-1}\cdot\ldots\cdot\mathcal{E}_1$$

и к решению системы

$$y[M]\cdot A[M,J']=\tilde{c}\,[J'],$$

эквивалентной двум подсистемам (первая с диагональной матрицей):

$$y[M \setminus I^0] \cdot A[M \setminus I^0, J' \setminus J^0] = \tilde{c}\,[J' \setminus J^0],$$

$$y[I^0] \cdot A[I^0, J^0] = \tilde{c}\,[J^0] - y[M \setminus I^0] \cdot A[M \setminus I^0, J^0].$$

Алгоритм вычисления строки $y[I^0] \equiv y_1[I^0]$ по симметрии с алгоритмом вычисления столбца $h[J^0]$ сводится к решению независимых систем

$$y[I_k] \cdot D[I_k, J_k] = c_\rho[J^k_{-1}] \cdot R_k[J^k_{-1}, J_k], \quad k \in U_\rho,$$

в порядке убывания $\rho = \ell, \ell-1, \dots, 1$. Здесь

$$c_\rho[J^k_{-1}] = v_{\rho+1}[J^k_{-1}] - y_{\rho+1}[I^k_1 \setminus I_k] \cdot A[I^k_1 \setminus I_k, J^k_{-1}], \quad k \in U_\rho,$$

а вычисление строк

$$y_\rho[I^0] = y_{\rho+1}[I^0] + \sum_{k \in U_\rho} y[I_k] \cdot T_k[I_k, I^k_1] \cdot E[I^k_1, I^0],$$

$$v_\rho[J^0] = v_{\rho+1}[J^0] - \sum_{k \in U_\rho} y_\rho[I^k_1] \cdot A[I^k_1, J^k_{-1} \setminus J_k] \cdot E[J^k_{-1} \setminus J_k, J^0]$$

при $1 < \rho \leq \ell$ обеспечивает переход к следующему шагу, начиная с $y_{\ell+1}[I^0] = 0$ и

$$v_{\ell+1}[J^0] = \tilde{c}\,[J^0] - y[M \setminus I^0] \cdot A[M \setminus I^0, J^0].$$

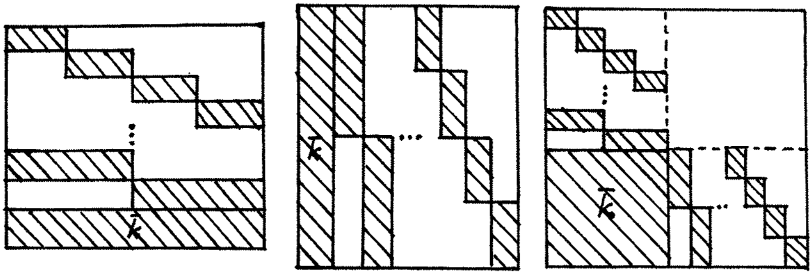
§5. Степень учета блочности и специфики концевых блоков

Из предположений

$$\Big(\bigcup_{\tau \in Z_{|k|}} M^\tau\Big) \subset M_k, \quad \Big(\bigcup_{\tau \in Z_{-|k|}} N^\tau\Big) \subset N_k, \quad k \in P,$$

заложенных в определение блочной структуры, и из типа линейных преобразований (3.5), (3.10) следует, что при обновлении базиса $A[I^0, J^0]$ все ненулевые элементы остаются в пределах клеток, определяемых парами множеств $M_\tau \cap I^0$, $N_\tau \cap J^0$, $\tau \in P$. Соотношение же количества ненулевых элементов в клетках $\tilde{R}_\tau[J_{0\tau}, J_{1\tau}]$ и $A_\tau[I_{0\tau}, J_{1\tau}]$ в выражении (3.6) (или в клетках $\tilde{T}_\tau[I_{1\tau}, I_{0\tau}]$ и $A_\tau[I_{1\tau}, J_{0\tau}]$ в выражении (3.12)), имеющих одинаковые размеры, существенно зависит как от общего характера блочности (числа перемен знаков в последовательностях (2.I) для всех $\alpha \in P$), так и от ступени иерархии, которой принадлежит блок $A[M_\tau, N_\tau]$.

Наилучший учет общей блочности в процессе обновления базиса получается при условии, что для любого $\alpha \in P \setminus \{\bar k\}$ все элементы $\alpha(t), \alpha(t-1), \dots, \alpha(1)$ из последовательности (2.I) имеют одинаковые знаки. Примеры всех классов структур, удовлетворяющих этому условию, изображены на рис.3. При этом в случае $P = Z^{\bar k}_{-1} \cup \{\bar k\}$ (рис.3,а) порядок (2.5) исключения ненулевых элементов совпадает с перебором множеств U_ρ по возрастанию $\rho = 1, 2, \dots, \ell - 1$, а в случае $P = Z^{\bar k}_1 \cup \{\bar k\}$ (рис.3,б) – по убыванию $\rho = \ell, \ell - 1, \dots, 2$. Если же $P = Z^{\bar k}_{-1} \cup \{\bar k\} \cup Z^{\bar k}_1$ (рис.3,в), то при $U_{\bar \ell} = \{\bar k\}$ порядок (2.5) совпадает с перебором U_ρ сначала по возрастанию $\rho = 1, 2, \dots, \bar\ell - 1$, а затем по убыванию $\rho = \ell, \ell - 1, \dots, \bar\ell + 1$.



а б в

Рис.3

Во всех этих случаях если блок $A[M_\tau, N_\tau]$ ($\tau \in P$) не концевой ($Z(\tau) \neq \emptyset$), то столбцы матрицы (3.3) или строки матрицы (3.8) в конечном счете являются линейными комбинациями соответственно столбцов или строк матрицы $A[M_\tau \cap \cap I^0, N_\tau \cap J^0]$, так что рассчитывать на разреженность матриц (3.6), (3.I2) не приходится, поэтому они хранятся в полном виде. То же самое относится и к концевому блоку при достаточно плотном его заполнении.

Для редко заполненного концевого блока базисная матрица $A[I_\tau, J_\tau]$ составляется по возможности из наиболее редко заполненных столбцов или строк, если это не наносит большого ущерба ее обусловленности, что позволяет упорядочением множеств I_τ, J_τ привести ее к почти треугольному виду [12]. Последнее может служить основанием для хранения клеток (3.6), (3.12) с пропусками нулей.

Если концевой блок является узкоблочной матрицей (в каждом столбце или в каждой строке не более одного ненулевого элемента), то в силу диагональности базисной матрицы $A[I_\tau, J_\tau]$ заполненность клеток (3.6), (3.12) и унуляемых частей в точности совпадают.

В случаях транспортной или двухкомпонентной специфики клетки (3.6), (3.12) не запоминаются, поскольку они используются в алгоритме лишь в процедурах умножения их слева на некоторую строку или справа на некоторый столбец. На основании правой части выражений (3.6), (3.12) это равносильно решению одной системы со специальной матрицей $A[I_\tau, J_\tau]$ или $A^T[J_\tau, I_\tau]$ и умножению унуляемой (также специальной) клетки слева на строку или справа на столбец. При этом число операций линейно зависит от размеров унуляемой части.

Пусть структура матрицы $A[M, N]$ не принадлежит ни одному из трех выделенных классов "чистых" структур, т.е. для некоторых $\alpha \in P$ элементы $\alpha(t), \alpha(t-1), \ldots, \alpha(1)$ в последовательности (2.1) имеют разные знаки. Тем не менее, если для некоторого $k \in L_s$, $1 \leq s \leq \tau$, зоны $Z^{\tau}_{(-1)^{s+1}}$ пусты для всех $\tau \in Z^{k}_{(-1)^s}$ (в частности, это верно для всех $k \in L_\tau$), то весь промежуточный базис $A_k[I_{0k}, J_{0k}]$ обладает свойствами базисов из класса "чистых" структур, для которых $P = Z^{\bar{k}}_{\sigma} \cup \{\bar{k}\}$ при $\sigma = (-1)^s$ (рис. 3, а или б). К этой же ситуации при $\sigma = -1$ относится и первый шаг обновления (по зоне Z^{0}_{-1}) в случае $Z^{\tau}_{1} = \emptyset$ для всех $\tau \in Z^{\bar{k}}_{-1}$, поскольку $J_{1\bar{k}} = \emptyset$ независимо от структуры клетки $A[M_{\bar{k}}, N \setminus N_{\bar{k}}]$. Если же зона $Z^{\tau}_{(-1)^{s+1}}$ пуста лишь для некоторых $\tau \in Z^{k}_{(-1)^s}$ ($k \in L_s$, $1 \leq s \leq \tau$), то для таких τ соотношение ненулевых элементов в матрицах (3.6) и $A_\tau[I_\tau, J_{1\tau}]$ при нечетном s или в матрицах (3.12) и $A_\tau[I_{1\tau}, J_\tau]$ при четном s остается таким же, как в случаях "чистых" структур (рис.3), т.е. зависит лишь от свойств клетки $A[M_\tau \cap I^0, N_\tau \cap J^0]$, содержащей ...емую часть.

...едположим теперь, что для некоторого $\alpha \in P$ в последо...ности (2.1) имеем $\alpha(i) = \tau < 0$, $\alpha(i+1) > 0$ $(1 \leq i < t)$.

Положим $k = 0$, если $\alpha(s) < 0$ для всех $s = i-1, i-2, \dots, 1$, или $k = \alpha(\bar{s})$, где $\bar{s}$ - наибольший из номеров $s = 1, 2, \dots, i-1$, для которых $\alpha(s) > 0$. Это значит, что для номера k выявлена по меньшей мера одна последовательность (2.I), в которой элементы, предшествующие k, имеют разные знаки. Очевидно, что $\tau \in Z^{k}_{-1}$ - ситуация п.2 в обновлении базиса ($k \in L_s$ при некотором нечетном s в пределах $1 \le s < \tau$). Из правила построения последовательности (2.I) следует, что $\alpha(i+1) \in Z^{\tau}_{1} \neq \emptyset$. Поэтому как базисная матрица $A_\tau [I_{0\tau}, J_{0\tau}]$, так и унуляемая часть $A_\tau [I_{0\tau}, J_{1\tau}]$ при $J_{1\tau} \neq \emptyset$ обладают блочной структурой относительно зоны Z^{τ}_{1} (рис. 2, 3,б). Однако если $J_\tau \neq \emptyset$, то в клетке (3.6) и блочность, и специфика концевых блоков с номерами α, для которых последовательность (2.I) пересекается с зоной Z^{τ}_{1}, пропадает полностью. С целью уменьшения этих потерь при выборе базисного множества $J_{0\tau} \subset N_{0\tau}$ следует отдавать предпочтение номеру $j \notin N_\tau$, т.е. номеру $j \in N_{\alpha(s)} \cap J_{0k}$ с как можно бо́льшим значением $s > i$ в последовательностях (2.I), пересекающих Z^{τ}_{1}. Наносимый при этом ущерб обусловленности матрицы $A_\tau [I_{0\tau}, J_{0\tau}]$ не слишком велик, если соответствующее номеру j значение главного элемента не слишком отличается по абсолютной величине от максимального. Аналогично, если $\tau = \alpha(i) > 0, \alpha(i+1) < 0, 1 \le i < t$, то положим $k = \bar{k}$ при $\alpha(s) > 0$, $s = i-1, \dots, 2, 1$, или $k = \alpha(\bar{s})$, где $\bar{s}$ - наибольший из номеров $s = 1, 2, \dots, i-1$, для которых $\alpha(s) < 0$. Очевидно, что $\tau \in Z^{k}_{1}$ ($k \in L_s$ при некотором четном s в пределах $2 \le s < \tau$). Поскольку $Z^{\tau}_{-1} \neq \emptyset$, то при выборе базисного множества $I_{0\tau} \subset M_{0\tau}$ предпочтение следует отдавать номеру $i \notin M_\tau$, т.е. номеру $i \in M_{\alpha(s)} \cap \cap I_{0k}$ с как можно бо́льшим значением $s > i$ в последовательностях (2.I), пересекающихся с зоной Z^{τ}_{-1}.

В этих условиях выбора множеств $J_{0\tau}$ или $I_{0\tau}$ блочность базиса $A_\tau [I_{0\tau}, J_{0\tau}]$ получается наиболее разветвленной, что благотворно сказывается на степени ее учета при дальнейших преобразованиях. Кроме того, если в последовательности (2.I) элементы $\alpha(i) = \tau, \alpha(i+1)$ имеют разные знаки хотя бы для одного i в пределах $1 \le i < t$ и блок $A[M_\alpha, N_\alpha]$ концевой, то при наличии в нем некоторой специфики (узкоблочной, транспортной или двухкомпонентной) начальную базисную матрицу $A[I'_\alpha, J'_\alpha]$ $(I'_\alpha \subset M_\alpha \cap I^0, J'_\alpha \subset N_\alpha \cap J^0)$ следует выбирать [4] заранее, после вычеркивания ортов: часть промежуточного блочного базиса $A_\tau[I_{o\tau}, J_{o\tau}]$ в симплекс-таблице оказывается уже выбранной. Однако при этом в блоке $A[M_\alpha \cap I^o, N_\alpha \cap J^o]$ не гарантируется линейная независимость ни строк, ни столбцов. В случае транспортной специфики эта трудность легко преодолевается за счет треугольности невырожденной матрицы: ее определитель, всегда равный +I или -I, достаточно хорошо отделен от нуля; в случае узкоблочной - за счет барьера для сингулярных чисел [9] диагональной матрицы, в случае двухкомпонентной - за счет вычисления сингулярных чисел двухкомпонентной матрицы [IO]. В двух последних случаях возникает противоречие между "наполненностью" множеств I'_α, J'_α и более или менее хорошей обусловленностью матрицы $A[I'_\alpha, J'_\alpha]$. Предпочтение, конечно, следует отдавать последней, так как "недобор" множеств I'_α, J'_α компенсируется в процессе обновления базиса $A[I^o, J^o]$.

Л и т е р а т у р а

I. Канторович Л.В. Экономический расчет наилучшего использования ресурсов. - М.: Изд-во АН СССР, 1959.
2. Булавский В.А., Звягина Р.А., Яковлева М.А. Численные методы линейного программирования. - М.: Наука, 1977.
3. Булавский В.А., Звягина Р.А. Обобщение понятия блочности в линейном программировании// Докл. АН СССР. - 1977. - Т.235, №5. - С.993-996.
4. Звягина Р.А. Обновление многослойного блочного базиса с учетом специфики концевых блоков// Оптимизация. - 1985. - Вып.35(52). - С.56-69.
5. Звягина Р.А. Упорядочение блоков при обновлении базиса с блочной структурой// Оптимизация. - 1983. - Вып. 33(50). - С.44-55.
6. Звягина Р.А. Системы линейных уравнений с иерархической симметричной блочностью матриц// Оптимизация. - 1978. - Вып. 22(39). - С.69-82.
7. Звягина Р.А. О решении системы линейных уравнений на основе упорядоченного укрупнения ее многослойной блочности// Оптимизация. - 1988. - Вып. 44(6I). - С.13-26.
8. Звягина Р.А. Приведение к блочно-треугольному виду матрицы

с симметрично-разветвленной блочностью// Оптимизация. - 1981. - Вып. 26(43). - С.34-44.
9. Годунов С.К. Решение систем линейных уравнений. - Новосибирск: Наука, 1980.
10. Яковлева М.А. Вычисление сингулярных чисел базисной матрицы в двухкомпонентных задачах линейного программирования// Оптимизация. - 1983. - Вып.31(48). - С.74-89.
11. Уилкинсон Дж.Х. Алгебраическая проблема собственных значений.- М.: Наука, 1970.
12. Hellerman E., Rarick D.C. Reinveration with the preassigned pivot procedure// Math. Prog. - 1971. - V.1. - P.195-216.
13. Звягина Р.А. Задачи линейного программирования с матрицами узкоблочной структуры//Оптимальное планирование.- 1970. - Вып.15.- С.33-47.

Поступила в ред.-изд. отдел
01.11.1989 г.