Выпуск 45(62) ОПТИМИЗАЦИЯ 1989 г.

Выпуклый анализ и смежные вопросы

УДК 517.98

О ТЕНЗОРНОМ ПРОИЗВЕДЕНИИ БАНАХОВЫХ ПРОСТРАНСТВ СО СМЕШАННОЙ НОРМОЙ

Г.Н.Шотаев

В теории тензорных произведений банаховых пространств возникают новые возможности, если пространства-сомножители снабжены упорядочивающими конусами. Известны несколько способов сочетания векторного порядка с тензорным произведением. Два из наиболее полезных подходов были рассмотрены В.Л.Левиным [I] и Д.Фремлиным [2] (см. также [3-5]). В первой работе вводится тензорное произведение банаховой решетки и произвольного банахова пространства, а во второй - двух банаховых решеток. Эти две существенно различные конструкции приводят к одному и тому же результату или совпадают с проективным тензорным произведением лишь в очень специальных случаях.

Цель настоящей работы - ввести общее понятие тензорного произведения, частными случаями которого являются все три упомянутых выше типа тензорных произведений. Такая общность достигается привлечением решеточно-нормированных пространств и мажорируемых билинейных операторов. В §I приводятся некоторые вспомогательные сведения. В § 2 на алгебраическом тензорном произведении пространств со смешанной нормой вводится кросснорма и устанавливаются ее два представления. В § 3 формулируются и доказываются основные теоремы. Основные понятия, используемые в работе, изложены в [6-I0].

§ 1. Предварительные сведения

Пространством со смешанной нормой будем называть пару (V,E), удовлетворяющую условиям: а) E – банахова решетка; б) V – решеточно-нормированное пространство с разложимой E-значной нормой $|\cdot|$. Смешанная норма на пространстве V определяется формулой $|||v|||:=\||v|\|$ $(v\in V)$. Рассматривая V как нормированное пространство, будем иметь в виду указанную смешанную норму. В [8] на нормирующее пространство E наложено требование порядковой полноты, которое, если это специально не оговорено, мы опускаем. Ниже приводятся два вспомогательных утверждения, касающиеся структурных свойств пространства со смешанной нормой.

ТЕОРЕМА 1.1. *Если E – банахова решетка, то нормированное пространство $(V,|||\cdot|||)$ банахово в том и только том случае, если решеточно-нормированное пространство $(V,|\cdot|)$ r-полно.*

Доказательство этого утверждения почти дословно повторяет обоснование аналогичного факта из [8] для случая порядково полной нормирующей E.

ТЕОРЕМА 1.2. *Если (V,E) – пространство со смешанной нормой, то (V',E') – банахово пространство со смешанной нормой. При этом векторной нормой функционала $v'\in V'$ служит наименьшая его мажоранта $|v'|\in E'$. В частности, справедливо соотношение*

$$\langle v,v'\rangle\le\langle |v|,|v'|\rangle\quad(v\in V,\ v'\in V').$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $v'\in V'$. Рассмотрим функционал $l:E^+\to R$, задаваемый равенством

$$l(e)=\sup\{\langle v,v'\rangle : v\in V,\ |v|\le e\}.$$

Функционал l очевидно конечен. Покажем, что он аддитивен. Обозначим $S_V(e):=\{v\in V: |v|\le e\}$. Пусть $e=e_1+e_2$. Поскольку $|v_1+v_2|\le|v_1|+|v_2|\le e_1+e_2$ при $v_1\in S_V(e_1)$ и $v_2\in S_V(e_2)$, то $S_V(e_1)+S_V(e_2)\subset S_V(e)$. Поэтому

$$l(e) \geq v'(v_1+v_2) = v'(v_1) + v'(v_2).$$

Переходя в последнем неравенстве к верхней грани по всем $v_1 \in \in S_V(e_1)$ и $v_2 \in S_V(e_2)$, получаем $l(e_1+e_2) \geq l(e_1) + l(e_2)$. С другой стороны, пользуясь разложимостью векторной нормы и привлекая лемму о двойном разбиении, имеем, что из неравенства $|v| \leq e_1 + e_2$ следует существование $v_1, v_2 \in V$ и $\bar{e}_1, \bar{e}_2 \in E^+$ таких, что выполняется $v = v_1 + v_2$, $|v_1| = \bar{e}_1 \leq e_1$ и $|v_2| = \bar{e}_2 \leq e_2$. Тогда

$$v'(v) = v'(v_1+v_2) = v'(v_1) + v'(v_2) \leq l(e_1) + l(e_2).$$

Переходя в последнем неравенстве к верхней грани по всем $v \in \in S_V(e)$, получаем $l(e_1+e_2) \leq l(e_1) + l(e_2)$. Окончательно имеем $l(e_1+e_2) = l(e_1) + l(e_2)$. Однородность функционала l очевидна. Тогда функционал $l: E^+ \longrightarrow R$ можно распространить на всё пространство E, положив $l(e) = le^+ - le^-$. Далее, поскольку справедливо $|\langle v, v'\rangle| \leq le\ (|v| \leq e)$, то, в частности, выполняется $|v'(v)| \leq l(|v|)$, т.е. l мажорирует v'. Легко проверяется, что l – наименьшая мажоранта, т.е. $l = |v'|$ и

$$|\langle v, v'\rangle| \leq \langle |v|, |v'|\rangle \quad (v \in V,\ v' \in V').$$

Поскольку E – банахова решетка, то, как известно, $E' = \mathcal{L}_r(E, R)$, где $\mathcal{L}_r(E, R)$ обозначает пространство регулярных функционалов на E и тем самым $|v'| \in E'$. Осталось показать, что (V', E') – банахово пространство со смешанной нормой, т.е. совпадение банаховой и смешанной норм. По определению

$$\|v'\| = \sup\{|v'(v)| : \|v\| \leq 1\} = \sup\{|v'(v)| : \||v|\| \leq 1\},$$

но

$$|\!|\!|v'|\!|\!| = \|l\| = \sup\{|le| : \|e\| \leq 1, e \geq 0\} =$$

$$= \sup_{e \geq 0, \|e\| \leq 1} \sup\{|v'(v)| : |v| \leq e\} = \sup\{|v'(v)| : \||v|\| \leq 1\},$$

т.е. $\|v'\| = |\!|\!|v'|\!|\!|$ и доказательство закончено.

Приведем здесь основной результат Д.Фремлина о тензорном произведении банаховых решеток.

ОПРЕДЕЛЕНИЯ [2]. а) Если E, F и G – банаховы решетки, то положительно проективная норма $\|\cdot\|_{|\pi|}$ на $E \otimes F$ задается формулой

$$\|\cdot\|_{|\pi|} = \sup\{\|\hat{\varphi}(z)\| : \varphi \in \mathcal{B}(E, F; R),\ \|\varphi\| \leq 1\},$$

где $\hat{\varphi}: E\otimes F \longrightarrow G$ – линейное отображение, соответствующее φ и

$$\|\varphi\| = \sup\{\|\varphi(e,f)\| : \|e\| \le 1,\ \|f\| \le 1\}$$

для всех φ.

б) $E\hat{\otimes}F$ есть пополнение $E\otimes F$ по норме $\|\cdot\|_{|\pi|}$.

Структуру тензорного произведения банаховых решеток описывает следующая

ТЕОРЕМА [2]. Пусть E и F – банаховы решетки. Тогда $\|\cdot\|_{|\pi|}$ – норма на $E\otimes F$, а поэтому $E\hat{\otimes}F$ – банахово пространство, и на $E\hat{\otimes}F$ однозначно определена векторная решетка такая, что:

(1) $E\hat{\otimes}F$ – банахова решетка и $\otimes : E\times F \to E\hat{\otimes}F$ есть решеточный биморморфизм;

(2) положительный конус в $E\hat{\otimes}F$ является замыканием в $E\hat{\otimes}F$ конуса $P\subseteq E\otimes F$, порожденного $\{e\otimes f : e\in E^{+},\ f\in F^{+}\}$;

(3) для произвольной банаховой решетки G существует изометричное соответствие между непрерывными положительными билинейными операторами $\varphi: E\times F\longrightarrow G$ и непрерывными линейными операторами $T: E\hat{\otimes}F \longrightarrow G$, задаваемое формулой $\varphi = T\otimes$;

(4) T есть решеточный гомоморфизм, если φ – решеточный биморфизм;

(5) $\|e\otimes f\|_{|\pi|} = \|e\|\cdot\|f\|$ для всех $e\in E$, $f\in F$;

(6) для всех $z\in E\hat{\otimes}F$

$$\|z\|_{|\pi|} = \inf\Big\{\sum_{i\in N}\|e_i\|\cdot\|f_i\| : e_i\in E^{+},\ f_i\in F^{+},\ \forall_i\in N,\ |z|\le\sum_{i\in N} e_i\otimes f_i\Big\}.$$

ЗАМЕЧАНИЕ. Как видно из формулировки теоремы, на тензорное произведение банаховых решеток $E\hat{\otimes}F$ "поднимаются" только непрерывные положительные билинейные операторы. Требование непрерывности в данном случае излишне. В [11] показано, что аддитивный положительный оператор T, заданный на пространстве с конусом (E_1, K_1) со значениями в (E_2, K_2) непрерывен, если конус K_1 воспроизводящий, а конус K_2 нормален. Очевидно, что конусы в банаховых решетках обладают этими свойствами. Покажем, что всякий положительный билинейный оператор $b: E \times F \to G$ непрерывен. Докажем непрерывность в нуле.

Пусть $\|e_n\| \to 0$ в E. Тогда $e_n = e_n' - e_n''$, $e_n', e_n'' \in E^+$ для всех $n \in N$, причем $\|e_n'\| \vee \|e_n''\| \le M \|e_n\|$ и $e_n', e_n'' \to 0$. Не нарушая общности рассуждений, можно считать, что $\|e_n'\| \le 1/n^3$ и $\|e_n''\| \le 1/n^3$, поскольку всегда можно перейти к подпоследовательностям. Последние неравенства означают, что $\|n e_n'\| \le 1/n^2$ и $\|n e_n''\| \le 1/n^2$. В силу полноты из сходимости рядов $\sum_{n=0}^{\infty} \|n e_n'\|$ и $\sum_{n=0}^{\infty} \|n e_n''\|$ следует сходимость рядов $\sum_{n=0}^{\infty} n e_n' = e_1^*$ и $\sum_{n=0}^{\infty} n e_n'' = e_2^*$. Обозначим $e^* := e_1 + e_2$. Тогда выполняется $n e_n' \vee n e_n'' \le e^*$, поскольку $e_n' \le \frac{1}{n} e^*$ и $e_n'' \le \frac{1}{n} e^*$. Для последовательности f_n, сходящейся к 0 в F, совершенно аналогично можно подобрать f^* и последовательности f_n' и f_n'' такие, что $f_n = f_n' - f_n''$, $f_n', f_n'' \in F$, $f_n' \le \frac{1}{n} f^*$, $f_n'' \le \frac{1}{n} f^*$ $(n \in N)$. Получаем

$$
\begin{aligned}
b(e_n, f_n) &= b(e_n' - e_n'', f_n' - f_n'') \le \\
&\le b(e_n', f_n') + b(e_n'', f_n'') + b(e_n', f_n'') + b(e_n'', f_n') \le \\
&\le \frac{1}{n^2}\left[b(e^*, f^*) + b(e^*, f^*) + b(e^*, f^*) + b(e^*, f^*)\right] = \\
&= \frac{4}{n^2} b(e^*, f^*).
\end{aligned}
$$

Тогда выполняется соотношение

$$
-\frac{4}{n^2} b(e^*, f^*) \le b(e_n, f_n) \le \frac{4}{n^2} b(e^*, f^*)
$$

и тем самым $b(e_n, f_n) \to 0$ с регулятором $b(e^*, f^*)$ и доказательство закончено.

§ 2. Определение тензорного произведения

Далее всюду (V, E) и (W, F) обозначают банаховы пространства со смешанной нормой. Через $\mathcal{B}_m(V, W; R)$ обозначим пространство билинейных мажорируемых функционалов на $V \times W$. На алгебраическом тензорном произведении $V \otimes W$ рассмотрим функционал $\rho: V \otimes W \to R$, задаваемый равенством

$$
\rho(z) = \sup\{|\hat{\varphi}(z)| : \varphi \in \mathcal{B}_m(V, W; R), \|\varphi\| \le 1\} \quad (z \in V \otimes W),
$$

где $\hat{\varphi}$ – линейный функционал на $V \otimes W$ такой, что $\hat{\varphi}\otimes = \varphi$.

ТЕОРЕМА 2.I. Функционал $\rho: V\otimes W \to R$ является кросснормой.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Покажем, что из $\rho(z)=0$ следует $z=0$. Остальные аксиомы нормы очевидны. Из $\rho(z)=0$ следует, что для всех $\varphi \in \mathcal{B}_m(V,W;R)$, $|||\varphi||| \le 1$ выполняется $\varphi(z)=0$. Пусть $z=\sum_{i=1}^{n} v_i \otimes w_i$, $v_1,\dots,v_n \in V$, $w_1,\dots,w_n\in W$. Не нарушая общности рассуждений, можно считать, что $v_1,\dots,v_n\in V$ – линейно-независимая система. Воспользуемся леммой о биортогональной системе. Можно выбрать последовательность функционалов $v_1',\dots$ $\dots, v_n' \in V'$ (в нашем случае мажорируемых) так, что $\langle v_j, v_i'\rangle = \delta_{ij}$, где

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i=j, \\ 0, & i\ne j. \end{cases}$$

Кроме того, по теореме Хана – Банаха найдутся функционалы $w_i' \in W'$ такие, что $\|w_i\| = \langle w_i, w_i'\rangle, i=\overline{1,n}$. Рассмотрим билинейный функционал

$$\varphi(v,w) = \sum_{i=1}^{n} \langle v, v_i'\rangle \cdot \langle w, w_i'\rangle .$$

Имеем

$$\hat{\varphi}(z) = \hat{\varphi}\Big(\sum_{i=1}^{n} v_i \otimes w_i\Big) = \sum_{i=1}^{n} \varphi(v_i, w_i) =$$

$$= \sum_{(i)}\sum_{(j)} \langle v_i, v_j'\rangle \cdot \langle w_i, w_j'\rangle = \sum_{(i,j)} \delta_{ij} \langle w_i, w_j'\rangle =$$

$$= \sum_{(i)} \langle w_i, w_j'\rangle = \sum_{(i)} \|w_i\| = 0.$$

А это означает, что при всех $i=\overline{1,n}$ $w_i=0$, и тем самым $z=0$. Далее, для $z=v\otimes w$ имеем

$$\rho(v\otimes w) = \sup\{|\varphi(v,w)| : \varphi\in\mathcal{B}_m(V,W;R), |||\varphi|||\le 1\} \le$$
$$\le \sup\{|||\varphi|||\cdot\|v\|\cdot\|w\| : \varphi\in\mathcal{B}_m(V,W;R), |||\varphi|||\le 1\} = \|v\|\cdot\|w\|.$$

С другой стороны, существуют $v'\in V'$ и $w'\in W'$ такие, что $\|v'\|\le 1$, $\|w'\|\le 1$ и $\langle v,v'\rangle = \|v\|$, $\langle w,w'\rangle=\|w\|$, причем выполняется $\varphi(v,w)=\langle v,v'\rangle\cdot\langle w,w'\rangle$, $|||\varphi|||\le 1$, $\varphi\in\mathcal{B}_m(V,W;R)$.
Поэтому верно

$$|\varphi(v,w)| = \|v\|\cdot\|w\| \le \sup\{|\varphi(v,w)| :$$
$$\varphi\in \mathcal{B}_m(V,W;\mathbb{R}) : |||\varphi||| \le 1\} = \rho(v\otimes w).$$

Окончательно, $\rho(v\otimes w) = \|v\|\cdot\|w\|$ и ρ – кросснорма.

Введем обозначение

$$C(z) := \left\{\sum_{k=1}^{n} |v_k| \otimes |w_k| : z = \sum_{k=1}^{n} v_k \otimes w_k\right\}.$$

ЛЕММА 2.2. $C(z)$ выпукло в $E\otimes F$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $c_1 := \sum_{k=1}^{n} |v_k'| \otimes |w_k'|$,
$c_2 := \sum_{m=1}^{n} |v_m''| \otimes |w_m''|$, $z = \sum_{k=1}^{n} v_k' \otimes w_k' = \sum_{m=1}^{n} v_m'' \otimes w_m''$,
тогда $c_1, c_2 \in C(z)$. Положим $c = \alpha_1 c_1 + \alpha_2 c_2$, $\alpha_1, \alpha_2 \ge 0$, $\alpha_1 + \alpha_2 = 1$.
Докажем, что $c \in C(z)$. Имеем

$$z = \alpha_1\left(\sum_{k=1}^{n} v_k' \otimes w_k'\right) + \alpha_2\left(\sum_{m=1}^{n} v_m'' \otimes w_m''\right) =$$
$$= \sum_{k=1}^{n} \alpha_1 v_k' \otimes w_k' + \sum_{m=1}^{n} \alpha_2 v_m'' \otimes w_m''.$$

С другой стороны,

$$c = \alpha_1\left(\sum_{k=1}^{n} |v_k'| \otimes |w_k'|\right) + \alpha_2\left(\sum_{m=1}^{n} |v_m''| \otimes |w_m''|\right) =$$
$$= \sum_{k=1}^{n} |\alpha_1 v_k'| \otimes |w_k'| + \sum_{m=1}^{n} |\alpha_2 v_m''| \otimes |w_m''|,$$

т.е. $c \in C(z)$ и, следовательно, $C(z)$ выпукло.

С помощью нормы Фремлина введем функционал $\rho(z) = \|z\|_{|\pi|}$ $(z \in E\hat{\otimes} F)$. По теореме Хана – Банаха

$$\rho(z) = \sup\{\langle z, \ell\rangle : \ell \in (E\hat{\otimes} F)', \ell \ge 0, \|\ell\| \le 1\} =$$
$$= \sup\{\langle z,\ell\rangle : \ell \in \mathcal{U}\},$$

где $\mathcal{U} := \{\ell \in (E\hat{\otimes} F)' : \ell \ge 0, \|\ell\| \le 1\}$ – положительная часть единичного шара в $(E\hat{\otimes} F)'$. Рассмотрим функционал на $V\otimes W$:

$$|||z|||_\pi := \inf\left\{\left\|\sum_{i=1}^{n} |v_i| \otimes |w_i|\right\|_\pi : z = \sum_{i=1}^{n} v_i \otimes w_i\right\}.$$

По лемме 2.2, $C(z)$ выпукло, а множество $\mathcal{U} = \partial\rho$ слабо компактно. Используя теорему о минимаксе (см. [9, п.4.4.10]), получаем

$$|||z|||_\pi = \inf\{\|c\|_{|\pi|} : c \in C(z)\} =$$

$$= \inf\{\rho(c) : c \in C(z)\} =$$
$$= \inf_{c \in C(z)} \sup_{\ell \in \mathcal{U}} \{\langle z, \ell \rangle\} =$$
$$= \sup_{\ell \in \mathcal{U}} \inf_{c \in C(z)} \langle c, \ell \rangle = \sup_{\ell \in \mathcal{U}} \rho_\ell(z),$$

где $\rho_\ell(z) := \inf\{\langle c, \ell\rangle : c \in C(z)\}$.

ЛЕММА 2.3. $\qquad |||z|||_\pi = \sup_{\ell \in \mathcal{U}} \rho_\ell(z)$.

ТЕОРЕМА 2.4. Для любого $z \in V \otimes W$ имеет место равенство

$$|||z|||_\pi = \rho(z).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть линейный функционал $f : V \otimes W \to \mathbb{R}$ удовлетворяет неравенству

$$f(z) \le \rho_\ell(z) \qquad (z \in V \otimes W).$$

Тогда для $b = f\otimes$ имеем

$$b(v, w) = f(v \otimes w) \le \rho_\ell(v \otimes w) \le \ell(|v| \otimes |w|),$$

т.е. b – мажорируемый функционал и $|b| \le \ell\otimes$.

Итак, $f \le \rho_\ell$ (т.е. $f \in \partial\rho_\ell$) тогда и только тогда, когда f имеет вид $f = \hat{b}$, где b – мажорируемый, т.е. $b \in \mathcal{B}_m(V, W; \mathbb{R})$ и $|b| \le \ell$. Символически

$$\partial\rho_\ell = \{\hat{b} : b \in \mathcal{B}_m(V, W; \mathbb{R}) : |b| \le \ell\}.$$

Отсюда

$$\rho_\ell(z) = \sup\{f(z) : f \in \partial\rho_\ell\} = \sup\{|f(z)| : f \in \partial\rho_\ell\} =$$
$$= \sup\{|\hat{b}(z)| : b \in \mathcal{B}_m(V, W; \mathbb{R}) : |b| \le \ell\}.$$

Учитывая лемму 2.3, можно написать

$$|||z|||_\pi = \sup\{\rho_\ell(z) : \ell \in \mathcal{U}\} =$$
$$= \sup_{\ell \in \mathcal{U}} \sup\{|\hat{b}(z)| : b \in \mathcal{B}_m(V, W; \mathbb{R}), |b| \le \ell\} =$$
$$= \sup\{|\hat{b}(z)| : b \in \mathcal{B}_m(V, W; \mathbb{R}), |b| \le \ell, \|\ell\|_{|\pi|} \le 1\} =$$
$$= \sup\{|\hat{b}(z)| : b \in \mathcal{B}_m(V, W; \mathbb{R}), |||b||| \le 1\} = \rho(z),$$

где $|||b||| = \| \, |b| \, \|$ – смешанная норма.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Тензорным произведением $V \hat{\otimes} W$ банаховых пространств со смешанной нормой (V, E) и (W, F) будем называть пополнение алгебраического тензорного произведения $V \otimes W$ относительно кросснормы ρ (или, что то же самое, относительно $|||\cdot|||_{\pi}$).

ЗАМЕЧАНИЕ I. Частными случаями введенного понятия являются три разных типа тензорного произведения.

(а) Если $E = F = \mathbb{R}$ – поле действительных чисел, то $V \hat{\otimes} F$ – проективное тензорное произведение банаховых пространств V и W.

(б) Если $V = E$, $W = F$ и в обоих пространствах абстрактная норма совпадает с модулем, то $V \hat{\otimes} W$ – тензорное произведение банаховых решеток по Фремлину (см. [2]).

(в) Пусть $V = E$, причем абстрактная норма на V совпадает с модулем, и $F = \mathbb{R}$. Тогда $V \hat{\otimes} W$ совпадает с тензорным произведением $E \tilde{\otimes} W$ в смысле Левина (см. [I,4]).

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Несмотря на то, что пространства-сомножители V и W решеточно-нормированы, на тензорном произведении не удается в общем случае определить векторную норму, так что $V \hat{\otimes} W$ не есть пространство со смешанной нормой. Какие же подпространства в $V \hat{\otimes} W$ допускают все-таки векторную норму – важный вопрос, связанный с вопросом о существовании мажорантной нормы или модуля у ограниченного оператора (см. [5]). Удовлетворительным ответом мы не располагаем.

Однако можно выделить частные случаи, когда $|||\cdot|||_{\pi}$ – смешанная норма. Например, положим $F = \mathbb{R}$, т.е. W – банахово пространство, а решетка E порядково полна. Можно определить

$$\rho(z) := \inf\left\{\sum_{k=1}^{n} |v_k| \cdot \|w_k\|\right\} \quad (z \in V \otimes W),$$

где инфимум берется по всем представлениям $z = \sum_{k=1}^{n} v_k \otimes w_k$.

Тогда $\rho : V \otimes W \to E$ – норма и $|||z|||_{\pi} = \|\rho(z)\|_E$ $(z \in V \otimes W)$.

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Если положить, что E и F – K-пространства, и рассмотреть тензорное произведение $E \bar{\otimes} F$, которое также K-пространство, то можно на $V \otimes W$ ввести векторную проективную кросснорму. На этом пути возникает тензорное произведение решеточно-нормированных пространств $V \hat{\otimes} W$, существенно зависящее от выбора $E \bar{\otimes} F$ (см. [I2]).

§ 3. Билинейные мажорируемые операторы

В этом параграфе рассмотрим связь тензорного произведения с билинейными мажорируемыми операторами. Пусть (U, G) обозначает пространство со смешанной нормой, причем потребуем, чтобы нормирующая решетка G была порядково полной, или, что то же самое, G – банахово K-пространство.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Оператор $T: V \overset{\Delta}{\otimes} W \longrightarrow U$ называется квазимажорируемым, если существует положительный билинейный оператор $\beta : E \times F \longrightarrow G$ такой, что выполняется

$$|Tz| \leq \rho_\beta(z) = \inf\left\{\hat{\beta}\left(\sum_{k=1}^{n} |v_k| \otimes |w_k|\right)\right\}.$$

Среди билинейных операторов β существует наименьший, который будем называть квазимажорантой и обозначать $|T| := \inf\{\beta\}$, $\| |T| \| := |\!|\!| T |\!|\!|$ – смешанная норма оператора T.

Пусть $\mathcal{L}_q(V \overset{\Delta}{\otimes} W, U)$ – пространство квазимажорируемых операторов, $\mathcal{B}_m(V, W; U)$ – пространство билинейных мажорируемых операторов из $V \times W$ в U (см. [13]).

ТЕОРЕМА 3.1. Сопоставление $T \longmapsto T \otimes$ осуществляет линейную изометрию банаховых пространств со смешанной нормой $\mathcal{L}_q(V \overset{\Delta}{\otimes} W, U)$ и $\mathcal{B}_m(V, W; U)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $T \in \mathcal{L}_q(V \overset{\Delta}{\otimes} W, U)$. По определению существует $\beta \in \mathcal{B}^+(E, F; G)$ такой, что $|Tz| \leq \rho_\beta(z)$. Если $b := T \otimes$, то

$$|b(v, w)| = |Tv \otimes w| \leq |\hat{T}|(|v| \otimes |w|) = |T|(|v|, |w|),$$

т.е. $|b| \leq |T|$ и $b \in \mathcal{B}_m(V, W; U)$.

Наоборот, пусть $b \in \mathcal{B}_m(V, W; U)$. Тогда существует $\beta \in \mathcal{B}^+(E, F; G)$, что

$$|b(v, w)| \leq \beta(|v|, |w|).$$

Отсюда $|\hat{b}(z)| \leq \hat{\beta}\left(\sum_{k=1}^{n} |v_k| \otimes |w_k|\right)$, $z = \sum_{k=1}^{n} v_k \otimes w_k$

и, следовательно,

$$|\!|\!| \hat{b}(z) |\!|\!| \leq \| \hat{\beta} \| \, \left\| \sum_{k=1}^{n} |v_k| \otimes |w_k| \right\|.$$

Переходя к нижней грани, получаем

$$|\!|\!| \hat{b}(z) |\!|\!| \leq \| \hat{\beta} \| \cdot |\!|\!| z |\!|\!|_\pi ,$$

т.е. $\hat{b}$ – ограниченный оператор и поэтому $\hat{b}$ имеет единственное продолжение T с плотного подпространства $V \otimes W$ пространства $V \hat{\otimes} W$, т.е. $T \in \mathcal{L}(V \hat{\otimes} W, U)$ и $T|_{V\otimes W} = \hat{b}$.
Если в неравенстве $|\hat{b}(z)| \leq \rho_\beta(z)$ перейти к пределу, то получим

$$|T(z)| \leq \rho_\beta(z) \quad (z \in V \overset{\Delta}{\otimes} W).$$

Тем самым $T \in \mathcal{L}_q(V \overset{\Delta}{\otimes} W, U)$ и $|T| \leq \beta$, а отсюда $|T| \leq b$, поскольку β – произвольная мажоранта оператора b. Теорема доказана полностью.

ТЕОРЕМА 3.2. Отображение $b \longrightarrow b\otimes$ – есть линейная изометрия между банаховыми пространствами $(V \overset{\Delta}{\otimes} W)'$ и $\mathcal{B}_m(V, W; \mathbb{R})$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу предыдущей теоремы достаточно лишь доказать, что любой функционал $f \in (V \overset{\Delta}{\otimes} W)'$ является квазимажорируемым. Имеем: $f \in (V \overset{\Delta}{\otimes} W)'$ означает, что существует $c > 0$ и выполняется

$$|f(z)| \leq c \, |||z|||_\pi \quad (z \in V \overset{\Delta}{\otimes} W),$$

следовательно,

$$|f(z)| \leq c\rho(z) =$$

$$= c \cdot \sup\{|\hat{b}(z)| : b \in \mathcal{B}_m(V, W; \mathbb{R}),\ |||b||| \leq 1\}.$$

Отсюда и из теоремы о биполяре вытекает, что f есть слабый предел сети $(f_\alpha)_{\alpha \in A}$, где каждый f_α имеет вид $f_\alpha = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \hat{b}_k$, причем $\lambda_k \geq 0$, $\sum_{k=1}^{n} \lambda_k = c$, $b_k \in \mathcal{B}_m(V, W; \mathbb{R})$, $|||b_k||| \leq 1$.
Если $\beta_\alpha = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k |b_k|$, то β – квазимажорнанта для f_α.
Итак, f_α – квазимажорируемый и

$$|f_\alpha(z)| \leq \sum_{k=1}^{n} \beta_\alpha(|v_k|, |w_k|).$$

$\|\beta_\alpha\| \leq c$ означает, что $(\hat{\beta}_\alpha)$ содержится в слабо компактном множестве и, следовательно, можно считать, что $\beta_\alpha \longrightarrow \beta$ слабо. Переход к пределу в последнем неравенстве по α дает

$$|f(z)| \leq \sum_{k=1}^{n} \beta(|v_k|, |w_k|),$$

т.е. f квазимажорируема и теорема доказана.

СЛЕДСТВИЕ 3.3. Пространство $(V\hat{\otimes}W)'$ линейно изометрично пространству мажорируемых операторов $\mathcal{L}_m(V,W')$. При этой изометрии функционалу $f\in(V\hat{\otimes}W)'$ соответствует оператор $T_f\in\mathcal{L}_m(V,W')$ такой, что

$$\langle w,T_f v\rangle=\langle v\otimes w,f\rangle\ (v\in V,w\in W).$$

ЗАМЕЧАНИЕ. Оператор $T:V\longrightarrow W$ называется суммирующим, если существует $d>0$ такое, что

$$\left\|\sum_{k=1}^{n}|Tv_k|\right\|\leq d\left\|\sum_{k=1}^{n}|v_k|\right\|$$

для любого конечного набора $v_1,\dots,v_n\in V$. В [8] установлено, что если F – порядково полное AM-пространство, то класс суммирующих операторов совпадает с классом $\mathcal{L}_m(V,W)$. Тем самым следствие 3.3 есть обобщение теоремы 4.7 из [4].

СЛЕДСТВИЕ 3.4. Можно считать, что $V'\otimes W'$ – подпространство в $(V\hat{\otimes}W)'$, причем кросснорма ρ' на алгебраическом тензорном произведении $V'\otimes W'$ совпадает с нормой пространства $(V\hat{\otimes}W)'$.

В заключение автор приносит благодарность А.Г.Кусраеву за полезные обсуждения и внимание к работе.

Литература

1. Левин В.Л. Функторы в категориях банаховых пространств, определяемые KB-линеалами// Докл. АН СССР. – 1965. – Т.162, № 2. – С.262–265.

2. Fremlin D.H. Tensor products of Banach lattices// Math. Annalen. – 1974. – V.211, N 2. – P.87–106.

3. Левин В.Л. Тензорные произведения и функторы в категориях банаховых пространст, определяемые KB-линеалами// Труды Моск. мат. об–ва. – 1969. – Т.20. – С.43–82.

4. Левин В.Л. Выпуклый анализ в пространствах измеримых функций и его применение в математической экономике. – М.: Наука, 1985.

5. Schaefer H.H. Banach lattices and positive operators. - Berlin a.o.: Springer, 1974.
6. Канторович Л.В., Вулих Б.З., Пинскер А.Г. Функциональный анализ в полуупорядоченных пространствах. - М.-Л.: Гостехиздат, 1950.
7. Кусраев А.Г. Векторная двойственность и ее приложения. - Новосибирск: Наука, 1985.
8. Кусраев А.Г. Линейные операторы в решеточно-нормированных пространствах// Исследования по геометрии "в целом" и математическому анализу/ Труды Ин-та математики СО АН СССР. - Т.9. - Новосибирск: Наука, 1987. - С.86-123.
9. Кусраев А.Г., Кутателадзе С.С. Субдифференциальное исчисление. - Новосибирск: Наука, 1987.
10. Schatten R. A theory of cross-spaces. - Princeton: Univ. Press, 1950.
11. Бахтин И.А., Красносельский М.А., Стеценко В.Я. О непрерывности линейных положительных операторов// Сиб. мат. журн. - 1962. - Т.3, № 1. - С.156-160.
12. Шотаев Г.Н. О тензорном произведении решеточно-нормированных пространств// Сиб. мат. журн. - 1988. - Т.29, № 4. - С.95-102.
13. Шотаев Г.Н. О билинейных операторах в решеточно-нормированных пространствах. - Оптимизация. - 1986. - Вып.37(54). - С.38-50.

Поступила в ред.-изд. отдел
17.01.1989 г.