Выпуклый анализ и смежные вопросы

УДК 519.7:517.98

ТЕОРЕМЫ О НЕЯВНОЙ И ОБРАТНОЙ ФУНКЦИЯХ В КВАЗИДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОМ ИСЧИСЛЕНИИ

Н.Э.Торгашова

Рассмотрим систему уравнений

$$f(z)=0_n \quad , \text{ где } z=[x,y],\ x\in R^m,\ y\in R^n,\ f=(f_1,\dots,f_n)^T. \qquad (1)$$

Пусть $z_0=[x_0,y_0]$ – решение (1). Требуется найти такую функцию $y(x)$, чтобы для x из некоторой области $G\subset R^m$

$$f(x,y(x))=0_n.$$

Напомним, что конечная функция φ, заданная на открытом множестве $U\subset R^n$, называется квазидифференцируемой в точке $x\in U$, если она дифференцируема в этой точке по любому направлению $g\in R^n$ и существуют выпуклые компакты $\underline{\partial}\varphi(x)\subset R^n$ и $\overline{\partial}\varphi(x)\subset R^n$ такие, что

$$\frac{\partial\varphi(x)}{\partial g}\equiv\lim_{\alpha\downarrow 0}\frac{1}{\alpha}\left[\varphi(x+\alpha g)-\varphi(x)\right]\equiv\max_{v\in\underline{\partial}\varphi(x)}(v,g)+\min_{w\in\overline{\partial}\varphi(x)}(w,g).$$

Изменим постановку задачи. Пусть $g\in R^m,\ \|g\|=1$. Нужно найти условия, при которых существуют число $\alpha_0>0$ и непрерывная функция $y(\alpha),\ \alpha\in[0,\alpha_0]$, такие, что

$$f(x_0+\alpha g,y(\alpha))=0_n \quad \forall\alpha\in[0,\alpha_0]. \qquad (2)$$

Проблема в такой постановке рассматривалась в [1,2].

Сделаем следующие предположения.

1. Пусть функции $f_i,\ i\in 1:n$, квазидифференцируемы и непрерывны в окрестности S точки z_0. Тогда для $q\in R^n$

$$f_i(x_0+\alpha g,y_0+\alpha q)=f_i(x_0,y_0)+\alpha\Big\{\max_{v_i\in\underline{\partial}f_i(z_0)}(v_i,[g,q])+$$
$$+\min_{w_i\in\overline{\partial}f_i(z_0)}(w_i,[g,q])\Big\}+o_i(\alpha,q),\ i\in 1:n. \qquad (3)$$

2. Пусть $q_0 \in R^n$ – решение системы

$$\frac{\partial f_i(z_0)}{\partial [g,q]} = 0, \; i \in 1:n. \tag{4}$$

3. Пусть в (3)

$$\frac{o_i(\alpha, q)}{\alpha} \xrightarrow[\alpha \downarrow 0]{} 0 \tag{5}$$

равномерно по $q \in \bar S_{\delta_1}(q_0) = \{q \in R^n \mid \|q - q_0\| \le \delta_1\}, \delta_1 > 0.$
Положим $\varepsilon \geqslant 0$ и определим множества

$$\underline{R}_{i\varepsilon} = \{v_i \in \underline{\partial} f_i(z_0) \mid (v_i, [g, q_0]) \geqslant \max_{\tilde v_i \in \underline{\partial} f_i(z_0)} (\tilde v_i, [g, q_0]) - \varepsilon\};$$

$$\bar R_{i\varepsilon} = \{w_i \in \bar\partial f_i(z_0) \mid (w_i, [g, q_0]) \le \min_{\tilde w_i \in \bar\partial f_i(z_0)} (\tilde w_i, [g, q_0]) + \varepsilon\};$$

$$\underline{R}_{2i\varepsilon} = \{v_{2i} \mid \exists v_{1i} : [v_{1i}, v_{2i}] \in \underline{R}_{i\varepsilon}\}, \; \bar R_{2i\varepsilon} = \{w_{2i} \mid \exists w_{1i} : [w_{1i}, w_{2i}] \in \bar R_{i\varepsilon}\}.$$

Нетрудно показать, что для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta_2 = \delta_2(\varepsilon) > 0$ такое, что для $\tau \in \bar S_{\delta_2}(0_n)$ выполняется

$$\max_{v_i \in \underline{\partial} f_i(z_0)} (v_i, [g, q_0 + \tau]) = \max_{v_i \in \underline{R}_{i\varepsilon}} (v_i, [g, q_0 + \tau]);$$
$$\min_{w_i \in \bar\partial f_i(z_0)} (w_i, [g, q + \tau]) = \min_{w_i \in \bar R_{i\varepsilon}} (w_i, [g, q_0 + \tau]).$$

Пусть теперь $\varepsilon > 0, \; \delta_2 = \delta_2(\varepsilon), \; \tau \in \bar S_{\delta_2}(0_n)$. Тогда

$$A = \max_{v_i \in \underline{\partial} f_i(z_0)} (v_i, [g, q_0 + \tau]) \le B + \max_{v_{2i} \in \underline{R}_{2i\varepsilon}} (v_{2i}, \tau) = B + (\bar v_{2i}(\tau), \tau),$$

где $B = \max\limits_{v_i \in \underline{\partial} f_i(z_0)} (v_i, [g, q_0]), \; \bar v_{2i}(\tau) \in \underline{R}_{2i\varepsilon}$. С другой стороны, $A \geqslant B + \max\limits_{v_{2i} \in R_{2i0}} (v_{2i}, \tau) = B + (\underline{v}_{2i}(\tau), \tau)$, где $\underline{v}_{2i}(\tau) \in \underline{R}_{2i0}$.
Отсюда по теореме о среднем найдем такое $v_{2i}(\tau) \in \underline{R}_{2i\varepsilon}$, что $A = B + (v_{2i}(\tau), \tau)$.

Следовательно, при $\tau \in \bar S_{\delta_2}(0_n), \; \delta_2 = \delta_2(\varepsilon)$ непусты множества

$$\underline{m}_{2i}(\tau) = \{v_{2i} \in \underline{R}_{2i\varepsilon} \mid \max_{\tilde v_i \in \underline{\partial} f_i(z_0)} (\tilde v_i, [g, q_0 + \tau]) = \max_{\tilde v_i \in \underline{\partial} f_i(z_0)} (\tilde v_i, [g, q_0]) + (v_{2i}, \tau)\};$$

$$\overline{m}_{2i}(\tau)=\{w_{2i}\in\overline{R}_{2i\varepsilon}\mid \min_{\overline{w}_i\in\overline{\partial}f_i(z_0)}(\overline{w}_i,[g,q_0+\tau])=$$
$$=\min_{\overline{w}_i\in\overline{\partial}f_i(z_0)}(\overline{w}_i,[g,q_0])+(w_{2i},\tau)\},\ i\in 1:n.$$

(Утверждение относительно $\overline{m}_{2i}(\tau)$ доказывается аналогично.)
Из (3) вытекает, что для $v_{2i}(\tau)\in\underline{m}_{2i}(\tau)$, $w_{2i}(\tau)\in\overline{m}_{2i}(\tau)$

$$f_i(x_0+\alpha g,y_0+\alpha(q_0+\tau))=\alpha(v_{2i}(\tau)+w_{2i}(\tau),\tau)+o_i(\alpha,q_0+\tau),\ i\in 1:n,$$

или

$$f(x_0+\alpha g,y_0+\alpha(q_0+\tau))=\alpha(A(\tau)\tau+r(\alpha,\tau)), \tag{6}$$

где

$$A(\tau)\in m(\tau)=\{A(\tau)=\begin{bmatrix}a_1\\ \vdots\\ a_n\end{bmatrix}\mid a_i=(v_{2i}(\tau)+w_{2i}(\tau))';$$
$$v_{2i}(\tau)\in\underline{m}_{2i}(\tau),\ w_{2i}(\tau)\in\overline{m}_{2i}(\tau),\ i\in 1:n\};$$

$$r_i(\alpha,\tau)=\frac{o_i(\alpha,q_0+\tau)}{\alpha},\ i\in 1:n,\ r(\alpha,\tau)=(r_1(\alpha,\tau),\dots,r_n(\alpha,\tau))^T.$$

Введем множества

$$M_\varepsilon=\{A=\begin{bmatrix}a_1\\ \vdots\\ a_n\end{bmatrix}\mid a_i=(v_{2i}+w_{2i})^T,\ v_{2i}\in\underline{B}_{2i\varepsilon},\ w_{2i}\in\overline{R}_{2i\varepsilon},\ i\in 1:n\};$$

$$M=\{A=\begin{bmatrix}a_1\\ \vdots\\ a_n\end{bmatrix}\mid a_i=(v_{2i}+w_{2i})^T,\ v_i\in\underline{\partial}f_i(z_0),\ w_i\in\overline{\partial}f_i(z_0),\ i\in 1:n\};$$

$$\widetilde{M}=\{A=\begin{bmatrix}a_1\\ \vdots\\ a_n\end{bmatrix}\mid a_i=(v_{2i}+w_{2i})^T,\ v_i\in\underline{\partial}f_i(z_i),\ w_i\in\overline{\partial}f_{i}(z_i),\ z_i\in S,\ i\in 1:n\}.$$

Заметим, что отображение m замкнуто и для любого $\tau\in R^n$ множества $m(\tau)$ выпуклы. Множества M_ε выпуклы, компактны, причем $m(\tau)\subset M_\varepsilon$, $\tau\in S_{\delta_2}(0_n)$, где $\delta_2=\delta_2(\varepsilon)$, и $M_\varepsilon\subset M$ при любом $\varepsilon>0$.

ТЕОРЕМА I 2. Если для некоторого $\varepsilon>0$

$$\min_{A\in M_\varepsilon}|\det A|>0,$$

то существует такое $\alpha_0>0$, что при $\alpha\in[0,\alpha_0]$ система (2) имеет решение $y(\alpha)$, непрерывное и дифференцируемое справа в точке $\alpha=0$, и такое, что $y'_+(0)\equiv\lim\limits_{\alpha\downarrow 0}\frac{1}{\alpha}\left[y(\alpha)-y(0)\right]=q_0$.

Для доказательства этой теоремы нам потребуется

ТЕОРЕМА 2. Пусть $K\subset R^n$ – непустое выпуклое компактное множество, Z – непустое выпуклое компактное множество неособенных $(n\times n)$-матриц, $m:K\to 2^Z$ – точечно-множественное отображение, удовлетворяющее условиям: 1) при всяком $x\in K$ множество $m(x)$ является непустым выпуклым подмножеством множества Z; 2) отображение m замкнуто. Пусть, далее, $r:K\to R^n$ – непрерывная на K n-мерная вектор-функция. Тогда, если при всяких $x\in K$ и $A\in Z$ справедливо соотношение $A^{-1}\cdot r(x)\in K$, то точечно-множественное отображение $\varphi:K\to 2^K$ вида $\varphi(x)=\{y\,|\,y=A^{-1}\cdot r(x), A\in m(x)\}$ имеет неподвижную точку.

Эта теорема является модификацией известной теоремы Какутани, но не сводится к ней, поскольку ее условия не обеспечивают выпуклости множества

Приводимый ниже метод доказательства представляет собой видоизменение метода, примененного Х.Никайдо при доказательстве теоремы Какутани (см. [1,3]).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2. Так как K компактно, то по теореме Хаусдорфа для любого $\varepsilon>0$ в K существует конечная ε-сеть для K: $x_{\varepsilon 1}, x_{\varepsilon 2},\ldots,x_{\varepsilon k(\varepsilon)}$. Положим $\psi_{\varepsilon i}(x)=\max\{\varepsilon-\|x-x_{\varepsilon i}\|,0\}$, $x\in K$, $i\in 1:k(\varepsilon)$. Ясно, что $\psi_{\varepsilon i}$ – непрерывные неотрицательные функции на K. Поскольку $\{x_{\varepsilon i}\}_{i=1}^{k(\varepsilon)}$ – ε-сеть, то для любого $x\in K$ найдется хотя бы одно i, при котором $\|x-x_{\varepsilon i}\|<\varepsilon$, так что для любого $x\in K$ будет $\sum\limits_{j=1}^{k(\varepsilon)}\psi_{\varepsilon j}(x)>0$. Следовательно, можно определить $\lambda_{\varepsilon i}(x)=\psi_{\varepsilon i}(x)\Big/\sum\limits_{j=1}^{k(\varepsilon)}\psi_{\varepsilon j}(x)$, $i\in 1:k(\varepsilon)$.

Ясно, что все $\lambda_{\varepsilon i}(x) > 0,\ \sum_{i=1}^{\kappa(\varepsilon)} \lambda_{\varepsilon i}(x) = 1,\ x \in K.$

Зафиксируем теперь для каждого $i \in 1:\kappa(\varepsilon)$ произвольную матрицу $A_{\varepsilon i} \in m(x_{\varepsilon i})$ и построим отображение

$$\mathcal{F}_\varepsilon(x) = \Big[\sum_{i=1}^{\kappa(\varepsilon)} (\lambda_{\varepsilon i}(x) \cdot A_{\varepsilon i})\Big]^{-1} \cdot z(x).$$

Это отображение удовлетворяет всем условиям теоремы Брауэра и, следовательно, имеет неподвижную точку $x_\varepsilon : \mathcal{F}_\varepsilon(x_\varepsilon) = x_\varepsilon$. В силу компактности K найдутся последовательность $\varepsilon_\ell > 0$ и точка $x^* \in K$ такие, что: 1) $\varepsilon_\ell \to 0$; 2) $x_{\varepsilon_\ell} \to x^*$; 3) $\mathcal{F}_{\varepsilon_\ell}(x_{\varepsilon_\ell}) = x_{\varepsilon_\ell}$. Покажем, что x^* является неподвижной точкой отображения φ . Положим $\mathcal{U}_\gamma = m(x^*) + S_\gamma(0_{n\times n})$, где $\gamma > 0$, $S_\gamma(0_{n\times n})$ – открытый шар радиуса γ в пространстве матриц размерности $(n \times n)$. Очевидно, что $\mathcal{U}_\gamma$ – выпуклое открытое множество. Поскольку Z компактно, то по x^* и $\mathcal{U}_\gamma$ можно найти окрестность $V_\delta = \{x \,|\, \|x - x^*\| < \delta, x \in K\}$ точки x^* такую, что $m(V_\delta) \subset \mathcal{U}_\gamma$ (доказательство этого факта можно найти, например, в [3]). В силу условий 1) и 2) существует $N > 0$ такое, что для $\ell \geq N$ имеют место соотношения $\varepsilon_\ell < \frac{\delta}{2}$ и $x_{\varepsilon_\ell} \in V_{\delta/2}$. Если $\lambda_{\varepsilon_\ell i}(x_{\varepsilon_\ell}) > 0$, то $\|x_{\varepsilon_\ell} - x_{\varepsilon_\ell i}\| < \varepsilon_\ell < \frac{\delta}{2}$, откуда $\|x_{\varepsilon_\ell i} - x^*\| < \delta$.

Следовательно, при $\ell \geq N$ для любых i , при которых $\lambda_{\varepsilon_\ell i}(x_{\varepsilon_\ell}) > 0$, выполнено $x_{\varepsilon_\ell i} \in V_\delta$. Для этих i получаем $m(x_{\varepsilon_\ell i}) \subset \mathcal{U}_\gamma$. Условие 3) означает, что

$$\Big[\sum_{i=1}^{\kappa(\varepsilon_\ell)} (\lambda_{\varepsilon_\ell i}(x_{\varepsilon_\ell}) \cdot A_{\varepsilon_\ell i}\Big]^{-1} \cdot z(x_{\varepsilon_\ell}) = B_\ell^{-1} \cdot z(x_{\varepsilon_\ell}) = x_{\varepsilon_\ell}. \qquad (7)$$

Поскольку $\mathcal{U}_\gamma$ выпукло, то все $B_\ell \in \mathcal{U}_\gamma, \ell \geq N$. Без ограничения общности можно считать, что

$$B_\ell \to B \in \overline{\mathcal{U}}_\gamma \subset \mathcal{U}_{2\gamma} \quad \forall \gamma > 0. \qquad (8)$$

Так как множество $m(x^*)$ замкнуто (что следует из замкнутости отображения m), то из (8) получаем $B \in m(x^*)$. Переходя в (7) к пределу при $\ell \to +\infty$, будем иметь

$$B^{-1} \cdot z(x^*) = x^*,$$

что и означает $x^* \in \varphi(x^*)$. Теорема 2 доказана.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ I. Пусть $\delta \leq \min\{\delta_1, \delta_2\}$, $\overline{S}_\delta(0_n) \subset S$. Из (5) по δ найдем такое $\alpha_0 > 0$, что для любых $\alpha \in [0, \alpha_0]$ и $\tau \in \overline{S}_\delta(0_n)$ будет $\|z(\alpha, \tau)\| < \delta / N$, где $N = \sup_{A \in M_\varepsilon} \|A^{-1}\|$.

Для каждого $\alpha \in (0,\alpha_0]$ построим отображение

$$\varphi_\alpha(\tau)=\{y \mid y=-A^{-1}\cdot r(\alpha,\tau), A\in m(\tau)\}.$$

Ясно, что φ_α при $\alpha\in(0,\alpha_0]$ удовлетворяет всем условиям теоремы 2 и, следовательно, имеет неподвижную точку $\tau(\alpha)\in \in \varphi_\alpha(\tau(\alpha))$. Из (6) вытекает, что $f(x_0+\alpha g, y_0+\alpha(q_0+\tau(\alpha)))= =0_n, \alpha\in(0,\alpha_0]$, т.е. система (2) имеет решение $y(\alpha)=y_0+ +\alpha(q_0+\tau(\alpha)), \alpha\in(0,\alpha_0], y(0)=y_0$. Из (5) ясно также, что $\tau(\alpha)\xrightarrow[\alpha\downarrow 0]{} 0_n$. Теорема доказана.

ТЕОРЕМА 3. Если

$$\min_{A\in M}|\det A|>0, \tag{9}$$

то описанное в теореме I решение $y(\alpha)=y(\alpha,g)$ существует для любого $g\in R^m$ такого, что $\|g\|=1$, и $\alpha\in[0,\alpha_0]$, где $\alpha_0=\alpha_0(g)>0$.

Пусть теперь f_i, $i\in 1:n$, равномерно квазидифференцируемы на S.

ТЕОРЕМА 4. Если

$$\min_{A\in M}|\det A|>0, \tag{I0}$$

то для любого $g\in R^m, \|g\|=1$ система (2) имеет решение $y(\alpha)=y(\alpha,g)$, которое определено, однозначно и непрерывно на $[0,\alpha_0]$, $\alpha_0=\alpha_0(g)>0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По теореме 3 для любого $g\in R^m, \|g\|=1$, система (2) имеет решение $y(\alpha)=y_0+\alpha(q_0+\tau(\alpha)), \alpha\in[0,\alpha_0]$. Выберем α_0 так, чтобы $[x_0+\alpha g, y(\alpha)]\in S \quad \forall\alpha\in[0,\alpha_0]$. Покажем однозначность функции $y(\alpha)$. Предположим, что существуют $\bar\alpha\in(0,\alpha_0]$, $\tau_1\neq\tau_2$ такие, что $f_i(x_0+\bar\alpha g, y_0+ +\bar\alpha(q_0+\tau_1))=f_i(x_0+\bar\alpha g, y_0+\bar\alpha(q_0+\tau_2))=0$, $i\in 1:n$.

Рассмотрим функции одного аргумента

$$\psi_i(\omega)=f_i(x_0+\bar\alpha g, y_0+\bar\alpha(q_0+\tau_1+\omega(\tau_2-\tau_1))), \omega\in[0,1].$$

Функции ψ_i непрерывны и квазидифференцируемы на $[0,I]$, причем $\psi_i(0)=\psi_i(1)=0, i\in 1:n$. Следовательно, внутри отрезка $[0,I]$ найдутся точки ω_i, $i\in 1:n$, в которых выполнено хотя бы одно из следующих условий: $-\underline{\partial}\psi_i(\omega_i)\subset\overline{\partial}\psi_i(\omega_i)$ либо $-\overline{\partial}\psi_i(\omega_i)\subset\underline{\partial}\psi_i(\omega_i)$ (необходимое условие максимума и минимума для квазидифференцируемых функций соответственно).

Но

$$\underline{\partial}\varphi_i(\omega_i)=\{\bar v\,|\,\bar v=(v_{2i},\tau_2-\tau_1)-r_i,\ v_i\in\underline{\partial}f_i(z_i)\},$$
$$\bar\partial\varphi_i(\omega_i)=\{\bar w\,|\,\bar w=(w_{2i},\tau_2-\tau_1)+r_i,\ w_i\in\bar\partial f_i(z_i)\},$$

где $z_i=[x_0+\bar\alpha g,\ y_0+\bar\alpha(q_0+\tau_1+\omega_i(\tau_2-\tau_1))]$, r_i - некоторые константы (см.[4]). Поэтому существуют $v_i\in\underline{\partial}f_i(z_i)$, $w_i\in\bar\partial f_i(z_i)$ такие, что $(v_{2i}+w_{2i},\tau_2-\tau_1)=0,\ i\in 1:n$. При этом $\tau_2-\tau_1=0_n$ и $z_i\in S$. Получили противоречие с условием (10).

Осталось показать непрерывность функции $y(\alpha)$ при $\alpha\in\in(0,\alpha_0]$. Предположим, что существуют $\bar\alpha\in(0,\alpha_0]$ и $\varepsilon>0$ такие, что для любого $\delta_k>0$ найдется $\alpha_k=\alpha_k(\delta_k)$, для которого $|\alpha_k-\bar\alpha|<\delta_k$ и при этом $\|\tau(\alpha_k)-\tau(\bar\alpha)\|\geq\varepsilon$. Возьмем $\delta_k\to 0$, выберем из $\{\tau(\alpha_k)\}$ подпоследовательности $\tau(\alpha_{k_\ell})\to\bar\tau\neq\tau(\bar\alpha)$. Тогда из непрерывности функции f будет следовать $f(x_0+\bar\alpha g,\ y_0+\bar\alpha(q_0+\bar\tau))=0_n$, что противоречит доказанной выше однозначности функции $y(\alpha)$.

СЛЕДСТВИЕ I. Если выполнено (9) и отображения $\underline{\partial}f_i$ и $\bar\partial f_i,\ i\in 1:n$, замкнуты в точке z_0 и ограничены в ее окрестности, то для любого $g\in R^m,\ \|g\|=1$, система (2) имеет решение $y(\alpha)=y(\alpha,g)$, которое определено, однозначно и непрерывно на отрезке $[0,\alpha_0]$, $\alpha_0=\alpha_0(g)>0$.

Пусть теперь система (I) имеет вид

$$x+\varphi(y)=0_n,\quad x\in R^n,\ y\in R^n,\quad \varphi=(\varphi_1,\dots,\varphi_n). \tag{II}$$

Пусть $z_0=[x_0,y_0]$ - решение (II). Выберем $g\in R^n,\ \|g\|=1$ и рассмотрим систему

$$x_0+\alpha g+\varphi(y(\alpha))=0_n. \tag{I2}$$

Пусть функции $\varphi_i,\ i\in 1:n$, квазидифференцируемы и непрерывны в окрестности S точки y_0. Тогда при $q\in R^n$

$$\varphi_i(y_0+\alpha q)=\varphi_i(y_0)+\alpha\Big\{\max_{v_i\in\underline{\partial}\varphi_i(y_0)}(v_i,q)+\min_{w_i\in\bar\partial\varphi_i(y_0)}(w_i,q)\Big\}+o_i(\alpha,q),\ i\in 1:n. \tag{I3}$$

Система (4) в этом случае будет

$$\max_{v_i\in\underline{\partial}\varphi_i(y_0)}(v_i,q)+\min_{w_i\in\bar\partial\varphi_i(y_0)}(w_i,q)=-g_i,\ i\in 1:n. \tag{I4}$$

Предположим, что $q_0\in R^n$ - решение (I4), и пусть в (I3) $o_i(\alpha,q)/\alpha\xrightarrow[\alpha\downarrow 0]{}0$ равномерно по $q\in \bar S_\delta(q_0)$. Положим $\varepsilon\geq 0$ и введем множества

$$\underline{R}_{i\varepsilon}=\{v_i\in\underline{\partial}\varphi_i(y_0)\,|\,(v_i,q_0)\geq\max_{\tilde{v}_i\in\underline{\partial}\varphi_i(y_0)}(\tilde{v}_i,q_0)-\varepsilon\};$$

$$\overline{R}_{i\varepsilon}=\{w_i\in\overline{\partial}\varphi_i(y_0)\,|\,(w_i,q_0)\leq\min_{\tilde{w}_i\in\overline{\partial}\varphi_i(y_0)}(\tilde{w}_i,q_0)+\varepsilon\};$$

$$M_\varepsilon=\left\{A=\begin{bmatrix}a_1\\ \vdots\\ a_n\end{bmatrix}\,\middle|\,a_i=(v_i+w_i)^T,\ v_i\in\underline{R}_{i\varepsilon},\ w_i\in\overline{R}_{i\varepsilon},\ i\in 1:n\right\};$$

$$M=\left\{A=\begin{bmatrix}a_1\\ \vdots\\ a_n\end{bmatrix}\,\middle|\,a_i=(v_i+w_i)^T,\ v_i\in\underline{\partial}\varphi_i(y_0),\ w_i\in\overline{\partial}\varphi_i(y_0),\ i\in 1:n\right\};$$

$$\tilde{M}=\left\{A=\begin{bmatrix}a_1\\ \vdots\\ a_n\end{bmatrix}\,\middle|\,a_i=(v_i+w_i)^T,\ v_i\in\underline{\partial}\varphi_i(y_i),\ w_i\in\overline{\partial}\varphi_i,\ y_i\in S,\ i\in 1:n\right\}.$$

ТЕОРЕМА 5. Если для некоторого $\varepsilon>0$

$$\min_{A\in M_\varepsilon}|\det A|>0,$$

то существует $\alpha_0>0$ такое, что при $\alpha\in[0,\alpha_0]$ система (I2) имеет решение $y(\alpha)$, непрерывное и дифференцируемое справа в точке $\alpha=0$ и такое, что $y'_+(0)=q_0$.

ТЕОРЕМА 6. Если

$$\min_{A\in M}|\det A|>0, \tag{I5}$$

то описанное в теореме 5 решение $y(\alpha)=y(\alpha,g)$ существует для любого $g\in R^n$ такого, что $\|g\|=1$ и $\alpha\in[0,\alpha_0]$, где $\alpha_0=\alpha_0(g)>0$.

Пусть теперь φ_i, $i\in 1:n$, равномерно квазидифференцируемы на S.

ТЕОРЕМА 7. Если

$$\min_{A\in\tilde{M}}|\det A|>0,$$

то для любого $g\in R^n$, $\|g\|=1$ система (I2) имеет решение $y(\alpha)=y(\alpha,g)$, которое определено, однозначно и непрерывно на $[0,\alpha_0]$, где $\alpha_0=\alpha_0(g)>0$.

СЛЕДСТВИЕ 2. Если выполнено (I5) и отображения $\underline{\partial}\varphi_i$

и $\overline{\partial}\varphi_i$, $i \in 1:n$, замкнуты в точке y_0 и ограничены в ее окрестности, то для любого $g \in R^n$, $\|g\| = 1$, система (I2) имеет решение $y(\alpha) = y(\alpha, g)$, которое определено, однозначно и непрерывно на $[0, \alpha_0]$, где $\alpha_0 = \alpha_0(g) > 0$.

Литература

I. Никайдо X. Выпуклые структуры и математическая экономика.- М., 1972.

2. Demidova V.A., Demyanov V.F. A directional implicit function theorem for quasidifferentiable functions// Math. Progr. Study. - 1986.-V.29. - P.95-107.

3. Канторович Л.В., Акилов Г.П. Функциональный анализ. - М., 1984.

4. Demyanov V.F., Rubinov A.M. Quasidifferential calculus. - N.Y., 1986.

Поступила в ред.-изд. отдел
31.10.1988 г.