Выпуск 45(62) ОПТИМИЗАЦИЯ 1989 г.
Выпуклый анализ и смежные вопросы

УДК 517.98

О ВЕКТОРНОЙ ПРОБЛЕМЕ МОМЕНТОВ

А.Г.Кусраев, С.А.Малюгин

I. Введение

Классическая задача о нахождении борелевской меры по известной моментной последовательности (именуемая проблемой моментов, см., например, [1-3]) продолжает привлекать внимание и в настоящее время. Об этом свидетельствуют недавние публикации [4-6]. Одно из интересных обобщений указанной задачи связано с рассмотрением векторной или операторной моментной последовательности [7-11]. В настоящей заметке рассматривается следующая векторная постановка: по заданной последовательности $(a_k)_{k=0}^{\infty}$ из решеточно-нормированного пространства Y требуется найти Y-значную борелевскую меру на отрезке $[0,1]$, для которой k-й момент совпадает с a_k ($k \in \omega = \{0,1,2,\dots\}$). Стоит особо выделить два частных случая векторной проблемы моментов, в которых Y - пространство Канторовича.

Пусть T - самосопряженный оператор в гильбертовом пространстве (не обязательно ограниченный). Требуется отыскать спектральную меру μ, для которой

$$T^k = \int_{\mathbb{R}} \lambda^k d\mu \quad (k \in \omega).$$

Как видно, это переформулировка задачи о спектральном разложении. Близкие постановки рассматривались в [7-10].

Пусть теперь $(a_k)_{k=0}^{\infty}$ - последовательность случайных величин на вероятностном пространстве (Q,Σ,P). Требуется найти случайную меру $(\mu_t)_{t \in Q}$ на борелевской σ-алгебре

$\mathcal{B}(\mathbb{R})$ такую, что равенства

$$a_k(t) = \int_{\mathbb{R}} \lambda^k d\mu_t(\lambda) \quad (k \in \omega)$$

выполняются для почти всех $t \in Q$. Под случайной мерой понимается семейство счетно-аддитивных мер $(\mu_t)_{t\in Q}$, для которого отображение $\mu_{(\cdot)}(B): t \longrightarrow \mu_t(B)$ $(t \in Q)$ измеримо для любого $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$. Случайной мере $(\mu_t)_{t\in Q}$ однозначно соответствует векторная мера μ, определяемая тем условием, что $\mu(E)$ – класс эквивалентности измеримой функции $\mu_{(\cdot)}(E)$.

2. Определения и вспомогательные результаты

Все необходимые сведения о K-пространствах, решеточно-нормированных пространствах и мажорируемых операторах содержатся в [12-14]. В дальнейшем фиксировано o-полное решеточно-нормированное пространство $(Y, |\cdot|, F)$ с нормирующим K-пространством F и векторной нормой $|\cdot|$. Пусть $\mathcal{X}$ – компактное топологическое пространство и $\mathcal{B}(\mathcal{X})$ – борелевская σ-алгебра на $\mathcal{X}$. Борелевской мерой ограниченной векторной вариации из $\mathcal{B}(\mathcal{X})$ в Y называем σ-аддитивную меру $\mu: \mathcal{B}(\mathcal{X}) \longrightarrow Y$, для которой существует положительная σ-аддитивная мера $\nu: \mathcal{B}(\mathcal{X}) \longrightarrow F$ такая, что

$$|\mu(B)| \leq \nu(B) \quad (B \in \mathcal{B}(\mathcal{X})).$$

В K-пространстве всех ограниченных мер $\nu: \mathcal{B}(\mathcal{X}) \longrightarrow F$ существует наименьшая, удовлетворяющая указанному неравенству. Она называется векторной вариацией меры μ и обозначается символом $|\mu|$ (см. [15]).

Через $C(\mathcal{X})$, как обычно, обозначаем пространство всех непрерывных функций на $\mathcal{X}$, а через $\mathcal{M}_b(\mathcal{X})$ – пространство всех ограниченных измеримых функций на $\mathcal{X}$. Кроме этого, нам понадобится пространство $S(\mathcal{X})$ всех простых функций на $\mathcal{X}$, т.е. функций вида

$$s = \sum_{i=1}^{n} c_i \chi_{B_i} \quad (c_i \in \mathbb{R},\ B_i \in \mathcal{B}(\mathcal{X}),\ i = 1, \ldots, n).$$

Для любой такой функции $s \in S(\mathcal{X})$ полагаем

$$I_\mu s = \int s\, d\mu = \sum_{i=1}^{n} c_i \mu(B_i).$$

Легко видеть, что $|I_\mu s| \leq \|s\|_\infty |\mu|(\mathfrak{X})$, где $\|s\|_\infty = max\{|s(t)| : t \in \mathfrak{X}\}$. Следовательно, оператор $I_\mu : S(\mathfrak{X}) \to Y$ по непрерывности продолжается до оператора $\bar{I}_\mu : \mathcal{M}_b(\mathfrak{X}) \to Y$. Оператор $\bar{I}_\mu$ называется интегралом Лебега по мере μ. Далее будем использовать традиционное обозначение

$$\bar{I}_\mu f = \int f d\mu \quad (f \in \mathcal{M}_b(\mathfrak{X})).$$

Аналогичным образом определяется интеграл по положительной мере $|\mu|$, при этом справедливо мажорантное неравенство

$$\left| \int f d\mu \right| \leq \int |f| d|\mu| \quad (f \in \mathcal{M}_b(\mathfrak{X})).$$

Интеграл Лебега по положительной мере со значениями в K-пространстве рассматривался в [16]. В частности, из [16, предложение 3.3] выводится теорема Лебега.

ТЕОРЕМА 1. Пусть $(f_n)_{n=1}^\infty$ – ограниченная последовательность из $\mathcal{M}_b(\mathfrak{X})$ и f_n поточечно сходится в f. Тогда

$$\int f d\mu = o\text{-}\lim \int f_n d\mu.$$

В дальнейшем основную роль будет играть следующий вариант теоремы Рисса – Маркова об интегральном представлении операторов.

ТЕОРЕМА 2. Для любого мажирируемого оператора $T: C(\mathfrak{X}) \to Y$ существует единственная борелевская мера ограниченной векторной вариации $\mu: \mathcal{B}(\mathfrak{X}) \to Y$ такая, что

$$Tf = \int f d\nu \quad (f \in C(\mathfrak{X})).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Мажорантная норма $|T|$ оператора T является положительным линейным оператором из $C(\mathfrak{X})$ в F. В силу теоремы Райта (см. [16, теорема 4.1]) существует борелевская мера $\nu : \mathcal{B}(\mathfrak{X}) \to F$ такая, что

$$|T| f = \int f d\nu \quad (f \in C(\mathfrak{X})).$$

Полагаем $\mathcal{M}_0 = C(\mathfrak{X})$, а $\mathcal{M}_1$ – это линейное пространство, порожденное всеми полунепрерывными снизу ограниченными функциями на $\mathfrak{X}$. Далее, по трансфинитной индукции для любого счетного ординала $\alpha \geq 1$ полагаем $\mathcal{M}_{\alpha+1} = \mathcal{M}'_\alpha$, где $\mathcal{M}'_\alpha$ – все поточечные пределы ограниченных последовательностей функций из $\mathcal{M}_\alpha$. Для предельных ординалов β определяем $\mathcal{M}_\beta = \bigcup \{\mathcal{M}_\alpha : \beta < \alpha\}$. Теперь по трансфинитной индукции будем строить последовательные продолжения $T_\alpha : \mathcal{M}_\alpha \to Y$ оператора T. Не останавливаясь на продолжении с $\mathcal{M}_0$ на $\mathcal{M}_1$, будем сразу считать, что для некоторого ординала $\alpha \geqslant 1$ имеется продолжение $T_\alpha : \mathcal{M}_\alpha \to Y$ оператора T такое, что

$$|T_\alpha f| \leqslant \int |f| d\nu \quad (f \in \mathcal{M}_\alpha). \qquad (*)$$

Пусть $f \in \mathcal{M}_{\alpha+1}$ и ограниченная последовательность $(f_n)_{n=1}^\infty$ из $\mathcal{M}_\alpha$ сходится поточечно к f. Полагаем $T_{\alpha+1} f = o\text{-}\lim T_\alpha f_n$. Теорема I и мажорантное неравенство обеспечивают корректность такого определения. Понятно также, что для $T_{\alpha+1}$ сохранится неравенство (*). Если β - предельный ординал и $f \in \mathcal{M}_\beta$, то при некотором $\alpha < \beta$ будет $f \in \mathcal{M}_\alpha$. Пусть в этом случае $T_\beta f := T_\alpha f$. Таким образом определяется оператор $T_\beta : \mathcal{M}_\beta \to Y$ для предельного ординала β. Пусть $\mu(B) = T_{\omega_1} \chi_B$ ($B \in \mathcal{B}(\mathcal{X})$), где ω_1 - первый несчетный ординал. Легко видеть, что

$$Tf = T_{\omega_1} f = \int f d\mu \quad (f \in C(\mathcal{X})). \ \triangleright$$

3. Проблема моментов Хаусдорфа

Теорема 2 дает возможность решить векторную проблему моментов на ограниченном интервале. Случай неограниченного интервала (проблема моментов Гамбургера) требует специального изучения и он будет рассмотрен в другой публикации.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Называем последовательность векторов $(a_k)_{k=0}^\infty \subseteq F$ позитивной (по Хаусдорфу), если справедливы неравенства

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k C_n^k a_{k+\ell} \geqslant 0 \quad (n, \ell \in \omega).$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Последовательность векторов $(y_k)_{k=0}^\infty \subseteq Y$ называется мажорируемой (по Хаусдорфу), если существует последовательность $(a_k)_{k=0}^\infty \subseteq F$ такая, что

$$\left|\sum_{k=0}^{n} (-1)^k C_n^k y_{k+\ell}\right| \leqslant \sum_{k=0}^{n} (-1)^k C_n^k a_{k+\ell} \quad (n, \ell \in \omega).$$

ТЕОРЕМА 3. Для данной последовательности $(y_k)_{k=0}^{\infty} \subseteq Y$ существует единственная борелевская мера $\mu : \mathcal{B}[0,1] \to Y$ ограниченной векторной вариации, удовлетворяющая равенствам

$$y_k = \int \lambda^k d\mu \ (k \in \omega)$$

тогда и только тогда, когда последовательность $(y_k)_{k=0}^{\infty}$ мажорируема (по Хаусдорфу).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Определим линейный оператор $\mathcal{U}$ на пространстве полиномов $\mathcal{P}[0,1]$ со значениями в F следующим образом:

$$\mathcal{U}(p) = \sum_{k=0}^{n} p_k a_k \quad , \text{ где } p(\lambda) = \sum_{k=0}^{n} p_k \lambda^k.$$

Из позитивности последовательности $(a_k)_{k=0}^{\infty}$ следует, что для полиномов $p_{n,\ell}(\lambda) = \lambda^{\ell}(1-\lambda)^n$ выполняются неравенства $\mathcal{U}(p_{n,\ell}) \geqslant 0$ $(n,\ell \in \omega)$. Если полином $p \in \mathcal{P}[0,1]$ неотрицателен на $[0,1]$, то по теореме Бернштейна он равномерно приближается полиномами вида

$$\sum_{k=0}^{m} p\left(\frac{k}{m}\right) C_m^k P_{m-k,k}(\lambda),$$

степень которых не превышает n. Отсюда следует, что $\mathcal{U}(p) \geqslant 0$. Далее, по τ-непрерывности, $\mathcal{U}$ продолжается до положительного оператора $\bar{\mathcal{U}} : C[0,1] \longrightarrow F$.

Теперь займемся построением меры μ. Аналогично определяем оператор $T : \mathcal{P}[0,1] \longrightarrow Y$ по формулам

$$T(p) = \sum_{k=0}^{n} p_k y_k \quad , \text{ где } p(\lambda) = \sum_{k=0}^{n} p_k \lambda^k.$$

По условию $|T(P_{n,\ell})| \leqslant \mathcal{U}(P_{n,\ell})$ $(n,\ell \in \omega)$. Аналогичные рассуждения показывают, что для любого $p \in \mathcal{P}[0,1]$, $p(\lambda) \geqslant 0$ $(\lambda \in [0,1])$ выполняется $|T(p)| \leqslant \mathcal{U}(p)$. Пусть теперь полином $p \in \mathcal{P}[0,1]$ произвольный. Для любого $\varepsilon > 0$ существует полином q_ε такой, что

$$|p(\lambda)| \leqslant q_\varepsilon(\lambda) \leqslant |p(\lambda)| + \varepsilon \ (\lambda \in [0,1]).$$

Тогда

$$|T(p)| = |T(p+q_\varepsilon - q_\varepsilon)| \le \mathcal{U}(p+q_\varepsilon) + \mathcal{U}(q_\varepsilon) \le$$
$$\le \bar{\mathcal{U}}(3|p|+2\varepsilon) = 3\bar{\mathcal{U}}(|p|) + 2\varepsilon a_0 .$$

Из произвольности ε получаем неравенство

$$|T(p)| \le 3\bar{\mathcal{U}}(|p|)\ (p \in \mathcal{P}[0,1]).$$

По τ -непрерывности, T продолжается до мажорируемого оператора $T_1 : C[0,1] \to Y$. По теореме 2 существует борелевская мера $\mu : \mathcal{B}[0,1] \to Y$ ограниченной векторной вариации, для которой

$$T(p) = \int p(\lambda)\, d\mu\ (p \in \mathcal{P}[0,1]).$$

Вспоминая определение T, получаем справедливость требуемых равенств. $\triangleright$

Следует отметить, что в случае, когда $Y = F = \mathbb{R}$, условие мажорируемости последовательности $(y_k)_{k=0}^{\infty}$ эквивалентно стандартному условию Хаусдорфа (см. [1,2]):

$$\sum_{k=0}^{n} C_n^k \Big|\sum_{i=0}^{n-k} C_{n-k}^{i}\, y_{i+k}\Big| \le Const\ (n \in \omega).$$

В векторной ситуации это не так даже в случае, когда Y - банахово пространство. Точнее, если последовательность в банаховом пространстве удовлетворяет этому условию Хаусдорфа, то решением такой проблемы моментов может быть мера неограниченной вариации. Она будет иметь только ограниченную полувариацию.

4. Приложение к спектральному разложению сомосопряженных операторов

Во введении было отмечено, что спектральное разложение самосопряженного оператора в гильбертовом пространстве может быть получено как решение векторной проблемы моментов. Для этого необходим следующий факт.

ТЕОРЕМА 4. Пусть F - монотонно полное частично упорядоченное векторное пространство. Для данной последовательности $(a_k)_{k=0}^{\infty} \subseteq F$ существует единственная положительная борелевская мера $\mu : \mathcal{B}[0,1] \longrightarrow F$, у д о в л е т в о р я ю щ а я р а в е н с т в а м

$$a_k = \int \lambda^k d\mu(\lambda) \quad (k \in \omega) \tag{**}$$

т о г д а и т о л ь к о т о г д а , к о г д а п о с л е д о в а т е л ь н о с т ь $(a_k)_{k=0}^{\infty}$ п о з и т и в н а (п о Х а у с д о р ф у) .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\hat{F}$ – дедекиндово пополнение идеала $F(a_0)$. Оно является $\hat{K}$-пространством. Применяя теорему 3 в случае, когда $Y = \hat{F}$ и $y_k = \dot{a}_k$ $(k \in \omega)$, мы получим единственную положительную борелевскую меру $\mu : \mathcal{B}[0,1] \to \hat{F}$, удовлетворяющую равенствам (**). Осталось лишь показать, что значения меры μ лежат в исходном пространстве. Это делается стандартно с помощью леммы о монотонном классе (см. [17]). ▷

Пусть $\mathcal{A}(\mathcal{H})$ – векторное пространство всех ограниченных самосопряженных операторов, действующих в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$. На $\mathcal{A}(\mathcal{H})$ вводится следующий стандартный частичный порядок. Для $S, T \in \mathcal{A}(\mathcal{H})$ неравенство $S \leq T$ означает, что $(Sx,x) \leq (Tx,x)$ ($x \in \mathcal{H}$). Хорошо известно, что $(\mathcal{A}(\mathcal{H}), \leq)$ является монотонно полным частично упорядоченным векторным пространством (см., например, [7]). Пусть $T \in \mathcal{A}(\mathcal{H})$. Без ограничения общности можно считать, что $0 \leq T \leq I$ (I – тождественный оператор). Докажем позитивность по Хаусдорфу последовательности $(T^k)_{k=0}^{\infty}$. Для этого нужно установить, что

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k C_n^k T^{k+\ell} = T^\ell (I-T)^n \geq 0 \quad (n, \ell \in \omega).$$

Выделяя в этом неравенстве множитель четной степени, мы его сведем к следующим трем неравенствам:

$$T \geq 0; \; I - T \geq 0; \; T(I-T) \geq 0.$$

Первые два случая справедливы по определению. Третий случай легко получается из следующей цепочки неравенств:

$$(T^2x,x)^2 \leq (Tx,Tx)_T (x,x)_T \leq (T^2x,x)(Tx,x),$$

здесь полагается $(x,y)_T := (Tx,y)$. Следует отметить, что лемма о существовании квадратного корня из положительного оператора здесь не применяется. Теперь из теоремы 4 получаем

СЛЕДСТВИЕ. Д л я л ю б о г о о п е р а т о р а $T \in \mathcal{A}(\mathcal{H})$ с у щ е с т в у е т е д и н с т в е н н а я п р о е к т о р н о з н а ч н а я м е р а μ т а к а я , ч т о

$$T^k = \int_{[0,1]} \lambda^k d\mu \quad (k \in \omega).$$

Литература

I. Ахиезер Н.И. Классическая проблема моментов и некоторые вопросы анализа, связанные с нею. – М.: Физматгиз, 1961.

2. Канторович Л.В., Вулих Б.З., Пинскер А.Г. Функциональный анализ в полуупорядоченных пространствах. – М.: Гостехиздат, 1950.

3. Крейн М.Г., Нудельман А.А. Проблема моментов Маркова и экстремальные задачи. – М.: Наука, 1973.

4. Niastad O. Unique solvability of an extended Hamburger moment problem// J. Math. Anal. and Appl.– 1987. – V.124, N2.– P.502-519.

5. Alden E. On inderterminacy of strong moment problems. – Sweden, 1988. (preprint/Univ. Umea; N2).

6. Shonkwiler R. On the solution of moment problems by reprodusing Kernel methods// J. Math. Anal. and Appl. – 1988.– V.130, N1. – P.271-299.

7. Рисс Ф., Секефальви-Надь Б. Лекции по функциональному анализу. – М.: Мир, 1979.

8. Воробьев Ю.В. Операторные ортогональные многочлены и приближенные методы определения спектра линейных ограниченных операторов // Усп. мат. наук. – 1954. – Т.9, вып. I. – С.83-90.

9. Березанский Ю.М. Обобщенная степенная проблема моментов// Тр. Моск. мат. об-ва. – 1970. – Т.21. – С.47-102.

10. Sebestyen Z. Moment theorems for operators on Hilbert space, II// Acta Sci. Math. Szegel. – 1984.– V.47, N 1-2.– P. 101-106.

11. Schmudgen K. On a generalization of the classical moment problem// J. Math. Anal. and Appl. – 1987. – V.125, N 2.– P.461-470.

12. Вулих Б.З. Введение в теорию полуупорядоченных пространств.– М.: Физматгиз, 1961.

13. Кусраев А.Г. Векторная двойственность и ее приложения. – Новосибирск: Наука, 1985.

14. Кусраев А.Г., Стрижевский В.З. Решеточно-нормированные пространства и мажорированные операторы // Тр. Ин-та математики/ АН СССР. Сиб. отд-ние. - 1987. - Т.7: Исследования по геометрии и функциональному анализу. - С.132-157.
15. Кусраев А.Г., Малюгин С.А. О порядково непрерывной составляющей мажорированного оператора // Сиб. мат. журн. - 1987. - Т.28, № 4. - С.127-139.
16. Wright J.D.M. Stone-algebra-valued-measures and integrals// Proc. Proc. London Math. Soc. - 1969. - V.19,=N 1. - P.107-122.
17. Khurana S.S. Lattice-valued Borel measures// Rocky mount. J. Math. - 1976. - V.6, N 2. - P.377-382.

Поступила в ред.-изд. отдел
02.12.1989 г.