Численные методы оптимизации

УДК 519.853

ОБ ОТЫСКАНИИ РАВНОВЕСИЯ В ЛИНЕЙНОЙ МОДЕЛИ ОБМЕНА С ФИКСИРОВАННЫМИ БЮДЖЕТАМИ И ДОПОЛНИТЕЛЬНЫМИ ОГРАНИЧЕНИЯМИ ФИНАНСОВОГО ТИПА

В.И.Шмырёв

В работах автора [1,2] был предложен подход, приводящий к построению эффективных алгоритмов симплексного типа для отыскания равновесия в линейных моделях обмена. В [3] этот подход применялся к модели обмена с дополнительными ограничениями сверху на количество x_j^i j-го товара, приобретаемого i-м участником: $x_j^i \le b_j^i$. Э.И.Ненахов и М.Е.Примак рассмотрели в [4] модель обмена с фиксированными бюджетами участников и дополнительными ограничениями иного типа, когда ограничивается сверху не количество товара, а затраты на его приобретение: $p_j x_j^i \le \beta_j^i$ (p_j - цена единицы j-го товара).

В настоящей заметке показывается, что ограничения указанного типа могут быть легко учтены и в схеме рассмотрений [1,2], что позволяет получить сравнительно более простые алгоритмы отыскания равновесия. Для простоты здесь рассматривается также лишь случай фиксированных бюджетов.

1. Модель

Пусть $I = \{1,\dots,m\}$ - множество участников модели, а $J = \{1,\dots,n\}$ - множество ее продуктов. Не ограничивая общности, считаем, что распределению между участниками подлежит лишь одна единица каждого товара.

Каждый из участников характеризуется некоторым бюджетом $\lambda_i > 0$, вектором интенсивностей $x^i \ge 0$ и вектором целевой функции $c^i \ge 0$. При фиксированном векторе цен $p \ge 0$ участник i выбирает свой вектор интенсивностей $x^i \ge 0$ так, чтобы максимизировать функцию (c^i, x^i) при соблюдении бюджетного ограничения $(p, x^i) \le \lambda_i$ и дополнительных ограничений вида $p_j x_j^i \le \beta_j^i$ (т.е. ограничивается расход денег на приобретение j-го товара).

Требуется указать цены p_j, чтобы среди оптимальных решений указанных задач участников нашлись $\tilde{x}^i$, удовлетворяющие условию $\sum_i \tilde{x}_j^i = 1$ при всех j, т.е. будет выполнен баланс по каждому товару. Такие цены p_j и векторы $\tilde{x}^i$ задают состояние равновесия.

Будем предполагать, что $c^i > 0$ и $\sum_j \beta_j^i > \lambda_i$. Ясно, что в этом случае бюджетное ограничение на оптимальном решении выполняется как равенство: $\sum_j p_j \tilde{x}_j^i = \lambda_i$. Не ограничивая общности, считаем также, что $\sum_i \lambda_i = 1$. Тогда, суммируя бюджетные равенства, получим $\sum_j p_j = 1$, т.е. вектор равновесных цен p лежит в симплексе $\sigma = \{p \geqslant 0 \mid \sum_j p_j = 1\}$.

2. Критерии равновесности

Следуя общей схеме подхода [I], введем в рассмотрение параметрическую транспортную задачу с ценами p_j в качестве параметров:

$$\sum_{i,j} z_{ij} \ln c_j^i - max! \tag{I}$$

$$\sum_j z_{ij} = \lambda_i, \quad i \in I, \tag{2}$$

$$\sum_i z_{ij} = p_j, \quad j \in J, \tag{3}$$

$$0 \le z_{ij} \le \beta_j^i, \quad (i,j) \in I \times J. \tag{4}$$

В отличие от рассмотрений [I,2] здесь, вообще говоря, нельзя утверждать, что эта транспортная задача разрешима при любом $p = (p_1, \dots, p_n) \in \sigma$. Однако множество таких p не пусто. Действительно, для разрешимости задачи (I)-(4) при данном $p \in \sigma$ достаточно, чтобы система условий (2)-(4) оказалась совместной. Зафиксируем некоторое малое $\varepsilon > 0$, а также некоторое $i_j \in I$ при каждом $j \in J$, после чего выберем при каждом $i \in I'$ величины z_{ij} так, чтобы выполнялись условия (2), (4) и $z_{i_j j} \geqslant \varepsilon$. Ясно, что если ε достаточно мало, то, ввиду предположения

$\sum_j \beta_j^i > \lambda_i$, такой выбор осуществим. Тогда при $p_j = \sum_i z_{ij}$ получаем совместность всей системы (2)-(4) и $p_{j_0} > 0$, $\sum_j p_j = 1$, т.е. полученный p принадлежит внутренности $\overset{\circ}{\sigma}$ симплекса σ . Через $f(p)$ будем обозначать значение целевой функции транспортной задачи на оптимальном решении. Если для данного p транспортная задача неразрешима, то естественно считать $f(p) = -\infty$. Тем самым определена некоторая вогнутая функция f на R^n . Из теории параметрических задач линейного программирования известно, что f - вогнутая функция, и ее эффективная область $dom f (= \{x | f(x) > -\infty\})$ - многогранное множество. Особенностью исследуемого случая по сравнению с задачей без дополнительных ограничений, рассмотренной автором в [3] , является тот факт, что в данном случае $dom f$ не обязательно совпадает со всем симплексом σ .

Через $\partial f(p)$ будем обозначать супердифференциал функции f в точке p , определяя его естественным образом как субдифференциал выпуклой функции $(-f)$ с обратным знаком: $\partial f(p) = -\partial(-f)(p)$.

Пусть $h(p)$ - энтропия с противоположным знаком, т.е. выпуклая функция, определяемая следующим образом:

$$h(p) = \begin{cases} \sum_j k(p_j), & p \in \sigma, \\ +\infty, & p \notin \sigma, \end{cases} \tag{5}$$

где

$$k(p_j) = \begin{cases} p_j \ln p_j, & p_j > 0, \\ 0, & p_j = 0. \end{cases}$$

Рассмотрим функцию $\varphi(p) = h(p) - f(p)$. Это тоже выпуклая функция и $dom\,\varphi = dom f$.

ТЕОРЕМА I. Точка минимума функции f задает равновесный вектор цен модели и обратно: если p^* - равновесный вектор цен, то $\varphi(p^*)$ - минимальное значение функции φ .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Заметим, что φ непрерывна на множестве $dom\,\varphi$, которое является компактом, ибо компактно $dom f$. Поэтому точка минимума функции φ существует и единственная ввиду того, что φ очевидным образом строго выпукла на $dom\,\varphi$. Пусть p^* - точка минимума φ . Покажем, что p^* - равновесный вектор цен модели. Так как p^* – точка минимума выпуклой функции φ, то $0\in\partial\varphi(p^*)$. Для $\partial\varphi(p^*)$ имеем (теорема Моро – Рокафеллара) $\partial\varphi(p^*)=\partial h(p^*)+\partial(-f)(p^*)=\partial h(p^*)-\partial f(p^*)$.

Ясно, что $p^*\in\sigma^0$. Это вызвано тем, что производная функции $t\ln t$ равна $1+\ln t$ и стремится к $-\infty$ при $t\to+0$. Поэтому если $\hat p\in\partial\sigma$, а q – направление, ведущее внутрь σ из $\hat p$, то производная $\frac{\partial h}{\partial q}(p)$ будет также стремиться к $-\infty$ при $p=\hat p+tq$ и $t\to+0$. В то же время $\frac{\partial f}{\partial q}(p)$ будет иметь конечный предел. В результате $\varphi(\hat p+tq)<\varphi(\hat p)$ при малых положительных t. А значит, $\hat p$ не может быть точкой минимума.

Для $p^*>0$ имеем $\partial h(p^*)=\{\ln p^*+te \mid t\in R^1\}$, где $e=(1,\dots,1)$, а $\ln p^*=(\ln p_1^*,\dots,\ln p_n^*)$.

Таким образом, условие $0\in\partial\varphi(p^*)$ эквивалентно $(\ln p^*+te)\in\partial f(p^*)$ при некотором $t=t_0$. Но $dom f$ лежит в гиперплоскости, задаваемой уравнением $\sum p_j=1$, а потому из $g\in\partial f(p^*)$ следует $g+te\in\partial f(p^*)$ при любом t. Поэтому условие $(\ln p^*+t_0e)\in\partial f(p^*)$ в свою очередь эквивалентно $\ln p^*\in\partial f(p^*)$.

Пусть $\{z_{ij}^*\}$ – оптимальное решение транспортной задачи при $p=p^*$. Это означает, что найдется двойственные переменные u_i^* и v_j^*, связанные с z_{ij}^* условиями

$$u_i^*+v_j^*\begin{cases} =\ln c_j^i, & \text{если } 0<z_{ij}^*<\beta_j^i,\\ \geqslant \ln c_j^i, & \text{если } z_{ij}^*=0,\\ \leqslant \ln c_j^i, & \text{если } z_{ij}^*=\beta_j^i.\end{cases} \tag{6}$$

С другой стороны, всевозможные такие наборы значений переменных v_j^* и задают множество $\partial f(p^*)$. Поэтому условие $\ln p^*\in\partial f(p^*)$ означает, что найдутся такие $v_j^*=\bar v_j^*$, что $\bar v_j^*=\ln p_j^*$. Пусть $\bar u_i^*$ – отвечающие им значения u_i^*. Теперь, вводя величины $\bar y_i$ равенством $\ln\bar y_i=\bar u_i^*$, т.е. $\bar y_i=e^{\bar u_i^*}$, и величины $\bar x_j^i=z_{ij}^*/p_j^*$, будем иметь

$$\begin{aligned} &\sum_j \bar x_j^i p_j^*=\lambda_i,\\ &\sum_i \bar x_j^i=1,\\ &\bar x_j^i\geqslant 0,\ p_j^*\bar x_j^i\leqslant\beta_j^i, \end{aligned} \tag{7}$$

а кроме того, из (6) следует

$$\bar{y}_i p_j^* \begin{cases} = c_j^i, & \text{если } 0 \le \bar{x}_j^i < \beta_j^i / p_j^*, \\ \ge c_j^i, & \text{если } \bar{x}_j^i = 0, \\ \le c_j^i, & \text{если } p_j^* \bar{x}_j^i = \beta_j^i. \end{cases} \qquad (8)$$

Условия (7) означают, что величины $\bar{x}_j^i$ являются допустимыми в задачах участников при $p = p^*$ и удовлетворяют условию баланса товаров. А условия (8) говорят о том, что $\bar{x}_j^i$ образуют оптимальные решения задач участников. Тем самым p^* – равновесный вектор цен, что и требовалось показать.

Вторая часть утверждения теоремы – равновесный вектор p^* задает точку минимума функции $\varphi(p)$ – доказывается аналогично. Нужно заметить, что из самого определения равновесия следует $p^* > 0$. Дальнейшие рассуждения повторяют приведенные выше в обратном порядке. Теорема доказана.

Еще один критерий равновесия можно получить, используя переход к сопряженным функциям. Для вогнутой функции f сопряженную функцию f^* естественно вводить равенством

$$f^*(y) = \inf_x \{(y, x) - f(x)\}.$$

Несложно убедиться, что это эквивалентно равенству $f^*(y) = -(-f^*)(-y)$, где $(-f)^*$ – сопряженная к выпуклой функции $g = -f$ в традиционном смысле (см. [5, с.120]). Такое определение согласуется с введенным ранее определением супердифференциала $\partial f = -\partial(-f)$, оставляя для точечно-множественного отображения $\partial f^* : y \to \partial f^*(y)$ справедливым равенство $\partial f^* = (\partial f)^{-1}$.

Пусть $f(p)$, как и ранее, – вогнутая функция, определяемая транспортной задачей модели.

ТЕОРЕМА 2. *Точка минимума функции $\psi(q) = -f^*(\ln q)$ на G^0 задает равновесный вектор цен модели, и обратно: равновесный вектор цен модели задает точку минимума функции ψ на множестве G^0.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть p^0 – равновесный вектор цен. Тогда из приведенных в доказательстве теоремы I рассуждений следует $\ln p^0 \in \partial f(p^0)$. С другой стороны, $\ln p^0 \in \partial h(p^0)$. Эти соотношения эквивалентны соответственно $p^0 \in \partial f^*(\ln p^0)$ и $p^0 \in \partial h^*(\ln p^0)$. Тем самым $0 \in \partial h^*(\ln p^0) - \partial f^*(\ln p^0) =$

$= \partial(h^* - f^*)(\ln p^0)$ и, значит, $y^0 = \ln p^0$ является точкой минимума выпуклой функции $g(y) = h^*(y) - f^*(y)$. Делая замену переменных $y = \ln p$, $p > 0$, получаем, что p^0 является точкой минимума функции $\overline{\psi}(p) = g(\ln p)$ на множестве положительных p, а значит, и на σ^0. Но $h^*(y) = \ln \sum e^{y_i}$ ([5, с.166]), а потому на σ^0 имеем $h^*(\ln p) = \ln \sum_j p_j = 0$. Поэтому при $p \in \sigma^0$ будет $\overline{\psi}(p) = -f^*(\ln p) = \psi(p)$. Таким образом, p^0 – точка минимума функции $\psi(p)$ на множестве σ^0, что и требовалось доказать.

Пусть теперь p^0 – точка минимума функции $\psi(p)$ на множестве σ^0. Тогда это точка минимума и для функции $\overline{\psi}(p) = g(\ln p)$ на σ^0. Но функции h^* и f^*, как легко видеть, обладают свойством

$$h^*(y + te) = h^*(y) + t,$$
$$f^*(y + te) = f^*(y) + t.$$

Тем самым $g(y + te) = g(y)$, что дает $\overline{\psi}(\lambda p) = \overline{\psi}(p)$ при любом $\lambda > 0$. Значит, p^0 – точка минимума функции $\overline{\psi}(p)$ не только на σ^0, но и на более широком множестве – множестве всех $p > 0$. Дальнейшее уже повторит приведенные ранее рассуждения в обратном порядке, что в итоге приводит к доказательству равновесности вектора p^0. Теорема доказана.

Следует отметить, что $\psi(q)$, как и $\varphi(p)$, – выпуклая функция. Это следует непосредственно из ее определения ввиду вогнутости функции $\ln x$:

$$\psi(q) = -\inf_p \{(p, \ln q) - f(p)\} = \sup_p \{-(p, \ln q) + f(p)\}, \tag{9}$$

и под знаком супремума стоит выпуклая функция от q. Кроме того, $\mathrm{dom}\,\psi = \sigma^0$.

3. Алгоритмы отыскания равновесия

На основе полученных признаков точек равновесия можно строить различные алгоритмы отыскания таких точек, используя те или иные методы для минимизации функций φ или ψ. В частности, можно получить и конечные процедуры, если учесть особый характер задания этих функций. Ниже приводится алгоритм, базирующийся на рассмотрении задачи минимизации функции φ.

Введем задачу минимизации функции $\tilde{\varphi}(p, z) = (p, \ln p) -$

$-\sum_i \sum_j z_{ij} \ln c_j^i$ при ограничениях (2)-(4) и $\rho \in \mathcal{G}^0$. Ясно, что эта задача эквивалентна задаче минимизации функции $\varphi(\rho)$: если ρ^0, z^0 доставляют минимум $\tilde{\varphi}$ при указанных ограничениях, то ρ^0 - искомая точка минимума функции φ, и наоборот: если ρ^0 - точка минимума для φ, то найдутся z_{ij}^0, решающие задачу (I)-(4) при $\rho = \rho^0$ и такие, что (ρ^0, z^0) - решение упомянутой задачи минимизации функции $\tilde{\varphi}$.

Процедура минимизации функции $\tilde{\varphi}(\rho, z)$ при указанных ограничениях может быть охарактеризована как в определенном смысле направленный перебор пар множеств $\mathcal{B}_K, W_K \subset I \times J$, задающих структуру текущего допустимого решения (ρ^K, z^K), имеющегося на K-м шаге процесса. Это выражается в том, что величины $z_{ij} = z_{ij}^K$ удовлетворяют условиям

$$z_{ij} = 0, \text{ если } (i,j) \notin \mathcal{B}_K \cup W_K, \tag{I0}$$

$$z_{ij} = \beta_j^i, \text{ если } (i,j) \in W_K. \tag{II}$$

Текущая пара множеств $(\mathcal{B}_K, W_K)$, которую в дальнейшем будем кратко именовать структурой U_K, записывая $U_K = (\mathcal{B}_K, W_K)$, должна удовлетворять условиям:

(γ) граф $\Gamma(\mathcal{B}_K)$, имеющий множеством вершин $I \cup \{(m+j) | j \in J\}$ и множеством дуг $\{(i, m+j) | (i,j) \in \mathcal{B}_K\}$, не содержит циклов;

($\gamma\gamma$) к каждой вершине $i \in I$ этого графа примыкает хотя бы одна дуга, т.е. при любом $i \in I$ множество таких j, что $(i,j) \in \mathcal{B}_K$, не пусто. О множестве $\mathcal{B}_K$, обладающем таким свойством, будем говорить, что оно является i-накрывающим.

Граф $\Gamma(\mathcal{B}_K)$, вообще говоря, имеет несколько компонент связности. Пусть на ν-й компоненте находятся вершины $i \in I_\nu$ и $m+j$ при $j \in J_\nu$.

Выполнение итерации начинается с определения точки $\rho = \tau^K \in \mathcal{G}^0$, координаты которой удовлетворяют системе линейных уравнений

$$\sum_{j \in J_\nu} \rho_j = \sum_{i \in I_\nu} \Big(\lambda_i - \sum_{(i,j) \in W_K} \beta_j^i\Big) + \sum_{j \in J_\nu} \sum_{(i,j) \in W_K} \beta_j^i, \quad \nu = 1, 2, \ldots, \tag{I2}$$

$$\frac{\rho_j}{c_j^i} = \frac{\rho_\ell}{c_\ell^i}, \quad (i,j), (i,\ell) \in \mathcal{B}_K. \tag{I3}$$

При этом J_ν всегда не пусто ввиду условия ($\gamma\gamma$). Однако I_ν и W_K могут оказаться пустыми. В этом случае соответствующая сумма в (I2) принимается равной нулю.

Как легко видеть, система (12)-(13) имеет единственное решение. Действительно, на каждой компоненте связности графа $\Gamma(\mathcal{B}_k)$ переменные p_j определяются с точностью до множителя из условий (13); все они будут одного знака, который зависит от знака правой части соответствующего из уравнений (12). Однако $p = p^k$ удовлетворяет (12) и, значит, все правые части в (12) положительны. Суммируя уравнения (12), получаем $\sum_{j\in J} p_j = \sum_{i\in I} \lambda_i = 1$. Тем самым $\tau^k \in \sigma^o$.

Уравнения (12) являются необходимыми и достаточными условиями совместности системы уравнений (2)-(3) при дополнительном требовании (10)-(11). При этом величины z_{ij} при $(i,j) \in \mathcal{B}_k$ ввиду условия (γ) на граф $\Gamma(\mathcal{B}_k)$ будут определяться однозначно как аффинные функции параметров p_j : $z_{ij} = z_{ij}^{U_k}(p)$. При $p = p^k$ имеем $z_{ij}^{U_k}(p_k) = z_{ij}^k$.

(i) Если оказалось $p = \tau^k$, то, определив величины $y_i = c_j^i / p_j^k$, $(i,j) \in \mathcal{B}_k$ (это возможно ввиду i-накрываемости множества $\mathcal{B}_k$), проверяем выполнение неравенств

$$y_i p_l^k \geq c_l^i, \quad (i,l) \notin \mathcal{B}_k \cup W_k, \tag{14}$$

$$y_i p_s^k \leq c_s^i, \quad (i,s) \in W_k. \tag{15}$$

Если все неравенства (14)-(15) выполняются, то это означает, что $x_j^i = z_{ij}^k / p_j^k$ решают задачи участников при $p = p^k$, а из $\sum_i z_{ij}^k = p_j^k$ имеем $\sum_i x_j^i = 1$, т.е. выполняется требуемое условие баланса для каждого товара. Тем самым p^k - искомый равновесный вектор цен.

Если же среди неравенств (14)-(15) есть нарушающиеся, то выбираем произвольно одно из них, и соответствующая пара (i,l) или (i,s), для которой введем общее обозначение (i_0, j_0), пополняет множество $\mathcal{B}_k$. Если речь идет о неравенстве из системы (15), то пара (i_0, j_0), пополняя $\mathcal{B}_k$, исключается из W_k. Таким образом, получаем структуру $U_k' = (\mathcal{B}_k', W_k')$, и если $\Gamma(\mathcal{B}_k')$, как и $\Gamma(\mathcal{B}_k)$, не содержит циклов, то U_k' и есть U_{k+1}. В противном случае, когда в результате пополнения $\mathcal{B}_k$ парой (i_0, j_0) образовался цикл, выполняется обычная процедура метода потенциалов для транспортных задач, связанная с вводом переменной $z_{i_0 j_0}$ в число базисных: $z_{i_0 j_0}$ увеличиваем, если было $z_{i_0 j_0}^k = 0$, и уменьшаем, если было

$z^{k}_{i_0 j_0} = \beta^{i_0}_{j_0}$; остальные переменные z_{ij} , отвечающие дугам возникшего цикла, корректируются надлежащим образом. В результате определится исключаемая дуга $(i', m+j')$, размыкающая возникший цикл, что вызовет соответствующую корректировку $\mathcal{B}'_k$ и W'_k . Это дает структуру U_{k+1} и новые $z_{ij} = z^{k+1}_{ij}$.

Значения переменных ρ_j в рассматриваемом случае не меняются: $\rho^{k+1} = \rho^k$.

(е) При $\rho^k \neq r^k$ рассматриваем $\rho(t) = (1-t)\rho^k + tr^k$ и определяем на $[0,1]$ максимальное $t = t^*$, при котором еще $0 \leq$ $\leq z^{U_k}_{ij}(\rho(t)) \leq \beta^i_j$. В случае $t^* = 1$ положим $\mathcal{B}_{k+1} = \mathcal{B}_k$, $W_{k+1} = W_k$, $\rho^{k+1} = r^k$, $z^{k+1}_{ij} = z^{U_k}_{ij}(r^k)$, и на следующем шаге будем иметь случай (i).

Если же $t^* < 1$, то будем иметь две возможности.

$(e\alpha)$ Лимитирующим при определении t^* является некоторое неравенство $z^{U_k}_{i_1 j_1}(\rho(t)) \geq 0$, $(i_1, j_1) \in \mathcal{B}_k$. Принимаем $\mathcal{B}_{k+1} =$ $= \mathcal{B}_k \setminus \{(i_1, j_1)\}$, $W_{k+1} = W_k$, $\rho^{k+1} = \rho(t^*)$, $z^{k+1}_{ij} = z^{U_k}_{ij}(\rho(t^*))$.

$(e\beta)$ Лимитирующим при определении t^* является некоторое неравенство $z^{U_k}_{i_1 j_1}(\rho(t)) \leq \beta^{i_1}_{j_1}$. Принимаем $\mathcal{B}_{k+1} = \mathcal{B}_k \setminus \{(i_1, j_1)\}$, $W_{k+1} = W_k \cup \{(i_1, j_1)\}$, $\rho^{k+1} = \rho(t^*)$, $z^{k+1}_{ij} = z^{U_k}_{ij}(\rho(t^*))$.

В случае, когда обе эти возможности реализуются одновременно, можно продолжить процесс, следуя какой-либо одной из них. Ясно, что такую ситуацию следует рассматривать как вырождение процесса, аналогичное вырождению в симплекс-методе линейного программирования. Для доказательства сходимости необходимо ввести дополнительное предположение, о котором будет сказано ниже.

Отметим, что при любой из указанных возможностей множество $\mathcal{B}_{k+1}$ будет, как и $\mathcal{B}_k$, i-накрывающим, ибо если для некоторого i лишь одна пара (i,j) входит в $\mathcal{B}_k$, то $z^{U_k}_{ij}(\rho) = z^k_{ij} = \lambda_i - \sum_{j:(i,j)\in W_k} \beta^i_j$, а потому такая пара (i,j) не может фигурировать в качестве (i_1, j_1) .

4. Обоснование сходимости

Обоснование сходимости описанного алгоритма базируется на том, что значение функции $\tilde{\varphi}(\rho, z)$ при переходе от шага к шагу, вообще говоря, не возрастает, и обязательно реализуются шаги, на которых убывание этого значения строгое. Рассмотрим отдельно возможные типы итераций.

Прежде всего отметим, что точки ρ^k и z^k принадлежат аффинному многообразию $L(\mathcal{B}_k)$, описываемому системой линейных уравнений (12) и требованием $\sum \rho_j = 1$. При изменении точки ρ на $L(\mathcal{B}_k)$ величины z_{ij}^j, удовлетворяющие (2)-(3) и (10)-(11), определены однозначно как аффинные функции от ρ: $z_{ij} = z_{ij}^{v_k}(\rho)$. Подставляя их в (1), получим снова аффинную функцию $\delta(\rho) = \sum_i \sum_j z_{ij}^{v_k}(\rho) \ln c_j^i$. Требуя дополнительно $\rho > 0$, можно рассмотреть для таких ρ функцию $\tilde{\varphi}(\rho, z)$:

$$\theta(\rho) = \tilde{\varphi}(\rho, z(\rho)) = (\rho, \ln \rho) - \delta(\rho).$$

Покажем, что z^k является точкой минимума выпуклой функции $\theta(\rho)$ на указанном множестве, т.е. на $\Lambda^0(\mathcal{B}_k) = \sigma^0 \cap L(\mathcal{B}_k)$.

Чтобы показать, что z^k - точка минимума функции $\theta(\rho)$ на $\Lambda^0(\mathcal{B}_k)$, достаточно показать, что производная функции $\theta(\rho)$ по каждому направлению q, не выводящему из $L(\mathcal{B}_k)$, равна нулю. Функция $\theta(\rho)$ на $\Lambda^0(\mathcal{B}_k)$ дифференцируема, и можно ограничиться рассмотрением лишь базисной системы направлений. Такая система направлений содержится в совокупности векторов q, образованных по следующему правилу: взяв любые два номера $j_1, j_2 \in J_\gamma$, полагаем

$$\begin{cases} q_{j_1} = 1, \\ q_{j_2} = -1, \\ q_j = 0, \quad j \neq j_1, j_2. \end{cases} \tag{16}$$

Для функции $h(\rho) = (\rho, \ln \rho)$ имеем $\partial h / \partial \rho_j = 1 + \ln \rho_j$, а значит, для указанного q будет

$$\frac{\partial h}{\partial q}(z^k) = \ln z_{j_1}^k - \ln z_{j_2}^k. \tag{17}$$

Вычислим теперь производную функции $\delta(\rho)$ по этому же направлению. Введем двойственные переменные u_i, v_j и w_{ij}, подчинив их условиям

$$u_i + v_j = \ln c_j^i, \quad (i,j) \in \mathcal{B}_k, \tag{18}$$

$$u_i + v_j + w_{ij} = \ln c_j^i, \quad (i,j) \in W_k. \tag{19}$$

Тогда из (2)-(3), (10)-(11) и (18)-(19) получаем

$$\delta(\rho) = \sum_{i,j} z_{ij}^{v_k}(\rho) \ln c_j^i = \sum u_i \lambda_i + \sum v_j \rho_j + \sum_{(i,j) \in W_k} \rho_j^i w_{ij}. \tag{20}$$

Отсюда имеем

$$\frac{\partial \delta}{\partial q} = v_{j_1} - v_{j_2} . \qquad (21)$$

Из (18) следует, что на каждой компоненте связности графа $\Gamma(\mathcal{B}_k)$ величины v_j определяются с точностью до постоянного слагаемого, которое, однако, не сказывается на значении $\partial\delta/\partial q$, ибо вершины $(m+j_1)$ и $(m+j_2)$ принадлежат одной компоненте ввиду $j_1, j_2 \in J_\nu$. Очевидно, что для того, чтобы для данной совокупности значений v_j нашлись подходящие u_i, вместе с которыми они удовлетворяют (18), необходимо и достаточно, чтобы v_j удовлетворяли системе

$$v_j - \ln c_j^i = v_e - \ln c_e^i, \quad (i,j),(i,\ell) \in \mathcal{B}_k .$$

Заменой переменных $\rho_j = e^{v_j}$ эта система переводится в (15), которой, как известно, удовлетворяют $\rho_j = z_j^k$. Тем самым на каждой компоненте связности графа $\Gamma(\mathcal{B}_k)$ величины v_j с точностью до постоянного слагаемого (своего для каждой компоненты) совпадают с величинами $\ln z_j^k$. А тогда из (21) следует

$$\frac{\partial \delta}{\partial q} = \ln z_{j_1}^k - \ln z_{j_2}^k . \qquad (22)$$

В итоге из (17) и (22) имеем

$$\frac{\partial \eta}{\partial q}(z^k) = \frac{\partial \delta}{\partial q} ,$$

а значит, $\frac{\partial \theta}{\partial q}(z^k) = 0$, что и требовалось доказать.

Таким образом, показано, что точка z^k является точкой минимума выпуклой функции $\theta(\rho)$ на множестве $\Lambda^0(\mathcal{B}_k)$. Ввиду очевидной строгой выпуклости функции $(\rho, \ln\rho)$ строго выпуклой является и функция $\theta(\rho)$. А потому z^k – единственная точка минимума для $\theta(\rho)$ на $\Lambda^0(\mathcal{B}_k)$. Тем самым при движении из ρ^k в z^k по отрезку, их соединяющему, как это происходит в случае (е), значение $\theta(\rho(t))$ строго убывает. В результате $\theta(\rho^{k+1}) < \theta(\rho^k)$, т.е. $\tilde{\varphi}(\rho^{k+1}, z^k) < \tilde{\varphi}(\rho^k, z^k)$, если только $t^* > 0$. К исследованию этого вопроса мы вернемся ниже.

Рассмотрим сейчас ситуацию, возникающую в случае (i), когда $\mathcal{B}_k$ пополняется парой (i_0, j_0). Если при этом образовался цикл на ν-й компоненте графа $\Gamma(\mathcal{B}_k')$, то производимые действия, как легко видеть, есть не что иное, как итерация метода потенциалов для транспортной задачи, получающейся из

(I)-(4) сужением I до I_ν, J до J_ν и подходящей корректировкой правых частей в (2)-(3): $\lambda_i' = \lambda_i - \sum_{j \notin J_\nu} z_{ij}^k$, $\rho_j' = \rho_j^k - \sum_{i \notin I_k} z_{ij}^k$. Величины $z_{ij} = z_{ij}^k$, $(i,j) \in I_\nu \times J_\nu$, образуют допустимое решение в этой задаче, компонента связности графа $\Gamma(\mathcal{B}_k)$ с номером ν является базисным графом, отвечающим имеющемуся допустимому решению, а двойственные переменные u_i и v_j задаются соответственно величинами $\ln y_i, i \in I_\nu$ и $\ln \rho_j^k$, $j \in J_\nu$. Соответствующие неравенства из (I4) и (I5) являются условиями критерия оптимальности имеющегося допустимого решения в этой задаче. Таким образом, в рассматриваемой ситуации при отсутствии вырождения происходит рост значения функции $\sum_{i \in I_\nu} \sum_{j \in J_\nu} z_{ij} \ln c_j^i$, а значит, и убывание значения функции $\tilde{\varphi}(\rho, z)$.

Пусть при пополнении множества $\mathcal{B}_k$ парой (i_0, j_0) в случае (i) не происходит образование цикла, а дуга $(i_0, m+j_0)$ соединяет компоненты связности графа $\Gamma(\mathcal{B}_k)$ с номерами ν и $(\nu+1)$. Считаем для определенности $i_0 \in I_\nu$, $j_0 \in J_{\nu+1}$. Ввиду i-накрываемости $\mathcal{B}_k$ множество J_ν не пусто: найдется $j_1 \in J_\nu$. В результате происходит расширение аффинного многообразия $L(\mathcal{B}_k)$: направление $q = -e_{j_1} + e_{j_0}$ не выводит из $L(\mathcal{B}_{k+1})$, но выводит из $L(\mathcal{B}_k)$ (e_{j_0}, e_{j_1} - координатные орты).

Предположим, что пара (i_0, j_0) отвечает нарушающемуся неравенству из системы (I5), т.е. (i_0, j_0) - некоторая пара $(i, s) \in W_k$:

$$y_{i_0} z_{j_0}^k > c_{j_0}^{i_0}.$$

Но $y_{i_0} = c_{j_1}^{i_0} / z_{j_1}^k$, а значит, получим

$$\frac{c_{j_1}^{i_0}}{z_{j_1}^k} > \frac{c_{j_0}^{i_0}}{z_{j_0}^k}, \tag{23}$$

в то время как

$$\frac{c_{j_1}^{i_0}}{z_{j_1}^{k+1}} = \frac{c_{j_0}^{i_0}}{z_{j_0}^{k+1}}, \tag{24}$$

ибо $(i_0, j_0), (i_0, j_1) \in \mathcal{B}_{k+1}$. Это означает, что $z^{k+1} \neq z^k$, и потому $\theta(z^{k+1}) < \theta(\rho^{k+1})$. Покажем, что $z_{i_0 j_0}^{v_{k+1}}(z^{k+1}) < \beta_{j_0}^{i_0}$, и, следовательно, ограничение $z_{i_0 j_0}^{v_k}(\rho(t)) \leq \beta_{j_0}^{i_0}$ не может оказаться лимитирующим при выполнении $(k+1)$-го шага.

Действительно, как несложно убедиться, для $z_{i_0 j_0}^{v_{k+1}}$ верна формула

$$z_{i_0 j_0}^{v_{k+1}}(\rho)=\sum_{i\in I_\nu}(\lambda_i-\sum_{(i,j)\in W_k}\beta_j^i)-\sum_{j\in J_\nu}(\rho_j-\sum_{(i,j)\in W_{k+1}}\beta_j^i). \tag{25}$$

Нам известно, что при $\rho=\tau^k$ получается $z_{i_0 j_0}^{v_{k+1}}(\tau^k)=\beta_{j_0}^{i_0}$.
Из формулы (25) следует, что для доказательства неравенства $z_{i_0 j_0}^{v_{k+1}}(\tau^{k+1})<\beta_{j_0}^{i_0}$ достаточно показать, что $\tau_j^{k+1}>\tau_j^k$ при всех $j\in J_\nu$. Из системы линейных уравнений для определения точки τ^{k+1} следует, что между величинами τ_j^{k+1}, $j\in J_\nu$, взаимные пропорции те же, что и между соответствующими τ_j^k. Это же имеет место и для величин τ_j^{k+1}, $j\in J_{\nu+1}$. Тем самым

$$\tau_j^{k+1}=\alpha\tau_j^k,\ j\in J_\nu, \tag{26}$$

$$\tau_j^{k+1}=\beta\tau_j^k,\ j\in J_{\nu+1}. \tag{27}$$

Обозначив правые части ν-го и $(\nu+1)$-го уравнений системы (12) соответственно через Δ_ν и $\Delta_{\nu+1}$, можем записать

$$\sum_{j\in J_\nu}\tau_j^k=\Delta_\nu, \tag{28}$$

$$\sum_{j\in J_{\nu+1}}\tau_j^k=\Delta_{\nu+1}. \tag{29}$$

При определении τ^{k+1} компоненты связности графа $\Gamma(\mathcal{B}_k)$ с номерами ν и $(\nu+1)$ объединяются в одну компоненту, что дает

$$\sum_{j\in J_\nu\cup J_{\nu+1}}\tau_j^{k+1}=\Delta_\nu+\Delta_{\nu+1}.$$

Используя (26)-(29), отсюда имеем

$$\alpha\Delta_\nu+\beta\Delta_{\nu+1}=\Delta_\nu+\Delta_{\nu+1},$$

что дает, ввиду $\Delta_\nu,\Delta_{\nu+1}>0$, $1\in(\alpha,\beta)$.

С другой стороны, из (23)-(24) следует

$$\frac{\tau_{j_0}^{k+1}}{\tau_{j_1}^{k+1}}=\frac{c_{j_0}^{i_0}}{c_{j_1}^{i_0}}<\frac{\tau_{j_0}^k}{\tau_{j_1}^k}.$$

Подставляя $\tau_{j_0}^{k+1}=\beta\tau_{j_0}^k$ и $\tau_{j_1}^{k+1}=\alpha\tau_{j_1}^k\ (j_0\in J_{\nu+1}, j_1\in J_\nu)$, получаем

$$\frac{\beta\tau_{j_0}^k}{\alpha\tau_{j_1}^k}<\frac{\tau_{j_0}^k}{\tau_{j_1}^k},$$

т.е. $\beta<\alpha$. Учитывая полученное выше $1\in(\alpha,\beta)$, имеем

$\alpha > 1$, а тем самым $\tau_j^{k+1} = \alpha \tau_j^k > \tau_j^k$ для $j \in \mathcal{J}_\nu$, что и требовалось.

Такой же результат получим и в случае, когда добавляется пара (i_0, j_0) , отвечающая нарушающемуся неравенству из системы (I4): $\tau^{k+1} \neq \rho^{k+1} = \tau^k$, $\Theta(\tau^{k+1}) < \Theta(\rho^{k+1})$ и неравенство $z_{i_0 j_0}^{U_{k+1}}(\rho(t)) \geq 0$ не является лимитирующим при продвижении из ρ^{k+1} в τ^{k+1} . Из приведенных рассмотрений уже следует, что текущее значение $\tilde{\varphi}(\rho^k, z^k)$ в течение всего процесса не возрастает. Перейдем к заключительной части доказательства сходимости процесса, вводя следующее дополнительное условие невырожденности:

$$\sum_{j \in K} \beta_j^i \neq \lambda_i \quad \forall i \in I, \ \forall K \subset \mathcal{J}. \qquad (30)$$

Покажем, что при выполнении этого условия между двумя последовательными реализациями случая (i) (т.е. между двумя пополнениями множества $\mathcal{B}_k$) упомянутое текущее значение функции $\tilde{\varphi}(\rho, z)$ непременно убывает.

Рассмотрим сначала случай, когда пополнение множества $\mathcal{B}_k$ парой (i_0, j_0) привело к образованию цикла в текущем графе $\Gamma(\mathcal{B}_k)$. В этой ситуации значение целевой функции транспортной задачи (I), а вместе с ним и значение функции $\tilde{\varphi}(\rho, z)$, не улучшится в результате итерации лишь тогда, когда либо переменная $z_{i'j'}$, отвечающая исключаемой дуге возникшего цикла, должна согласно правилам алгоритма уменьшаться, а $z_{i'j'}^k = 0$, либо она должна увеличиваться, а уже $z_{i'j'}^k = \beta_{j'}^{i'}$. Ввиду предположения (30) $i' \neq i_0$, и, следовательно, полученные на этом шаге величины y_i были бы такими же, если бы вместо $\mathcal{B}_k$ рассматривалось множество $\tilde{\mathcal{B}}_k = \mathcal{B}_k \setminus \{(i', j')\}$. Тем самым возникающую на следующем шаге ситуацию можно рассматривать как реализацию случая (i), но с множеством $\tilde{\mathcal{B}}_k$ и отвечающим ему $\tilde{W}_k$, полученным из W_k соответствующей (если потребуется) корректировкой. Иными словами, мы имеем ту же ситуацию, но с меньшим числом элементов в текущем множестве $\mathcal{B}_k$. Ясно, однако, что теперь добавление дуги $(i_0, m+j_0)$ уже не вызывает образование цикла в графе $\Gamma(\tilde{\mathcal{B}}_k)$, а потому на предстоящем шаге уже реализуется ситуация (е). Перейдем к рассмотрению этой ситуации, но для множества $\mathcal{B}_k$.

Пусть пополнение множества $\mathcal{B}_k$ парой (i_0, j_0) не привело к образованию цикла в графе $\Gamma(\mathcal{B}_k)$ и, следовательно, на шаге $(k+1)$ для множества $\mathcal{B}_{k+1} = \mathcal{B}_k \cup \{(i_0, j_0)\}$ реализуется ситуация (е). Убывание значения функции $\tilde{\varphi}(p, z)$ на этом шаге не произойдет лишь в том случае, когда $t^* = 0$. При этом исключаемая пара (i_1, j_1) отлична от (i_0, j_0), ибо, как отмечалось выше, пара (i_0, j_0) не может отвечать лимитирующему ограничению. Кроме того, точка $p^{k+2} = p^{k+1} = z^k$ будет оставаться точкой минимума функции $\theta(p)$ на множестве $\mathcal{L}(\mathcal{B}_k \setminus \{(i_1, j_1)\}) \cap \mathcal{G}^0$. Поэтому возникающую на шаге $(k+2)$ ситуацию можно рассматривать снова как реализацию случая (е), но после пополнения множества $\tilde{\mathcal{B}}_k = \mathcal{B}_k \setminus \{(i_1, j_1)\}$ (а не $\mathcal{B}_k$) парой (i_0, j_0). Тем самым, как и выше, мы снова имеем ситуацию предыдущего шага, но с меньшим числом элементов в текущем множестве $\mathcal{B}_k$.

Теперь ясно, что после некоторого числа таких "холостых" реализаций ситуации (е) будет непременно получено $t^* > 0$, а значит, произойдет строгое убывание текущего значения функции $\tilde{\varphi}(p, z)$. Остается заметить, что при реализации ситуации (i) это значение однозначно определено самой структурой U_k, и потому такая структура в дальнейшем уже повториться не может. Отсюда следует конечность процесса.

Резюмируем изложенное выше в виде следующего утверждения.

ТЕОРЕМА 3. *При исходных предположениях о модели и условии невырожденности (30) описанный алгоритм позволяет отыскать состояние равновесия за конечное число шагов.*

5. Двойственный вариант алгоритма

В силу теоремы 2, вектор равновесных цен модели можно получить также, минимизируя на $\mathcal{G}^0$ функцию $\psi(q)$. Это приводит к иному варианту алгоритма, который уместно именовать двойственным. Аналогом задачи минимизации $\tilde{\varphi}(p, z)$ в данном случае является задача:

минимизировать функцию

$$\tilde{\psi}(u, w) = \sum_i u_i \lambda_i + \sum_{i,j} w_{ij} \beta_j^i \tag{31}$$

при условиях

$$q=(q_1,\dots,q_n)\in\sigma^0, \tag{32}$$

$$u_i+\ln q_j+w_{ij}\geq \ln c_j^i,\ (i,j)\in I\times J, \tag{33}$$

$$w_{ij}\geq 0,\ (i,j)\in I\times J. \tag{34}$$

Переход к этой задаче объясняется следующими соображениями. Заменяя в (9) величину $f(p)$ на значение целевой функции двойственной задачи к транспортной задаче (I)-(4) (в силу теоремы двойственности), получим

$$\psi(q)=\sup_{p\in R^n}\ \inf_{(u,v,w)\in D}\Big\{-(p,\ln q)+\sum_i\lambda_i u_i+\sum_j v_j p_j+\sum_{i,j}\beta_i^j w_{ij}\Big\}, \tag{35}$$

где D - непустое множество допустимых решений упомянутой двойственной задачи, т.е. множество, описываемое системой

$$u_i+v_j+w_{ij}\geq \ln c_j^i,\ (i,j)\in I\times J, \tag{36}$$

$$w_{ij}\geq 0,\ (i,j)\in I\times J. \tag{37}$$

Анализируя представление (35) для $\psi(q)$, легко видеть, что его правая часть может быть получена, если рассматривать задачу минимизации функции (32) на множестве D при дополнительных условиях

$$v_j=\ln q_j,\ j\in J, \tag{38}$$

и, вводя множители Лагранжа p_j для ограничений (38), перейти к возникающей в результате этого двойственной задаче. Ясно, конечно, что ограничения (38) можно просто учесть, подставляя значения $v_j=\ln q_j$ в неравенства (36), что и дает систему (33).

Перейдем к описанию алгоритма. Как и выше, на k-м шаге процесса имеется некоторая структура $U_k=(\mathcal{B}_k, W_k)$, удовлетворяющая требованиям (γ) и ($\gamma\gamma$), а также некоторое допустимое решение $u_i=u_i^k, q_j=q_j^k, w_{ij}=w_{ij}^k$ задачи (3I)-(34), которое согласуется со структурой U_k в следующем смысле:

$$u_i^k+\ln q_j^k+w_{ij}^k=\ln c_j^i,\ (i,j)\in\mathcal{B}_k\cup W_k, \tag{39}$$

$$w_{ij}^k=0,\ (i,j)\notin W_k, \tag{40}$$

Несложно указать начальное решение, используя известную процедуру получения допустимого двойственного решения в транспортных задачах:

1) фиксируем $w_{ij}=0,\ (i,j)\in I\times J$, и какой-либо $q>0$;

2) принимаем $\tilde{u}_i = \max\limits_j \ln(c_j^i/q_j),\ i\in I$, что уже дает выполнение неравенств (33);

3) меняем q : $\ln\tilde{q}_j = \max\limits_i\{\ln c_j^i - \tilde{u}_i\}$;

4) еще раз меняем q, проводя нормировку $\tilde{q}$: $q_j^o = \tilde{q}_j / \sum\limits_j \tilde{q}_j$; корректируем соответствующим образом u_i :

$$u_i^o = \tilde{u}_i + \ln\sum_j \tilde{q}_j .$$

Легко видеть, что в результате действительно получено некоторое допустимое решение задачи (31)-(34). Для получения согласованной с ним структуры $U_o = (\mathcal{B}_o, W_o)$ надо принять $W_o = \emptyset$. а в качестве $\mathcal{B}_o$ годится любое максимальное подмножество множества $\{(i,j)\in I\times J \mid u_i^o + \ln q_j^o = \ln c_j^i\}$, для которого еще выполняется требование (γ). Отметим, что при этом требование $(\gamma\gamma)$ выполняется в усиленном варианте: к любой вершине графа $\Gamma(\mathcal{B}_k)$ примыкает по крайней мере одна дуга.

Возможны и иные варианты процедуры получения начальной структуры U_o и согласованного с ней допустимого решения задачи (31)-(34).

Изложим процедуру k-й итерации процесса. Как и в случае прямого алгоритма, описанного выше, итерация начинается с определения вектора $p = r^k$, компоненты которого удовлетворяют системе (12)-(13). Для полученного r^k возможны два случая:

(i) $r^k = q^k$;

(ii) $r^k \neq q^k$.

В случае (i) однозначно определяются величины $z_{ij} = z_{ij}^k$, удовлетворяющие при $p_j = r_j^k$ системе условий (2)-(3), (10)-(11). Если оказалось, что такие z_{ij} удовлетворяют условию (4), т.е. образуют допустимое решение задачи (1)-(4), то r^k - равновесный вектор цен. В противном случае выбираем какое-либо из нарушаемых условий (4) и корректируем структуру U_k , получая новую структуру U_k' . Пусть нарушаемое условие отвечает паре (i_o, j_o) . Полагаем $\mathcal{B}_k' = \mathcal{B}_k \setminus \{(i_o,j_o)\}$, а $W_k' = W_k$ при $z_{i_oj_o}^k < 0$ и $W_k' = W_k \cup \{(i_o,j_o)\}$ при $z_{i_oj_o}^k > \beta_{j_o}^{i_o}$.

Если оказалось, что для $\mathcal{B}_k'$ выполняется условие i-накрываемости, то U_k' и есть структура U_{k+1} , и мы переходим к следующему шагу с $q_j^{k+1} = q_j^k,\ u_i^{k+1} = u_i^k,\ w_{ij}^{k+1} = w_{ij}^k$.

Если же дуга $(i_o, m+j_o)$ была единственной дугой графа $\Gamma(\mathcal{B}_k)$, примыкающей к вершине i_0, то $\mathcal{B}'_k$ уже не является i-накрывающим. В этом случае изменяем $u^k_{i_0}$, принимая

$$u^{k+1}_{i_0} = \min_{(i_0,j)\in W_k} \{\ln c^{i_0}_j - \ln z^k_j\} \text{ , если } z^k_{i_0 j_0} < 0, \tag{41}$$

и

$$u^{k+1}_{i_0} = \max_{(i_0,j)\notin \mathcal{B}_k \cup W^j_k} \{\ln c^{i_0}_j - \ln z^k_j\} \text{ , если } z^k_{i_0 j_0} > \beta^{i_0}_{j_0}. \tag{42}$$

В любом из этих случаев пара (i_0, j_1), для которой достигается в приведенных формулах значение $u^{k+1}_{i_0}$ (если таких пар несколько, выбираем любую), пополняет множество $\mathcal{B}'_k$: $\mathcal{B}_{k+1} = \mathcal{B}'_k \cup \{(i_0,j_1)\}$. Кроме того, (i_0,j_1) исключается из W'_k, если было $z^k_{i_0 j_0} < 0$: $W_{k+1} = W_k \setminus \{(i_0,j_1)\}$; в противном случае $W_{k+1} = W'_k$.

Изменение u_{i_0} вызовет соответствующую корректировку величин $w_{i_0 j}$, $(i_0 j) \in W_{k+1}$, после чего можно переходить к следующему шагу.

В случае (ii) рассматриваем $q(t) = tz^k + (1-t)q^k$ при увеличивающихся значениях t от $t = 0$. Меняя таким образом q, будем корректировать надлежащим образом u_i и w_{ij} так, чтобы q_j, u_i, w_{ij} образовывали допустимое решение задачи (31)-(34), согласованное с имеющейся структурой U_k. Легко видеть, что такая корректировка осуществляется однозначно:

$$u_i = \ln c^i_j - \ln q_j, \; (i,j) \in \mathcal{B}_k, \tag{43}$$

$$w_{is} = \ln c^i_s - u_i - \ln q_s, \; (i,s) \in W_k. \tag{44}$$

$$w_{il} = 0, \quad (i,l) \in W_k. \tag{45}$$

Если при этом окажется достижимым значение $t = 1$, то принимаем $q^{k+1} = z^k, U_{k+1} = U_k$ и переходим к следующему шагу, на котором реализуется уже случай (i).

Пусть t^* - максимальное значение t, при котором еще выполняется упомянутое условие согласования, $t^* < 1$ и пара (i_0, j_1) отвечает тому из неравенств (33)-(34), которое лимитирует дальнейшее увеличение значения t. (Если таких неравенств несколько, то выбираем любое из них.) Пара (i_0,j_1) пополняет множество $\mathcal{B}_k$: $\mathcal{B}_{k+1} = \mathcal{B}_k \cup \{(i_0,j_1)\}$. Отметим, что величины $q_j(t)$, отвечающие вершинам $(m+j)$ при $j \in J_\nu$, т.е. лежащим на ν-й компоненте связности графа $\Gamma(\mathcal{B}_k)$, меняются с сохранением взаимных пропорций. Это означает, что величины $\ln q_j(t)$ при $j \in J_\nu$ меняются на одну и ту же константу: $\ln q_j(t) = \ln q_j^k + \Delta$, $j \in J_\nu$. Легко видеть, что на эту же константу должны измениться и величины u_i, отвечающие вершинам $i \in I$ той же компоненты связности: $u_i(t) = u_i^k - \Delta$, $i \in I_\nu$. Следовательно, $u_i(t) + \ln q_j(t) \equiv u_i^k + \ln q_j^k$ при $(i,j) \in I_\nu \times J_\nu$. Поэтому вершины i_0 и $(m+j_1)$ не могут лежать на одной компоненте связности графа $\Gamma(\mathcal{B}_k)$, а значит, граф $\Gamma(\mathcal{B}_{k+1})$ так же, как граф $\Gamma(\mathcal{B}_k)$, не содержит циклов.

Если выбранное лимитирующее неравенство находится в системе (34), то $(i_0, j_1) \in W_k$, и мы принимаем $W_{k+1} = W_k \setminus \{(i_0, j_1)\}$. Если же (i_0, j_1) отвечает лимитирующему неравенству из системы (33), то $(i_0, j_1) \notin \mathcal{B}_k \cup W_k$ и $W_{k+1} = W_k$. Мы переходим к следующему шагу с $u_i^{k+1} = u_i(t^*)$, $q_j^{k+1} = q_j(t^*)$, $w_{ij}^{k+1} = w_{ij}(t^*)$. Ясно, что это допустимое решение задачи (31)-(34) согласуется с полученной структурой U_{k+1}.

Описание алгоритма закончено.

ЗАМЕЧАНИЕ. При практической реализации алгоритма нет необходимости в рассмотрении величин u_i^k и w_{ij}^k. Достаточно иметь только $q = q^k$, получая $u_i = u_i^k$ и $w_{ij} = w_{ij}^k$ по формулам (43)-(45). Условия допустимости $u_i(t)$, $\ln q_j(t)$, $w_{ij}(t)$, как легко видеть,, эквивалентны такой системе линейных неравенств:

$$\frac{q_\ell(t)}{c_\ell^i(t)} \le \frac{q_s(t)}{c_s^i(t)}, \quad (i,\ell) \in \mathcal{B}_k, \ (i,s) \in W_k,$$

$$\frac{q_\ell(t)}{c_\ell^i(t)} \ge \frac{q_j(t)}{c_j^i(t)}, \quad (i,\ell) \in \mathcal{B}_k, \ (i,j) \notin \mathcal{B}_k \cup W_k.$$

Условие двойственной невырожденности: для любого набора величин u_i, $i \in I$, и v_j, $j \in J$, число пар $(i,j) \in I \times J$ таких, что $u_i + v_j = \ln c_j^i$, не превосходит $m+n-1$.

ТЕОРЕМА 4. **При выполнении условия двойственной невырожденности описанный алгоритм дает равновесный вектор цен через конечное число шагов.**

Доказательство этого утверждения проходит по той же схеме, что доказательство теоремы 3, и основывается на монотонном убывании значения функции $\tilde{\varphi}(u, w)$ на текущем решении

$u_i = u_i^k,\ i \in I$, $w_{ij} = w_{ij}^k,\ (i,j) \in I \times J$. Особенностью данного случая является лишь тот факт, что теперь вектор z^k не обязательно является положительным. А поэтому нельзя утверждать, что z^k – точка минимума функции $\psi(u(q), w(q))$, когда q, оставаясь в $\mathfrak{S}^0$, меняется в аффинном многообразии $M(\mathcal{B}_k)$, описываемом системой (13) (а $u_i = u_i(q)$ и $w_{ij} = w_{ij}(q)$ определяются по формулам (43)-(45)). В связи с этим доказательство убывания значения функции $\widetilde{\varphi}$ при изменении q в направлении $h = z^k - q^k$ должно проводиться несколько иначе. Остановимся кратко на этом.

Определив z^k, имеем однозначную разрешимость системы линейных уравнений:

$$\sum_{j \in U_i} z_{ij} = \lambda_i, \quad i \in I,$$

$$\sum_{i \in U^j} z_{ij} = z_j^k, \quad j \in J,$$

$$z_{ij} = \beta_j^i, \quad (i,j) \in W_k,$$

где $U_i = \{ j \in J \mid (i,j) \in \mathcal{B}_k \cup W_k \}$, $U^j = \{ i \in I \mid (i,j) \in \mathcal{B}_k \cup W_k \}$.

Умножая эти условия соответственно на $u_i(q)$, $\ln q_j$, $w_{ij}(q)$ и складывая, получим

$$\sum_{(i,j) \in \mathcal{B}_k \cup W_k} z_{ij} \ln c_j^i = \sum_{i \in I} \lambda_i u_i(q) + \sum_{(i,j) \in W_k} \beta_j^i w_{ij} + \sum_{j \in J} z_j^k \ln q_j,$$

откуда следует

$$\psi(u(q), w(q)) = -(z^k, \ln q) + \Delta,$$

где Δ – не зависящая от q константа. Таким образом, вопрос сводится к исследованию поведения функции $\gamma(q) = (z, \ln q)$ при условии, что $\sum z_j = 1$, а $q \in \mathfrak{S}^0$ меняется в направлении $h = z - q$.

В случае $z > 0$ функция $\gamma(q)$ является строго вогнутой и на $\mathfrak{S}^0$ по известному свойству энтропии, $(z, \ln q) \le (z, \ln z)$, т.е. точка z – точка максимума функции γ на $\mathfrak{S}^0$, а значит, производная по направлению $h = z - q$ будет положительной при $q \ne z$. Оказывается, что последнее верно и без предположения положительности z. Покажем это.

Пусть z – любой, удовлетворяющий условию $\sum z_j = 1$. Тогда

$$\frac{\partial\Gamma}{\partial h}(q)=\sum_j \frac{r_j}{q_j} h_j=\sum_j \frac{r_j}{q_j}(r_j-q_j)=$$

$$=\sum_j \frac{r_j^2}{q_j}-\sum_j r_j=\sum_j \frac{r_j^2}{q_j}-1. \tag{46}$$

Функция $\delta_q(r)=\sum_j r_j^2/q_j$ как функция переменного r при $q\in G^o$ является строго выпуклой и на множестве $H=\{r|\sum_j r_j=1\}$, как несложно убедиться, достигает минимума в точке $r=q$. Но $\delta_q(q)=\sum_j \frac{q_j^2}{q_j}=\sum_j q_j=1$. Тем самым $\delta_q(r)>1$, если $r\neq q$, а из (46) следует требуемое: $\frac{\partial\Gamma}{\partial h}(q)>0$ при $r\neq q$.

Литература

1. Шмырев В.И. Об одном подходе к отысканию равновесия в простейших моделях обмена // Докл. АН СССР. – Т.268, № 5. – С.1062-1066.
2. Шмырев В.И. Алгоритм поиска равновесия в линейной модели обмена// Сиб. мат. журн. – 1985. – Т.26, № 2. – С. 162-175.
3. Шмырев В.И. Алгоритм отыскания равновесия в моделях обмена с фиксированными бюджетами// Оптимизация. – 1983. – Вып. 31(48). – С.137-155.
4. Ненахов Э.И., Примак М.Е. Линейная модель обмена с дополнительными ограничениями. – Киев, 1987. – (Препринт/Ин-т кибернетики АН УССР, № 87-45).
5. Рокафеллар Р. Выпуклый анализ. – М.: Мир, 1973.

Поступила в ред.-изд. отдел
23.12.1988 г.