Выпуск 45(62) ОПТИМИЗАЦИЯ 1989 г.

Численные методы оптимизации

УДК 519.853

УПРАВЛЕНИЕ ТОЧНОСТЬЮ ШАГА В МЕТОДЕ НАГРУЖЕННОГО ФУНКЦИОНАЛА

Б.В.Калашников, Н.И.Калашникова

В данной работе приведено описание метода нагруженного функционала и доказана его локальная квадратичная сходимость способом, отличным от примененного в [1]. Кроме того, здесь разрабатывается способ управления точностью шага этого метода в рамках теории, изложенной в работе [2].

1. Описание метода и вопросы реализации

Пусть в R^n заданы выпуклая скалярная функция $f(x)$, m-мерная выпуклая векторная функция $\varphi(x) = (\varphi_1(x), \varphi_2(x), \ldots, \varphi_m(x))$ и поставлена задача

$$\min\{f(x) : \varphi_i(x) \le 0,\ i = 1,2,\ldots,m;\ x \in R^n\}. \tag{1}$$

Допустим, что задача (1) имеет решение, которое обозначим через x_*, и пусть известна оценка $d_1 \le f(x_*) = f_*$. Согласно [3], поиск решения методом нагруженного функционала состоит в построении последовательностей $\{d_k\}$ и $\{x_k\}$ следующим образом. Пусть перед началом k-го шага имеем оценку $d_k \le f_*$. Построим функцию $\psi : R^n \times R \to R$ по формуле

$$\psi(x,d_k) = (\max\{0, f(x) - d_k\})^2 + \sum_{i=1}^{m} (\max\{0, \varphi_i(x)\})^2 =$$

$$= [f(x) - d_k]_+^2 + \sum_{i=1}^{m} [\varphi_i(x)]_+^2 \tag{2}$$

и выберем x_k из условия

$$\psi(x_k, d_k) = \min_{x \in R^n} \psi(x, d_k). \tag{3}$$

Допустим, что такая точка найдется, и выпишем признак оптимальности

$$[f(x_k) - d_k]_+ \cdot f'(x_k) + \sum_{i=1}^{m} [\varphi_i(x_k)]_+ \cdot \varphi_i'(x_k) = 0.$$

Возможны три различных случая.

I) Если точка x_k оказалась допустимой, то x_k – решение задачи (I). В самом деле, тогда $\psi(x_k, d_k) = [f(x_k) - d_k]_+^2$, и так как $f(x_k) \geq f(x_*) \geq d_k$, то, с одной стороны, справедливы соотношения

$$\psi(x_k, d_k) = (f(x_k) - d_k)^2 \geq (f(x_*) - d_k)^2 = \psi(x_*, d_k),$$

а с другой стороны,

$$\psi(x_k, d_k) = \min_{x \in R^n}(x, d_k) \leq \psi(x_*, d_k).$$

Следовательно, $f(x_k) = f(x_*) = f_*$, что и требовалось показать.

2) Если $f(x_k) \leq d_k$, но x_k не является допустимой точкой, то задача (I) несовместна. Действительно, из признака оптимальности в этом случае получаем равенство

$$\sum_{i=1}^{m} [\varphi_i(x_k)]_+ \cdot \varphi_i'(x_k) = 0,$$

из которого вытекает, что

$$\min_{x \in R^n} \sum_{i=1}^{m} [\varphi_i(x)]_+^2 = \sum_{i=1}^{m} [\varphi_i(x_k)]_+^2 > 0.$$

3) Если x_k – недопустимая точка, но $f(x_k) > d_k$, то можно уточнить оценку снизу для $f(x_*)$: положим

$$d_{k+1} = d_k + \frac{\psi(x_k, d_k)}{f(x_k) - d_k}. \tag{4}$$

Тогда для произвольной допустимой точки x в силу выпуклости f и φ получаем, используя признак оптимальности, цепочку соотношений

$$f(x) \geq f(x_k) + f'(x_k)(x - x_k) = f(x_k) -$$

$$- \frac{\sum_{i=1}^{m} [\varphi_i(x_k)]_+ \cdot \varphi_i'(x_k)}{f(x_k) - d_k} \cdot (x - x_k) \geq f(x_k) +$$

$$+\frac{\sum_{i=1}^{m}[\varphi_i(x_k)]_+^2}{f(x_k)-d_k} = d_k + (f(x_k)-d_k) +$$

$$+\frac{\sum_{i=1}^{m}[\varphi_i(x_k)]_+^2}{f(x_k)-d_k} = d_k + \frac{\psi(x_k,d_k)}{f(x_k)-d_k} = d_{k+1}.$$

Таким образом, $f(x) \geq d_{k+1}$ для любых допустимых x, что и требовалось доказать.

В.Ю.Лебедев [3] показал, что если задача (I) выпукла, ее допустимое множество ограничено, функции f и φ дважды непрерывно дифференцируемы в R^n и существует решение x_* задачи (I) такое, что линеаризованная задача

$$\begin{cases} f'(x_*)\cdot(x-x_*) \longrightarrow min \\ \text{при ограничениях} \\ \varphi_i'(x_*)\cdot(x-x_*) \leq 0, \; i\in J=\{j:\varphi_j(x_*)=0\} \end{cases} \tag{5}$$

имеет решение, то справедлива следующая

ТЕОРЕМА I [3]. Пусть, начиная с $d_1 < f(x_*)$, процесс (3)-(4) не останавливается за конечное число шагов. Тогда существует константа $\xi > 0$ такая, что при достаточно больших k выполнено неравенство

$$0 < f(x_*) - d_{k+1} < \xi\cdot[f(x_*)-d_k]^{3/2}.$$

Рассматривая скорость сходимости точек x_k к решению задачи (I), Б.Ю.Лебедев помимо выпуклости задачи, ограниченности ее допустимого множества и непрерывности вторых производных функций f и φ предполагал, что у задачи (I) есть решение x_* такое, что векторы $\varphi_i(x_*)$, $i\in J$, образуют линейно-независимую систему, и существует число $\tau > 0$, для которого справедливо неравенство

$$y^T\cdot \frac{\partial^2 L(\lambda_*,x_*)}{\partial x^2}\cdot y \geq \tau\cdot\|y\|^2,\; y\in R^n,$$

где $L(\lambda,x)=f(x)+\lambda^T\cdot\varphi(x)$, а $\lambda_*\in R_+^m$ - вектор, удовлетворяющий соотношениям $-\lambda_*^T\cdot\varphi'(x_*)=[f'(x_*)]^T$ и $\lambda_*^T\cdot\varphi(x_*)=0$.

В этих предположениях точка x_* является единственным решением задачи (I), причем существование решения задачи (5) есть следствие из них. В сделанных предположениях справедлива следующая

ТЕОРЕМА 2 [3]. Существует константа $\rho \geq 0$ такая, что при достаточно больших k выполнены неравенства

$$\|x_k - x_*\| \leq \rho \cdot [f(x_*) - d_k]^{1/4} \cdot \|x_{k-1} - x_*\|.$$

Для доказательства локальной квадратичной сходимости метода нагруженного функционала сделаем, дополнительно к условиям теоремы I, следующие предположения:

а) выполнено условие двойственной невырожденности, т.е.

$$f'(x_*) = -\sum_{i \in J} \lambda_{*i} \cdot \varphi_i'(x_*), \ \lambda_{*i} > 0, \ i \in J;$$

б) матрица

$$f''(x_*) + \sum_{i \in J} \lambda_{*i} \cdot \varphi_i''(x_*)$$

не имеет направлений вырождения s, удовлетворяющих равенствам

$$\varphi_i'(x_*) \cdot s = 0, \ i \in J.$$

В п.2 данной работы докажем следующую теорему.

ТЕОРЕМА 3. Пусть в дополнение к условиям теоремы I выполнены условия а) и б), функции f и φ – выпуклые дважды непрерывно дифференцируемые, а векторы $\varphi_i'(x_*)$, $i \in J$, образуют линейно-независимую систему. Тогда существуют константы $D_1 > 0, D_2 > 0$ такие, что при достаточно больших k выполнены неравенства

$$d_* - d_{k+1} \leq D_1 \cdot (d_* - d_k)^2, \qquad (6)$$

$$\|x_{k+1} - x_*\| \leq D_2 \cdot \|x_k - x_*\|^2. \qquad (7)$$

Здесь $d_* = f_* = f(x_*)$.

Схема поиска приближенного решения задачи (I), предложенная В.Ю.Лебедевым [4], обоснована им при следующих предположениях: f и $\varphi_i, i=1,\dots,m$, – выпуклые непрерывно дифференцируемые функции, а множество допустимых точек задачи (I) ограничено и непусто. Схема состоит в следующем.

Пусть d_1 – начальная оценка, x_0 – начальное приближение, а ε_1 и ε_2 – некоторые положительные константы. Отыскивается точка x_1, для которой, во-первых, выполнено неравенство

$$\psi(x_1, d_1) \le \psi(x_0, d_1), \tag{8}$$

а во-вторых, справедливы соотношения

$$\| \psi'_x(x_1, d_1) \| \le \varepsilon_1 [f(x_1) - d_1], \quad \psi(x_1, d_1) > \varepsilon_2, \tag{9}$$

либо

$$\psi(x_1, d_1) \le \varepsilon_2. \tag{10}$$

Если выполнено условие (10), процесс останавливается. В противном случае вычисляется величина d_2 по формуле

$$d_2 = d_1 + \frac{\psi(x_1, d_1)}{f(x_1) - d_1} > d_1, \tag{11}$$

и процедура повторяется, начиная с d_2 и x_1. Способ выбора точек x_k в рамках ограничений (8)-(10) не конкретизируется. В.Ю.Лебедевым доказана следующая

ТЕОРЕМА 4 [4]. Для любых значений d_1, $x_0, \varepsilon_1 > 0$, $\varepsilon_2 > 0$ процесс (8)-(11) останавливается за конечное число шагов причем точки его остановки, полученные при фиксированных x_0, $d_1 \le f(x_*)$ и различных $\varepsilon_1, \varepsilon_2$, будут при $\varepsilon_1 \to 0$, $\varepsilon_2 \to 0$ сходиться к множеству решений задачи (1).

2. Квадратичная сходимость метода

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 3. Так как по теореме 1 последовательность $\{x_k\}$ приближений, построенных методом нагруженного функционала, сходится к x_* – решению задачи (1), мы можем ограничиться изучением поведения точек x_k в такой окрестности V' точки x_*, в которой исходная задача эквивалентна задаче

$$\begin{cases} f(x) \longrightarrow \min, \\ \varphi_j(x) \le 0, j \in J, \end{cases} \tag{12}$$

где $J \subseteq \{1, 2, \ldots, m\}$ – набор индексов активных ограничений, т.е. $J=\{j:\varphi_j(x_*)=0\}$. В окрестности V' признак оптимальности для задачи (3) имеет вид

$$f'(x_k)=-\sum_{j\in J}\frac{[\varphi_j(x_k)]_+}{f(x_k)-d_k}\,,\ \varphi_j'(x_k).$$

В силу непрерывности производных φ_j' и линейной независимости векторов $\{\varphi_j'(x_*)\}_{j\in J}$ можно, переходя в последнем равенстве к пределу при $k\to\infty$, заключить, что справедливо соотношение

$$\lim_{k\to\infty}\frac{[\varphi_j(x_k)]_+}{f(x_k)-d_k}=\lambda_{*j}\,,\ j\in J.$$

И так как $\lambda_{*j}>0,\ j\in J$, по условию двойственной невырожденности а), то при достаточно больших k значения $\varphi_j(x_k)$ положительны для $j\in J$. Поэтому в задаче (I2) вместо неравенств можно поставить равенства.

Рассмотрим вспомогательную задачу

$$\begin{cases} f(x)\longrightarrow \min, \\ \varphi_j(x)=u_j,\ j\in J, \end{cases} \tag{I3}$$

где u_j - параметры из R . Для упрощения обозначений считаем в дальнейшем, не умаляя общности, что $J=\{1,2,\dots,m\}$. Задача (I3) эквивалентна системе из $n+m$ уравнений

$$\begin{cases} F_i=\dfrac{\partial f}{\partial x_i}(x_1,\dots,x_n)+\sum\limits_{j=1}^{m}\lambda_j\cdot\dfrac{\partial\varphi_j}{\partial x_i}(x_1,\dots,x_n)=0,\ i=1,\dots,n, \\ G_j=\varphi_j(x_1,\dots,x_n)-u_j=0,\ j=1,2,\dots,m, \end{cases} \tag{I4}$$

с $n+2m$ неизвестными $x_1,\dots,x_n,\ \lambda_1,\dots,\lambda_m,\ u_1,\dots,u_m$.
Эта система имеет, в частности, решение

$$w^*=(x_1^*,\dots,x_n^*,\lambda_1^*,\dots,\lambda_m^*,0,0,\dots,0)^T,$$

где $\lambda_j^*,\ j=1,\dots,m$, положительны по предположению а) о двойственной невырожденности решения x^*. Легко видеть, что якобиан отображения $H=(F^T,G^T)^T$ в точке w^*

$$\det\frac{\partial H}{\partial(x,\lambda)}(w^*)=\det\left[\begin{array}{c|c} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x^*)+\sum\limits_{j=1}^{m}\lambda_j^*\dfrac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}(x^*) & \dfrac{\partial\varphi}{\partial x}^T(x^*) \\ \hline \dfrac{\partial\varphi}{\partial x}(x^*) & 0 \end{array}\right]$$

по переменным x и λ отличен от нуля в силу предположения б) и линейной независимости строк матрицы $\frac{\partial\varphi}{\partial x}(x^*)$. Следовательно, по теореме о неявной функции найдутся окрестности $U \subset R^m$ точки $(0,\ldots,0)^T \in R^m$, $V \subseteq V'$ точки $x^* = (x_1^*,\ldots,x_n^*)^T$ и $W \subset R_+^m$ точки $\lambda^* = (\lambda_1^*,\ldots,\lambda_m^*)^T$ и отображения $x: U \to V$ и $\lambda: U \to W$ из класса $C^1(U)$ такие, для которых, во-первых, справедливы соотношения

$$\begin{cases} x(U) = V, \\ x(0,\ldots,0) = (x_1^*,\ldots,x_n^*)^T, \\ \lambda(U) = W, \\ \lambda(0,\ldots,0) = (\lambda_1^*,\ldots,\lambda_m^*)^T, \end{cases}$$

а во-вторых, для любых $u \in U$ выполнены равенстве

$$F_i(u) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(x(u)) + \sum_{j=1}^{m} \lambda_j(u) \cdot \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i}(x(u)) = 0, \ i=1,\ldots,n, \tag{15}$$

$$G_j(u) = \varphi_j(x(u)) - u_j = 0, \ j=1,\ldots,m. \tag{16}$$

Теперь рассмотрим функцию $\hat{f}: U \to R$, определенную формулой

$$\hat{f}(u_1,\ldots,u_m) = f(x_1(u),\ldots,x_n(u)),$$

и вычислим ее частные производные

$$\frac{\partial \hat{f}}{\partial u_\ell}(u) = \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial f}{\partial x_i}(x(u)) \cdot \frac{\partial x_i}{\partial u_\ell}(u), \ \ell = 1,2,\ldots,m. \tag{17}$$

Продифференцировав по u_ℓ, $\ell=1,2,\ldots,m$, равенства (16), получим соотношения

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i}(x(u)) \cdot \frac{\partial x_i}{\partial u_\ell}(u) = \delta_{j\ell} = \begin{cases} 1, j=\ell, \\ 0, j\neq\ell, \end{cases}$$

которые можно переписать в матричной форме следующим образом:

$$\Phi'(x(u)) \cdot X'(u) = E, \tag{18}$$

где

$$\Phi'(x(u)) = \left(\frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i}(x(u))\right)_{j=1\ i=1}^{m\ \ n}$$

– $(m\times n)$–матрица,

$$X'(u)=\left(\frac{\partial x_i}{\partial u_\ell}(u)\right)_{i=1\ \ell=1}^{n\ \ m}$$

– $(n\times m)$–матрица, а E – единичная матрица размера $m\times m$. Тогда умножая i–е уравнение на $\frac{\partial x_i}{\partial u_\ell}(u)$ и суммируя их по $i=1,2,\dots,n$, получим с учетом (I8) цепочку равенств

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial x_i}(x(u))\cdot\frac{\partial x_i}{\partial u_\ell}(u)=-\sum_{j=1}^{m}\lambda_j(u)\cdot\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i}(x(u))\cdot\frac{\partial x_i}{\partial u_\ell}=-\lambda_\ell(u);$$

отсюда и из (I7) вытекает равенство

$$\frac{\partial \hat f}{\partial u_\ell}(u)=-\lambda_\ell(u),\ \ \ell=1,2,\dots,m. \qquad (I9)$$

В частности, $[\hat f'(0)]^T=-\lambda(0)=-\lambda^*$. Таким образом, из (I9) можем заключить, что функция $\hat f$ принадлежит классу $C^2(V)$. Дифференцируя по u равенства (I5) и (I9) и используя формулу (I8), нетрудно вывести тождество

$$\hat f''(u)=[X'(u)]^T\cdot\left[f''(x(u))+\sum_{j=1}^{m}\lambda_j(u)\times\varphi_j''(x(u))\right]\cdot X'(u),$$

$u\in V$. И так как матрицы $f''(x)$ и $\varphi_j''(x), j=1,2,\dots,m$, неотрицательно определены, а величины $\lambda_j(u), j=1,\dots,m$, неотрицательны в окрестности V, то функция $\hat f(u)$ выпукла в окрестности V. Этот факт позволяет для поиска значения $d_*=f_*=\hat f(0,\dots,0)$ применить метод нагруженного функционала к задаче (I3). Именно, если $d_k<d_*$, то мы найдем точку $u(d_k)$ как решение задачи

$$\tilde\varphi(u,d_k)=[\hat f(u_1,\dots,u_m)-d_k]^2+\sum_{j=1}^{m}u_j^2\longrightarrow\min_{u\in V}, \qquad (20)$$

а затем в силу того, что $\hat f(u(d_k))>d_k$ при $d_k<d_*$, пересчитаем d_{k+1} по формуле

$$d_{k+1}=d_k+\frac{\tilde\varphi(u(d_k),d_k)}{\hat f(u(d_k))-d_k}\geqslant d_k. \qquad (2I)$$

Очевидно, что метод (20)-(21) совпадает в окрестности $V \subset R^m$ точки $(0,\dots,0)^T$ с методом нагруженного функционала, примененным к решению задачи (18) в окрестности $V \subset R^n$ точки x^*. Следовательно, если докажем квадратичную сходимость приближения d_k к d_* для метода (20)-(21), то формула (6) будет установлена.

Так как функция $\hat{\varphi}(u,d) = [\hat{f}(u) - d]^2 + \sum\limits_{j=1}^{m} u_j^2$ сильно выпукла по переменным u_j, $j=1,2,\dots,m$, в окрестности V, то для любого d решение $u(d)$ задачи (20) однозначно определяется системой уравнений

$$[\hat{f}(u(d)) - d]\cdot[\hat{f}'(u(d))]^T + u(d) = 0. \tag{22}$$

Рассмотрим ее как систему m уравнений

$$Q(u,d) = [\hat{f}(u) - d]\cdot[\hat{f}'(u)]^T + u = 0 \tag{23}$$

с $m+1$ неизвестными и отметим, что якобиан $\det \frac{\partial Q}{\partial u}(z^*)$ в точке $z^* = (0,\dots,0,d_*)^T$ – решении задачи (23) при $d = d_*$ – отличен от нуля, так как

$$\frac{\partial Q}{\partial u}(z^*) = E + [\hat{f}'(0)]^T \cdot \hat{f}'(0) = E + \lambda_* \cdot \lambda_*^T.$$

По теореме о неявной функции найдется окрестность S точки d_* такая, что отображение $u(d)$ принадлежит классу $C^1(S)$. Кроме того, так как $u(d_*) = (0,\dots,0)^T$, можно выписать соотношение

$$u(d) = (d - d_*)\cdot \dot{u}(d_*) + \vec{o}(|d - d_*|),\ d \in S. \tag{24}$$

Далее, в силу того, что $\hat{f} \in C^2(U)$, верны равенства

$$\hat{f}'(u(d)) = -\lambda_*^T + [\hat{f}''(0)\cdot u(d)]^T + \vec{o}(\|u(d)\|),$$

$$\hat{f}(u(d)) = d_* - \lambda_*^T \cdot u(d) + \frac{1}{2}\cdot u(d)^T \hat{f}''(0)\cdot u(d) + o(\|u(d)\|^2). \tag{25}$$

Подставляя их в (22), раскрывая скобки и используя выражение (24) для $u(d)$, получим уравнение

$$(E + \lambda_* \cdot \lambda_*^T)\cdot u(d) = (d_* - d)\cdot \lambda_* +$$

$$+ \frac{1}{2}\cdot (d_* - d)^2 \cdot \{(\dot{u}(d_*)^T \hat{f}''(0)\cdot \dot{u}(d_*))\cdot \lambda_* +$$

$$+2\cdot\hat{f}''(0)\cdot\dot{u}(d_*)+2\cdot(\lambda_*^T\cdot\dot{u}(d_*))\cdot[\hat{f}''(0)\cdot\dot{u}(d_*)]\,]\}+\vec{o}(|d_*-d|^2).$$

Обозначим через A обратную к матрице $E+\lambda_*\cdot\lambda_*^T$:

$$A=(E+\lambda_*\cdot\lambda_*^T)^{-1}=E-\frac{\lambda_*\cdot\lambda_*^T}{1+\|\lambda_*\|^2}.$$

Учитывая равенство

$$A\cdot\lambda_*=\frac{1}{1+\|\lambda_*\|^2}\cdot\lambda_*,$$

разрешим последнее уравнение относительно $u(d)$:

$$u(d)=\frac{d_*-d}{1+\|\lambda_*\|^2}\cdot\lambda_*+(d_*-d)^2\times\Big[\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1+\|\lambda_*\|^2}\times$$

$$\times(\dot{u}(d_*)^T\hat{f}''(0)\dot{u}(d_*))\cdot\lambda_*+A\cdot\hat{f}''(0)\cdot\dot{u}(d_*)+$$

$$+(\lambda_*^T\cdot\dot{u}(d_*))\cdot A\cdot\hat{f}''(0)\cdot\dot{u}(d_*)\Big]+\vec{o}(|d_*-d|^2). \qquad (26)$$

Сравнивая выражения (24) и (26), заключаем, что имеет место равенство

$$\dot{u}(d_*)=-\frac{1}{1+\|\lambda_*\|^2}\cdot\lambda_*,$$

и перепишем (26) в виде

$$u(d)=\frac{d_*-d}{1+\|\lambda_*\|^2}\cdot\lambda_*+(d_*-d)^2\cdot\Big[\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{(1+\|\lambda_*\|^2)^3}\times$$

$$\times(\lambda_*^T\cdot\hat{f}''(0)\cdot\lambda_*)\cdot\lambda_*-\frac{1}{(1+\|\lambda_*\|^2)^2}\cdot A\cdot\hat{f}''(0)\cdot\lambda_*\Big]+\vec{o}(|d_*-d|^2).$$

Отсюда и из (25) вытекают равенства

$$\hat{f}(u(d))-d=\frac{d_*-d}{1+\|\lambda_*\|^2}+\frac{3}{2}\cdot\frac{(d_*-d)^2}{(1+\|\lambda_*\|^2)^3}\times(\lambda_*^T\cdot\hat{f}''(0)\cdot\lambda_*)+$$

$$+\,o(|d_*-d|^2) \qquad (27)$$

и

$$\|u(d)\|^2=\frac{(d_*-d)^2\cdot\|\lambda_*\|^2}{(1+\|\lambda_*\|^2)^2}+$$

$$+\frac{(d_*-d)^3\cdot(\lambda_*^T\cdot\hat{f}''(0)\cdot\lambda_*)}{(1+\|\lambda_*\|^2)^4}\cdot(\|\lambda_*\|^2-2)+o(|d_*-d|^3),$$

из которых следует соотношение

$$\tilde{\varphi}(u(d),d)=\left[\hat{f}(u(d))-d\right]^2+\|u(d)\|^2=$$

$$=\frac{(d_*-d)^2}{1+\|\lambda_*\|^2}+\frac{(d_*-d)^3}{(1+\|\lambda_*\|^2)^3}\cdot(\lambda_*^T\cdot\hat{f}''(0)\cdot\lambda_*)+o(|d_*-d|^3).$$

Используя его наряду с (21) и (27), получим цепочку равенств

$$d_*-d_{k+1}=d_*-d_k-\frac{\tilde{\varphi}(u(d_k),d_k)}{\hat{f}(u(d_k))-d_k}=$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{(d_*-d_k)^2}{(1+\|\lambda_*\|^2)^2}\cdot(\lambda_*^T\cdot\hat{f}''(0)\lambda_*)+o(|d_*-d_k|^2).$$

Отсюда вытекает справедливость оценки (6), причем в качестве константы $\mathcal{D}_1$ в этой оценке можно взять величину

$$\mathcal{D}_1=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{(1+\|\lambda_*\|^2)^2}\cdot(\lambda_*^T\cdot\hat{f}''(0)\cdot\lambda_*)+\varepsilon_1,$$

где ε_1 – некоторое (малое) положительное число.

Теперь получим оценку (7). Как уже отмечалось, имеет место соотношение

$$u(d)=(d_*-d)\cdot\frac{\lambda_*}{1+\|\lambda_*\|^2}+\vec{o}(|d_*-d|),$$

а отображение $x:U\longrightarrow V$ принадлежит классу $C^1(U)$, и $x(0)=x_*$. Отсюда следует представление

$$x(u)=x_*+X'(0)\cdot u+\vec{o}(\|u\|).$$

Значит, можно выписать цепочку равенств

$$x_{k+1}=x(u(d_k))=x_*+X'(0)\cdot u(d_k)+\vec{o}(\|u(d_k)\|)=$$

$$=x_*+(d_*-d)\cdot\frac{X'(0)\cdot\lambda_*}{1+\|\lambda_*\|^2}+o(|d_*-d_k|).$$

Убедимся, что вектор $g=X'(0)\cdot\lambda_*$ отличен от нуля. В этом случае из последнего соотношения и уже полученной оценки (6) будет следовать справедливость оценки (7), в которой в качестве $\mathcal{D}_2$ можно взять величину

$$\mathcal{D}_2 = \mathcal{D}_1 \frac{\frac{\|g\|}{1+\|\lambda_*\|^2} + \varepsilon_2}{\left[\frac{\|g\|}{1+\|\lambda_*\|^2} - \varepsilon_3\right]^2},$$

где ε_2, ε_3 – некоторые малые положительные числа.

Предположим противное, т.е. пусть $X'(0)\cdot\lambda_* = (0,\dots,0)^T \in R^n$. Продифференцируем левую и правую части системы (I4) по u и запишем получившуюся систему в матричной форме:

$$\frac{\partial H}{\partial(x,\lambda)}(w^*)\cdot\left[\begin{array}{c} X'(0) \\ \hline \Lambda'(0)\end{array}\right] = \left[\begin{array}{c} 0 \\ \hline E\end{array}\right], \qquad (28)$$

где $\Lambda'(u) = \left(\frac{\partial\lambda_i}{\partial u_j}(u)\right)_{i=1}^{m}{}_{j=1}^{m}$ есть $(m\times m)$-матрица.

Умножая обе части (28) справа на λ_*, получим соотношение

$$\frac{\partial H}{\partial(x,\lambda)}(w^*)\cdot\left[\begin{array}{c} X'(0)\cdot\lambda_* \\ \hline \Lambda'(0)\cdot\lambda_*\end{array}\right] = \left[\begin{array}{c} 0 \\ \hline \lambda_*\end{array}\right].$$

Учитывая вид матрицы $\frac{\partial H}{\partial(x,\lambda)}(w^*)$, из последнего соотношения получим два равенства:

$$\begin{cases} \frac{\partial\varphi}{\partial x}(x^*)\cdot\Lambda'(0)\cdot\lambda_* = 0, \\ 0 = \lambda_*, \end{cases}$$

второе из которых противоречит предположению а) о двойственной невырожденности решения x_*. Таким образом, вектор $X'(0)\cdot\lambda_*$ не равен нулевому, что и требовалось показать. Теорема доказана.

3. Управление точностью шага

Распространим формулу (4) пересчета оценок d_k на случай, когда точка x_k в методе нагруженного функционала выбирается не как точное решение задачи (3), а, например, по правилу (9). Ограничимся рассмотрением сильно выпуклой задачи (I), т.е. предположим, что целевая функция $f: R^n \longrightarrow R$ сильно выпуклая с параметром $\beta_0 > 0$. Это означает, что для любых x, y из

R^n выполнено неравенство

$$f(y) \geq f(x) + f'(x)(y-x) + \beta_0 \cdot \|y-x\|^2. \tag{29}$$

Так как функции $\varphi_i : R^n \to R, i = 1,\dots,m$, выпуклые, то для них также можно указать константы $\beta_i \geq 0$ такие, что для любых x, y из R^n имеют место аналогичные неравенства:

$$\begin{cases} \varphi_i(y) \geq \varphi_i(x) + \varphi_i'(x)\cdot(y-x) + \beta_i \|y-x\|^2, \\ i = 1,2,\dots,m. \end{cases} \tag{30}$$

Далее, воспользовавшись видом функции $\psi(x,d) = [f(x)-d]_+^2 + \sum_{i=1}^{m} [\varphi_i(x)]_+^2$, неравенством Коши - Буняковского и соотношениями (29)-(30), выпишем цепочку неравенств для произвольных x и y из R^n:

$$\begin{aligned} &\|\psi_x'(x,d)\|\cdot\|x-y\| \geq \psi_x'(x,d)\cdot(x-y) = \\ &= 2\cdot\Big\{[f(x)-d]_+\cdot f'(x)\cdot(x-y) + \sum_{i=1}^{m} [\varphi_i(x)]_+ \times \\ &\times \varphi_i'(x)\cdot(x-y)\Big\} \geq 2\cdot\Big\{[f(x)-d]_+\cdot[f(x)-f(y)+ \\ &+\beta_0\cdot\|y-x\|^2] + \sum_{i=1}^{m}[\varphi_i(x)]_+[\varphi_i(x)-\varphi_i(y)+\beta_i\cdot\|y-x\|^2]\Big\} \geq \\ &\geq 2\cdot\Big\{\psi(x,d) + \|y-x\|^2\cdot\Big(\beta_0\cdot[f(x)-d]_+ + \\ &+\sum_{i=1}^{m}\beta_i\cdot[\varphi_i(x)]_+^2\Big) - [f(x)-d]_+\cdot[f(y)-d] - \\ &-\sum_{i=1}^{m}[\varphi_i(x)]_+\cdot[\varphi_i(y)]_+\Big\}. \end{aligned}$$

Если положить $y = x_*$ - решение задачи (I), то из приведенной цепочки вытекает неравенство

$$\begin{aligned} &\|\psi_x'(x,d)\|\cdot\|x-x_*\| \geq 2\cdot\Big\{\psi(x,d) + \\ &+\Big(\beta_0\cdot[f(x)-d]_+ + \sum_{i=1}^{m}\beta_i\cdot[\varphi_i(x)]_+\Big)\cdot\|x-x_*\|^2 - \\ &-[f(x)-d]_+\cdot[f(x_*)-d]\Big\}. \end{aligned} \tag{31}$$

Введя обозначение

$$a(x) = \beta_0\cdot[f(x)-d]_+ + \sum_{i=1}^{m}\beta_i\cdot[\varphi_i(x)]_+,$$

перепишем (31) в виде

$$0 \geq a(x)\cdot\|x-x_*\|^2 - \frac{1}{2}\|\psi_x'(x,d)\|\cdot\|x-x_*\| +$$

$$+\left(\Psi(x,d)-[f(x)-d]_+\cdot[f(x_*-d]\right).$$

Предположим, что $a(x)>0$. Тогда детерминат последнего квадратичного неравенства (относительно $\|x-x_*\|$) неотрицателен, т.е.

$$\left(\tfrac{1}{2}\cdot\|\Psi_x'(x,d)\|\right)^2-4\cdot a(x)\cdot(\Psi(x,d)-$$
$$-[f(x)-d]_+\cdot[f(x_*)-d])\geq 0.$$

Разрешая это неравенство относительно $f(x_*)$, получаем оценку

$$f(x_*)\geq d+\frac{\Psi(x,d)}{[f(x)-d]_+}-\frac{1}{16}\cdot\frac{\|\Psi_x'(x,d)\|^2}{a(x)\cdot[f(x)-d]_+},$$

которая позволяет предложить формулу пересчета оценок d_k в случае приближенного выполнения внутреннего шага. Именно, если $f(x_k)>d_k$, но x_k не является допустимой точкой, положим

$$d_{k+1}=d_k+\frac{\Psi(x_k,d_k)}{f(x_k)-d_k}-\frac{1}{16}\cdot\frac{\|\Psi_x'(x_k,d_k)\|^2}{a(x_k)\cdot(f(x_k)-d_k)}. \qquad (32)$$

Отметим, что эта формула в случае, когда x_k – точное решение задачи (3), совпадает с формулой (4) в силу того, что $\Psi_x'(x_k,d_k)=0$.

В предыдущем пункте мы показали локальную квадратичную сходимость рассматриваемого метода. Для того чтобы применить к нему методику управления точностью шага, разработанную в статье [2], необходимо установить, что (точный) метод сходится и глобально со скоростью не ниже, чем линейной. Используя формулу пересчета (9), можем записать равенство

$$d_*-d_{k+1}=d_*-f(x_k)-\frac{\sum_{i=1}^{m}[\varphi_i(x_k)]_+^2}{f(x_k)-d_k}. \qquad (33)$$

Мы предполагаем, что $f(x_k)>d_k$, и нам известно, что $f(x_k)<d_*$ (в противном случае недопустимая точка x_k не может быть точным решением задачи (3)). Таким образом, справедливо соотношение

$$f(x_k)=d_k+\sigma\cdot(d_*-d_k),\ 0<\sigma<1.$$

Из него вытекают формулы

$$d_*-f(x_k)=(1-\sigma)\cdot(d_*-d_k) \quad \text{и} \quad f(x_k)-d_k=\sigma\cdot(d_*-d_k).$$

Введя обозначения $c=d_*-d_k$, $b=\sum_{i=1}^{m}[\varphi_i(x_k)]_+^2>0$, отметим, что $b^2<c$: в противном случае, опять же, x_k не

может быть решением задачи (3). Теперь правую часть формулы (33) запишем в виде скалярной функции

$$\chi(\sigma) = (1-\sigma)c - \frac{\delta}{c\cdot\sigma}, \quad \sigma \in (0,1).$$

Легко видеть, что справедливы сооношения

$$\chi(\sigma) \longrightarrow -\infty \quad \text{при} \quad \sigma \longrightarrow 0+0,$$
$$\chi(\sigma) \longrightarrow -\frac{\delta}{c} < 0 \quad \text{при} \quad \sigma \longrightarrow 1-0.$$

Кроме того, из равенства

$$\chi'(\sigma) = \frac{1}{c\cdot\sigma^2}\cdot(\delta - c^2\cdot\sigma^2)$$

следует, что точка $\sigma_* = \sqrt{\delta}/c$ является точкой максимума функции $\chi(\sigma)$ на интервале (0,I). При этом верна цепочка соотношений

$$0 < \chi_* = \chi(\sigma_*) = \left(1 - \frac{\sqrt{\delta}}{c}\right)\cdot(d_* - d_\kappa) - \sqrt{\delta} <$$
$$< \left(1 - \frac{\sqrt{\delta}}{c}\right)\cdot(d_* - d_\kappa).$$

Нам известно, что последовательность $\{d_\kappa\}$ монотонно сходится к d_*. Значит, если мы положим

$$\bar{c} = d_* - d_0,$$
$$\bar{\delta} = \min_{d \le d_* - \frac{1}{\mathcal{D}_1}} \delta(x(d)) = \min_{d \le d_* - \frac{1}{\mathcal{D}_1}} \sum_{i=1}^{m} [\varphi_i(x(d))]_+^2,$$

то в случае, когда $d \le d_* - \frac{1}{\mathcal{D}_1}$, нам гарантирована, как это видно из (33), линейная скорость сходимости $\{d_\kappa\}$ к d_* :

$$d_* - d_{\kappa+1} \le \left(1 - \frac{\sqrt{\bar{\delta}}}{\bar{c}}\right)\cdot(d_* - d_\kappa), \quad \kappa = 0,1,\ldots \tag{34}$$

Здесь $\mathcal{D}_1 > 0$ - константа из оценки (6), полученная в теореме 3.

ЗАМЕЧАНИЕ I. Если бы оказалось, что $\bar{\delta} = 0$, это означало бы, что точка x_* является точкой абсолютного минимума функции f, и решение получалось бы за один шаг.

Приведем теперь схему приближенного счета методом нагруженного функционала с управлением точностью шага. Пусть $d_1 < d_*$ - начальная оценка, x_0 - начальное приближение. Проводим внутренний шаг, заключающийся в безусловной минимизации функции $\psi(x, d_1)$ каким-либо методом (например, скорейшего спуска или сопряженных градиентов). Как только в процессе минимизации будет получена точка $\widetilde{x}_0$, для которой выполнено неравенство $f(\tilde{x}_0)-d_1>0$, вычислим величину $\tilde{\gamma}_0=\dfrac{\psi(\tilde{x}_0,d_1)}{f(\tilde{x}_0)-d_1}$ и сравним ее с заранее заданной точностью $\varepsilon>0$. Если $\tilde{\gamma}_0\le\le\varepsilon$, то процесс окончен, $\tilde{x}_0$ – приближенное решение задачи (I). В противном случае возможны два исхода. Если $\tilde{\gamma}_0\geq\rho/\mathcal{D}_1$, находим, как рекомендовано в [2], $\xi_0>0$ – корень уравнения

$$\xi\ln\xi=B\cdot\xi+(1+\xi)\cdot\ln(1+\xi)+\ln\rho. \qquad (35)$$

Здесь в качестве параметра $0<\rho<1$ можно взять величину

$$\rho=1-\frac{\sqrt{\sum_{i=1}^{m}[\varphi_i(\tilde{x}_0)]_+^2}}{[\psi(\tilde{x}_0,d_1)]/[f(\tilde{x}_0)-d_1]}=1-\frac{\sqrt{\sum_{i=1}^{m}[\varphi_i(\tilde{x}_0)]_+^2}}{\tilde{\gamma}_0} \qquad (36)$$

как коэффициент линейной сходимости из формулы (35), а $B=\ln(1+\rho)$. Затем полагаем $\bar{\gamma}_0=\xi_0\cdot\rho\cdot\tilde{\gamma}_0$. Если же $\tilde{\gamma}_0<\rho/\mathcal{D}_1$, находим корень $\xi_0>0$ уравнения

$$\ln(\mathcal{D}_1\cdot\tilde{\gamma}_0)+\xi\ln\rho(\xi)+\frac{B}{2\cdot\ln 2}\cdot\xi=0. \qquad (37)$$

Здесь $\rho(\xi)$ – функция, определенная в [2] формулой

$$\rho(\xi)=\prod_{i=0}^{\infty}\left[1+2^i\cdot\xi\right]^{\frac{1}{2^{i+1}\xi}}.$$

Затем полагаем $\bar{\gamma}_0=\xi_0\cdot\mathcal{D}_1\cdot\tilde{\gamma}_0^{\,2}$.

В обоих случаях продолжим процесс минимизации $\psi(x,d_1)$ до тех пор, пока не получим точку x_1, для которой выполнены условия

$$f(x_1)>d_1,$$

$$\frac{1}{16}\cdot\frac{\|\psi'_x(x_1,d_1)\|^2}{a(x_1)\cdot(f(x_1)-d_1)}\le\gamma_0=\min\left\{\bar{\gamma}_0,\ \frac{1}{2}\cdot\gamma_1\right\},$$

где $\gamma_1=\psi(x_1,d_1)/[f(x_1)-d_1]$. (В этом случае, как нетрудно получить из формулы пересчета (32), выполнены неравенства

$$d_{k+1}-d_k\geq\frac{1}{2}\cdot\gamma_k>0,\quad k=0,1,\ldots,$$

которые, в силу неубывания и ограниченности сверху последовательности $\{d_k\}$, гарантируют сходимость к нулю последовательности $\{\gamma_k\}$.) После этого, если $\gamma_1>\varepsilon$, пересчитываем оценку d_2 по формуле (32) при $k=1$ и повторяем процедуру, описанную выше, начиная с d_2 и x_1.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Если начальное приближение d_1 оказалось грубым, имеет смысл время от времени пересчитывать величину $\tilde{\rho}$ по формуле (36), подставляя вместо $\tilde{x}_0$ очередную точку $\tilde{x}_k$. Кроме того, при этом пересчете можно учитывать фактически получившиеся отношения $\rho_k = \tilde{\gamma}_{k+1}/\tilde{\gamma}_k$, что позволит сгладить границу перехода от линейного управления к квадратичному.

Литература

1. Калашникова Н.И. Управление точностью выполнения шага в методе нагруженного функционала // Оптимизация. - 1982. - Вып. 30(47). - С.115-127.
2. Калашников В.В., Калашникова Н.И. Оптимальное управление внутренней точностью в двухуровневом итерационном процессе// Оптимизация. - 1988. - Вып.44(61). С.27-55.
3. Лебедев В.Ю. О сходимости метода нагруженного функционала в задачах выпуклого программирования// Журн. вычисл. математики и мат. физики. - 1977. - Т.17, № 3. - С.765-768.
4. Лебедев В.Ю. Схема поиска приближенных решений задачи выпуклого программирования // Журн. вычисл. математики и мат. физики. - 1977. - Т.17, № 1. - С.249-254.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Здесь приведены результаты тестовых расчетов методом нагруженного функционала с управлением точностью шага, описанным в п.3 данной статьи. В качестве тестовой задачи выпуклого программирования использована задача минимизации функции $f: R^4 \to R$, задаваемой формулой

$$f(x) = 3\cdot(x_1-5)^2 + 6\cdot(x_2-5)^2 + 2\cdot(x_3-4)^2 + 8\cdot(x_4-7)^2$$

при ограничениях

$$\varphi_1(x) = x_1^2 + (x_1-x_4)^2 + 3x_3^2 + 10x_3^2 - 19 \le 0,$$

$$\varphi_2(x) = 2\cdot(x_1-x_2)^2 + 13\cdot x_3^2 - 26 \le 0,$$

$$\varphi_3(x) = (x_1+x_3)^2 + 18{,}1x_1 + 12x_2 + 5x_4^2 - 143 \le 0,$$

$$\varphi_4(x) = 3(x_1 - x_2 + 2x_4)^2 - 0{,}5\cdot x_3^2 - 50 \le 0,$$

$$\varphi_5(x) = 6x_1^2 + 9x_2^2 + 12x_3^2 - 12(x_1+x_2)x_3 + 21x_4^2 - 125 \le 0.$$

Здесь $x_* = (1{,}6797;\ 1{,}9249;\ 0{,}6944;\ 2{,}1709)^T$, $x_0 = (5,\ 5,\ 5,\ 5)^T$, $f(x_*) = 298{,}222 = d_*$. В качестве начального d_1 бралась величина $d_1 = 0$. Расчеты производились в соответствии со схемой, изложенной в п.3 этой статьи, т.е. на k-м шаге осуществлялся процесс поиска глобального минимума (на R^4) функции

$$\psi(x, d_k) = [f(x) - d_k]_+^2 + \sum_{i=1}^{5} [\varphi_i(x)]_+^2$$

методом скорейшего спуска. При заданном d_k критерием окончания внутреннего шага было выполнение неравенства

$$\frac{1}{16}\,\frac{\|\psi_x'(x_k, d_k)\|^2}{a(x_k)\cdot(f(x_k) - d_k)} \le \gamma_{k-1}$$

при условии, что $f(x_k) > d_k$, а функция $a: R^4 \to R$ определена формулой

$$a(x) = 8\cdot[f(x) - d_k]_+ + (6 - 2\sqrt{5})\cdot[\varphi_1(x)]_+ + [\varphi_5(x)]_+ ;$$

наконец, величина γ_{k-1} определялась по методике, описанной в п.3, с использованием параметра $\xi_{k-1} > 0$ – решения уравнения (35) или (37). Критерием полного окончания расчета служило выполнение неравенства

$$\eta_k = \frac{\psi(x_k, d_k)}{f(x_k) - d_k} < \varepsilon ,$$

где $\varepsilon > 0$ – заранее заданное число. Следует отметить, что с целью ускорения работы описанного алгоритма на практике проводилось перевычисление параметров $\mathcal{D}_1 > 0$ и $0 < \rho < 1$, входящих соответственно в уравнения (37) и (35), которые решались методом деления пополам. Это перевычисление осуществлялось после выполнения $(k+1)$-го шага следующим образом. Если

$$\tilde{\eta}_k = \frac{\psi(\tilde{x}_k, d_{k+1})}{f(\tilde{x}_k) - d_{k+1}}, \quad \eta_{k+1} = \frac{\psi(x_{k+1}, d_{k+1})}{f(x_{k+1}) - d_{k+1}},$$

а $\gamma_k = \xi_k \cdot \mathcal{D}_1 \cdot \tilde{\eta}_k^2$, где $\xi_k > 0$ – решение уравнения (37), то сначала вычислялась величина

$$COR_1 = \frac{\eta_{k+1}}{(1+\xi_k)\cdot\tilde{\eta}_k^2},$$

а затем с помощью выбранного заранеее параметра $\alpha \in (0, 1]$ подсчитывалась заново величина $\mathcal{D}_1$ по формуле $\mathcal{D}_1 := \alpha\mathcal{D}_1 + (1-\alpha)\cdot COR_1$. Если же на данном шаге параметр γ_k вычислен по формуле $\gamma_k = \xi_k \cdot \rho \cdot \tilde{\eta}_k$, где $\xi_k > 0$ - корень уравнения (35), то сначала вычислялась величина

$$COR_2 = \frac{\eta_{k+1}}{(1+\xi_k)\cdot\tilde{\eta}_k},$$

а затем перевычислялся параметр ρ по формуле $\rho := \alpha \cdot \rho + (1-\alpha)\cdot COR_2$.

Расчеты проводились на ЕС-1060 с длиной машинного слова 8 байт. Программа написана на языке Фортран ЕС ЭВМ. В приводимой ниже таблице результаты метода I получены при ξ_k постоянной, равной I, т.е.

$$\gamma_k = \mathcal{D}_1 \cdot \tilde{\eta}_k^2 = \mathcal{D}_1 \left[\frac{\psi(\tilde{x}_k, d_{k+1})}{f(\tilde{x}_k) - d_{k+1}}\right],$$

что соответствует подходу без управления точностью. В таблице метода 2 содержатся результаты расчетов с управлением, описанным выше. Используются следующие обозначения:

$\eta_k = \dfrac{\psi(x_k, d_k)}{f(x_k) - d_k}$ - критерий близости x_k к x_* ;

ε - параметр окончания счета;

d_k - полученное приближение для $f(x_*)$;

N - суммарное количество вычислений функции ψ и ее градиента ψ'_x ;

$TRUD = \dfrac{N}{\lg \eta_0 - \lg \eta_k}$ - оценка трудоемкости процесса, выраженная в количестве вычислений, требуемых в среднем для понижения ошибки на один десятичный порядок.

Как видно из таблицы, применение управления точностью на данном тестовом примере обеспечивает существенную экономию вычислений.

Метод 1				
0,1	$0{,}726 \cdot 10^{-1}$	298,204	360829	$0{,}675607 \cdot 10^{5}$
$0{,}1 \cdot 10^{-1}$	$0{,}352 \cdot 10^{-2}$	298,222	11522348	$0{,}132411 \cdot 10^{7}$
$0{,}1 \cdot 10^{-2}$	не хватило 240 минут			
Метод 2				
0,1	$0{,}871 \cdot 10^{-1}$	298,191	173917	$0{,}330543 \cdot 10^{5}$
$0{,}1 \cdot 10^{-1}$	$0{,}881 \cdot 10^{-2}$	298,219	1643392	$0{,}245146 \cdot 10^{6}$
$0{,}1 \cdot 10^{-2}$	$0{,}952 \cdot 10^{-3}$	298,222	17312293	$0{,}239684 \cdot 10^{7}$

Поступила в ред.-изд. отдел
22.12.1988 г.