Выпуск 44(58) ОПТИМИЗАЦИЯ 1988 г.

Теория игр

УДК 519.8

ОПОРНАЯ ФУНКЦИЯ ЯДРА ВЫПУКЛОЙ ИГРЫ НА МЕТРИЧЕСКОМ КОМПАКТЕ

В.А.Васильев, М.Г.Зуев

В работе [1] установлено интегральное представление опорной функции ядра выпуклой кооперативной игры n лиц. Исследование несимметричных аналогов вектора Шепли для континуальных моделей экономического обмена потребовало обобщения результатов [1] для бесконечного числа участников. Соответствующие утверждения для вполне положительных функций множества анонсированы в [2]. Настоящая заметка посвящена распространению основной теоремы представления из [2] на регулярные выпуклые игры на метрическом компакте.

1. Приведем необходимые сведения из [3] и сформулируем полученный результат. Пусть Q – произвольный метрический компакт с метрикой ρ. Борелевскую алгебру Q будем обозначать через Σ, а совокупность всех конечных Σ-измеримых разбиений $e \in \Sigma$ – через $\Xi(e)$. Пусть W – совокупность всех функций $v : \Sigma \to R$, удовлетворяющих условию $v(\emptyset) = 0$. Положим $\Xi = \bigcup_{e \in \Sigma} \Xi(e)$ и для каждой функции $v \in W$ и $\varrho \in \Xi$ определим рекуррентным образом полиномиальные разности $v(\varrho)$:

$$v(\{e\}) = v(e),\quad v(\{e_1, e_2\}) = v(e_1 \cup e_2) - v(e_1) - v(e_2),$$
$$v(\{e_1, \dots, e_m, e_{m+1}\}) = v(\{e_1, \dots, e_{m-1}, e_m \cup e_{m+1}\}) -$$
$$- v(\{e_1, \dots, e_{m-1}, e_m\}) - v(\{e_1, \dots, e_{m-1}, e_{m+1}\}).$$

Нетрудно проверить, что для всех $e \in \Sigma$ и $\varrho = \{e_1, \dots, e_m\} \in \Xi(e)$ справедливо тождество

$$v(e) = \sum_{\omega \subseteq N\varrho} v(\varrho^{\omega}),$$

где $N^{\ell}=\{1,\dots,m\}$, $\eta^{\omega}=\{e_i\}_{i\in\omega}$.

Будем говорить, что функция $v\in W$ имеет ограниченную полиномиальную вариацию, если

$$\|v\|_0=\sup\{\sum_{\omega\in N^{\ell}}|v(\eta^{\omega})|\,|\,\eta\in\Xi(Q)\}<\infty.$$

Совокупность всех функций ограниченной полиномиальной вариации обозначим через V. Множество V, наделенное операциями поточечного сложения, умножения на скаляры и полуупорядоченностью $\leq_0$, порожденной конусом вполне положительных функций

$$V_+=\{v\in V|v(\eta)\geq 0, \eta\in\Xi\}: u\leq_0 v \Leftrightarrow v-u\in V_+,$$

является линейным полуупорядоченным пространством [3]. В частности, для каждого элемента $v\in V$ определены положительная, отрицательная и полная вариация $v^+=v\vee\mathbb{O}$, $v^-=-v\vee\mathbb{O}$, $|v|=-v\vee v$. Напомним [3], что функция $v\in V$ называется регулярной, если для любого $\eta=\{e_1,\dots,e_m\}\in\Xi$ выполняется равенство

$$|v|(e_1,\dots,e_m)=\sup\{|v|(\tau_1,\dots,\tau_m)|\tau_i\subseteq e_i, i\in N^{\ell}\},^{*)}$$

где τ_i – замкнутые подмножества Q. Совокупность всех регулярных функций из V обозначим через rV. Выделим интересующий нас класс регулярных функций ограниченной полиномиальной вариации.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Функция $v\in W$ называется регулярной выпуклой функцией множества, если $v\in rV$ и при этом

$$v(e_1\cup e_2)+v(e_1\cap e_2)\geq v(e_1)+v(e_2) \qquad (1)$$

для всех $e_1, e_2\in\Sigma$.

Как обычно [2,4], ядром кооперативной игры $\Gamma=(Q,\Sigma,v)$, определяемой функцией $v\in rV$, будем называть множество

$$C(v)=\{\mu\in rV^1|\mu(Q)=v(Q), \mu(e)\geq v(e), e\in\Sigma\}, \qquad (2)$$

где rV^1 – совокупность всех аддитивных функций множества из rV. В дальнейшем будем отождествлять игры $\Gamma=(Q,\Sigma,v)$ и определяющие их функции v.

Известно [5,6], что ядра регулярных выпуклых игр v непусты. Целью работы является интегральное представление их опорных функций

---

*) В дальнейшем используется сокращение $v(\{e_1,\dots,e_m\})\triangleq v(e_1,\dots,e_m)$.

$$h_v(f) = \sup\{\int_Q f d\mu \mid \mu \in C(v)\},\ f \in S(Q), \tag{3}$$

где $S(Q)$ – совокупность вещественных ограниченных Σ-измеримых функций на Q.

Для формулировки полученного результата напомним некоторые конструкции из [3]. Обозначим через $\hat{Q}$ совокупность всех замкнутых подмножеств Q. Далее, через $\sigma\hat{\Sigma}$ обозначим σ-алгебру в $\hat{Q}$, порожденную всеми множествами вида $\hat{e} = \{\tau \in \hat{Q} \mid \tau \subseteq e\}$ ($e \in \Sigma$). Как установлено в [3], для любой функции $v \in \tau V$ существует счетно-аддитивная мера $\mu_v : \sigma\hat{\Sigma} \to R$, однозначно определяемая из условий $\mu_v(\hat{e}) = v(e)$, $e \in \Sigma$. Наконец, для любой $f \in S(Q)$ и соответствующей ей функции

$$\hat{f}(\tau) = \sup\{f(t) \mid t \in \tau\},\ \tau \in Q, \tag{4}$$

интеграл $\int_{\hat{Q}} \hat{f}\, d\mu_v$ определен и конечен (функция $\hat{f}$, как нетрудно проверить, $\sigma\hat{\Sigma}$-измерима и ограничена на $\hat{Q}$).

В приведенных обозначениях доказываемая в работе теорема представления имеет следующий вид.

ТЕОРЕМА. *Для любой регулярной выпуклой игры v справедлива формула*

$$h_v(f) = \int_{\hat{Q}} \hat{f} d\mu_v,\ f \in S(Q). \tag{5}$$

Завершая этот пункт, отметим, что, согласно [3], алгебра $\sigma\hat{\Sigma}$ содержит борелевскую алгебру $B_{\hat{Q}}$ пространства $(\hat{Q}, R)$ *). Поэтому, если f – непрерывная функция на Q, то формула (5) принимает вид

$$\sup\{\int_Q f d\mu \mid \mu \in C(v)\} = \int_{\hat{Q}} \hat{f} d\mu^0_v, \tag{5'}$$

где μ^0_v – сужение μ_v на $B_{\hat{Q}}$. Действительно, в этом случае, ввиду равномерной непрерывности f, функция $\hat{f}$ непрерывна в метрике Хаусдорфа и, следовательно, $B_{\hat{Q}}$-измерима.

Что касается общей ситуации $f \in S(Q)$, то функция $\hat{f}$, вообще говоря, не является $B_{\hat{Q}}$-измеримой ввиду несовпадения алгебр $\sigma\hat{\Sigma}$ и $B_{\hat{Q}}$ (см., например, [7] для случая $Q = [0,1]$). Таким образом, для разрывных измеримых функций уточнение (5') справедливо лишь при некоторых дополнительных предположениях.

---

*) $R(\tau,\tau') = \max\{\sup_{t\in\tau}\inf_{t'\in\tau'} \rho(t,t'),\ \sup_{t'\in\tau'}\inf_{t\in\tau} \rho(t',t)\}$ – метрика Хаусдорфа на $\hat{Q}$.

2. Переходя к доказательству представления (5), приведем удобную для нас формулировку теоремы о продолжении для элементов ядра регулярной выпуклой игры. Предварительно напомним один результат Киндлера ([8], пример I4), обобщающий известную теорему Келли.

ТЕОРЕМА КИНДЛЕРА. Пусть $\mathcal{L} \subseteq 2^{\Omega}$ - некоторое кольцо подмножеств произвольного множества Ω, $\mathcal{A} \subseteq 2^{\Omega}$ - подалгебра $\mathcal{L}$, $\beta: \mathcal{L} \to \mathbb{R}$ - выпуклая (т.е. удовлетворяющая неравенствам (I) на $\mathcal{L}$), а $\gamma: \mathcal{A} \to \mathbb{R}$ - аддитивная функция такая, что $\gamma(e) \geq \beta(e)$ для всех $e \in \mathcal{A}$. Тогда существует аддитивная функция $\tilde{\gamma}: \mathcal{L} \to \mathbb{R}$ такая, что $\tilde{\gamma}(e) \geq \beta(e)$ для всех $e \in \mathcal{L}$ и сужение $\tilde{\gamma}$ на $\mathcal{A}$ совпадает с γ.

Поскольку любая функция $v \in \tau V$ непрерывна относительно теоретико-множественной сходимости [3], нетрудно проверить (см., например, [5], гл.Ш, теорема 4.4), что конечно-аддитивная функция $\mu \in V$, удовлетворяющая условиям $\mu(Q) = v(Q)$, $\mu(e) \geq v(e)$ ($e \in \Sigma$), автоматически является счетно-аддитивной (и, значит, регулярной). Учитывая сказанное, прямым применением теоремы Киндлера получаем нужный нам вспомогательный результат.

ТЕОРЕМА О ПРОДОЛЖЕНИИ. Пусть v - регулярная выпуклая игра, $\rho = \{e_1, \ldots, e_n\} \in \Xi(Q)$ - произвольное конечное разбиение Q, а вектор $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ удовлетворяет условиям

а) $\sum\limits_{i \in N^\rho} x_i = v(Q)$,

б) $\sum\limits_{i \in \omega} x_i \geq v(\bigcup\limits_{i \in \omega} e_i)$, $\omega \subseteq N^\rho$.

Тогда существует мера $\mu \in C(v)$ такая, что $\mu(e_i) = x_i$ для всех $i \in N^\rho$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО формулы (5) проведем в два этапа. Сначала, опираясь на соответствующую теорему для конечных выпуклых игр [I], получим представление (5) для простых измеримых функций. Затем, используя предельный переход, установим формулу (5) для произвольной функции из $S(Q)$.

ЭТАП I. Пусть v - регулярная выпуклая игра, а $f(x) = \sum_{i=1}^{n} q_i \chi_{e_i}$ - произвольная простая измеримая функция (здесь $q_i \in R$, χ_{e_i} - характеристическая функция множества $e_i \in \Sigma$, $e_i \cap e_j = \emptyset$ для всех $i \neq j$ и $\bigcup_{i=1}^{n} e_i = Q$).
Рассмотрим множество

$$C_0(v) = \{(\mu(e_1), \ldots, \mu(e_n)) | \mu \in C(v)\}.$$

Непосредственно из определения опорной функции h_v и из вида функции f вытекает соотношение

$$h_v(f) = \sup\{q \cdot x | x \in C_0(v)\}, \tag{6}$$

где $q = (q_1, \ldots, q_n)$, а $q \cdot x$ - скалярное произведение векторов q и x.

Положим $\eta = \{e_1, \ldots, e_n\}$. В силу теоремы о продолжении множество $C_0(v)$ совпадает с ядром конечной выпуклой игры v^η, определяемой по формуле $v^\eta(\omega) = v(\bigcup_{i \in \omega} e_i)$, $\omega \subseteq N^\eta = \{1, \ldots, n\}$.
Далее, на основании теоремы I из [I], справедливо равенство

$$\sup\{q \cdot x | x \in C(v^\eta)\} = \sum_{\omega \subseteq N^\eta} v^\eta_\omega \cdot \max\{q_i \,|\, i \in \omega\},$$

где $v^\eta_\omega = v(\eta^\omega)$, $\omega \subseteq N^\eta$. Отсюда, учитывая, что $\hat{f}$ - простая функция в $S(\hat{Q})$, в силу определения интеграла $\int_{\hat{Q}} \hat{f}\, d\mu_v$ получаем требуемое: $h_v(f) = \int_{\hat{Q}} \hat{f}\, d\mu_v$.

ЭТАП 2. Пусть f - произвольная ограниченная измеримая функция на Q. Зафиксируем некоторую последовательность простых измеримых функций f_n, равномерно сходящихся к f. Ясно, что последовательность $\hat{f}_n$ равномерно сходится к $\hat{f}$, поскольку

$$\sup_{\tau \in \hat{Q}} |\hat{f}_n(\tau) - \hat{f}(\tau)| \leq \sup_{\tau \in \hat{Q}} \sup_{x \in \tau} |f_n(x) - f(x)| \leq$$

$$\leq \sup_{x \in Q} |f_n(x) - f(x)|.$$

Далее, нетрудно убедиться, что множество $C(v)$ ограничено по норме полной вариации. Действительно, $C(v) = C(u) + v_{(1)}$, где $u = v - v_{(1)}$, а $v_{(1)}$ - проекция v на подпространство rV^1 аддитивных функций из rV *).

*) Такая проекция существует, поскольку rV является K-пространством, а rV^1 - его компонентой (см.[3]).

Но в силу соотношения

$$v_{(1)}(e) = \lim_{\eta=\{e_1,\dots,e_m\}\in \Xi(e)} \sum_{i\in N\eta} v(e_i),\ e\in\Sigma,$$

установленного в [3], и ввиду неравенств $v(\bigcup_{i\in N\eta} e_i) \geq \geq \sum_{i\in N\eta} v(e_i)$ $(\eta=\{e_i\}\in\Xi)$, вытекающих из выпуклости v, имеем $\mu(e)\geq 0$ для всех $e\in\Sigma$. Таким образом, $\|\mu\|_0 \leq \leq \|v_{(1)}\|_0 + \mu(Q)$ для всех $\mu\in C(v)$.

Учитывая ограниченность $C(v)$, имеем

$$|h_v(f_n)-h_v(f)| \leq \sup_{\mu\in C(v)} \left|\int_Q (f_n-f)\,d\mu\right| \leq$$

$$\leq \sup_{x\in Q}|f_n(x)-f(x)|\cdot \sup_{\mu\in C(v)}\|\mu\|_0 \leq c\cdot \sup_{x\in Q}|f_n(x)-f(x)|.$$

Следовательно, $h_v(f_n)\longrightarrow h_v(f)$, откуда на основании формулы, установленной для простых измеримых функций, имеем $h_v(f) = = \lim \int_{\hat Q} \hat f_n\, d\mu_v$. С другой стороны, ввиду равномерной сходимости $\hat f_n \longrightarrow \hat f$, получаем

$$\lim \int_{\hat Q} \hat f_n\, d\mu_v = \int_{\hat Q} \hat f\, d\mu_v,$$

что и завершает проверку формулы (5) для произвольной функции $f\in S(Q)$.

Литература

1. Васильев В.А. Опорная функция ядра выпуклой кооперативной игры// Оптимизация. - 1978. - Вып.21(38). - С.30-35.
2. Васильев В.А. Строение ядер вполне положительных регулярных игр// У Всесоюз. конф. по проблемам теоретической кибернетики/ Тез. докл. - Новосибирск, 1980. - С.43-45.
3. Васильев В.А. Об одном пространстве неаддитивных функций множества// Оптимизация. - 1975. - Вып.16(33). - С.99-120.
4. Ауман Р., Шепли Л. Значения для неатомических игр.- М.,1977.
5. Розенмюллер И. Кооперативные игры и рынки. - М.:Мир, 1974.
6. Schmidler D. Cores of exact games. I // J. Math. Anal. Appl. - 1972. - V.40. - P.214-225.
7. Куратовский К. Топология. Т.2. - М.: Мир, 1966.
8. Kindler J. A Mazur - Orlich type theorem for submodular functions // J. Math. Anal. Appl. - 1986. - V.120.- P.533-546.

Поступила в ред.-изд. отдел
04.10.1988 г.