Выпуск 44(61) ОПТИМИЗАЦИЯ 1988 г.

Выпуклый анализ и смежные вопросы

УДК 519.853.62

ОБ ОДНОМ КЛАССЕ ОТОБРАЖЕНИЙ, ДОПУСКАЮЩИХ АППРОКСИМАЦИЮ ПЕРВОГО ПОРЯДКА

А.М.Керимов

Как известно, решение многих параметрических задач нелинейного программирования тесно сопряжено с изучением дифференцируемости маргинальной функции $\varphi(x)=max\{f(x,y): y\in a(x)\}$. В работе [1] с этой целью был предложен подход, связанный с исследованием некоторого свойства самого отображения a, которое называется аппроксимацией первого порядка. Там же показано, что для отображений, задаваемых системой выпуклых неравенств, это свойство выполняется. В настоящей заметке аппроксимация первого порядка изучается для отображений, заданных системой равенств и неравенств. Описывается класс отображени такого типа, обладающий указанным свойством. Приводится пример, показывающий, что наличие нелинейных равенств приводит к его нарушению. Показано, что модифицированная аппроксимация первого порядка, предложенная в [2], как правило, не имеет места.

1. Пусть X - некоторое открытое множество в евклидовом пространстве E^n. Рассмотрим многозначное отображение $a: X\to 2^{E^m}$. Возьмем $x\in X, u\in E^n$ и $y\in a(x)$. Пусть

$$\gamma(x,y,u)=\{v\in E^m: \exists\alpha_0>0: y+\alpha v\in a(x+\alpha u)\ \forall\alpha\in[0,\alpha_0)\};$$

$\tilde{K}(x,y;u)$ - множество векторов $v\in E^m$, обладающих свойством: найдется такая функция $o(\alpha)$, определенная при достаточно малых $\alpha>0$, что $\alpha^{-1}o(\alpha)\to 0$ при $\alpha\to+0$ и $y+\alpha v+o(\alpha)\in a(x+\alpha u)$; $K(x,y;u)$ - множество векторов $v\in E^m$, обладающих следующим свойством: найдутся функции $o_1(\alpha)$ и $o_2(\alpha)$, определенные при достаточно малых $\alpha>0$, такие, что $\alpha^{-1}O_i(\alpha)\to \mathbb{O},\ i=1,2$, при $\alpha\to+0$ и

$$y+\alpha v+O_2(\alpha)\in a(x+\alpha u+O_1(\alpha));$$

$\Gamma(x,y;u)$ – множество векторов $v\in E^m$, для которых найдутся последовательности $\{\alpha_k\}\subset E^1,\ \{u_k\}\subset E^n,\ \{v_k\}\subset E^m$, такие, что $y+\alpha_k v_k\in a(x+\alpha_k u_k)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ I. Говорят, что отображение a допускает аппроксимацию первого порядка в точке x по направлению $u\in E^n, \|u\|=1$, относительно соответствия $y\to A(x,y;u)$, если для любых последовательностей $\alpha_k\to+0$ и $y_k\in a(x+\alpha_k u)$ таких, что $y_k\to y\in a(x)$, существуют элементы $v_k\in A(x,y;u)$, при которых $y_k=y+\alpha_k v_k+O(\alpha_k)$, где $\alpha_k^{-1}O(\alpha_k)\to\mathbb{O}$ при $k\to\infty$.

В качестве $A(x,y;u)$ будем брать одно из отображений $cl\gamma(x,\cdot;u)$, $cl\widetilde{K}(x,\cdot;u)$, $clK(x,\cdot;u)$ и $\Gamma(x,\cdot;u)$ (символ cl означает замыкание). В [I] рассматривалась аппроксимация первого порядка относительно $cl\gamma(x,\cdot;u)$ и показано, что отображение вида

$$\Omega(x)=\{y: g_i(x,y)\le 0,\ i=\overline{1,p}\}$$

при некоторых предположениях на функции $g_i(x,y),\ i=\overline{1,p}$, допускает аппроксимацию первого порядка относительно отображения $cl\gamma(x,\cdot;u)$ по любому ненулевому направлению $u\in E^n$. Наша цель – изучить аппроксимацию первого порядка для отображения вида

$$a(x)=\{y\in E^m: g_i(x,y)\le 0, i=\overline{1,p};\ h_j(x,y)=0, j=\overline{1,q}\},\qquad (I)$$

где $\{g_i\}$, $\{h_j\}$ – непрерывно-дифференцируемые функции. Пусть $x_0\in dom\, a$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Будем говорить, что в точке $y_0\in a(x_0)$ выполнены $\angle I$ – условия регулярности, если градиенты

$$\nabla_y g_i(x_0 y_0), i\in I(x_0,y_0)=\{i: g_i(x_0 y_0)=0\};\ \nabla_y h_j(x_0,y_0),\ j=\overline{1,q},$$

линейно-независимы.

Обозначим $z=[x,y],\ z_0=[x_0,y_0]$. При фиксированном $u\in E^n$ рассмотрим множество

$$T(z_0,u)=\left\{v\in E^m \,\middle|\, \begin{array}{l}(\nabla_x g_i(z_0),u)+(\nabla_y g_i(z_0),v)\le 0,\ i\in I(z_0)\\ (\nabla_x h_j(z_0),u)+(\nabla_y h_j(z_0),v)=0,\ j=\overline{1,q}\end{array}\right\}.\qquad (2)$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ I. П у с т ь в т о ч к е $y_0\in a(x_0)$ в ы п о л н е н ы $\angle I$ - у с л о в и я р е г у л я р н о с -

ти. Тогда

$$\operatorname{cl}\widetilde{K}(z_0,u)=\operatorname{cl}K(z_0,u)=\Gamma(z_0,u)=T(z_0,u).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Равенство $\operatorname{cl} K(z_0,u)=T(z_0,u)$ доказано в [3]. Доказательство равенства $\Gamma(z_0,u)=T(z_0,u)$ можно найти, например, в [4]. Из соотношения

$$T(z_0,u)=\operatorname{cl}\widetilde{K}(z_0,u)\subset \operatorname{cl}K(z_0,u)\subset\Gamma(z_0,u)=T(z_0,u)$$

сразу следует утверждение предложения.

Рассмотрим отображения

$$b_j(x)=\{y\in E^m: h_j(x,y)=0\},\ j=\overline{1,q}, \tag{3}$$

где $h_j(x,y)$ – непрерывно-дифференцируемые функции. Пусть $x_0\in \operatorname{dom} b_j,\ y\in b_j(x_0),\ j=\overline{1,q}$. Возьмем $u\in E^n$, $\|u\|=1$ и пусть $\nabla_y h_j(x_0,y)\neq 0$ при всех $y\in b_j(x_0),\ j=\overline{1,q}$. Обозначим через $K_j(y)$ соответствие $y\to K_j(x_0,y;u)$, вычисленное для отображения b_j. Ясно, что

$$K_j(y)=\{v\in E^m: (\nabla_x h_j(x_0,y),u)+(\nabla_y h_j(x_0,y),v)=0\},\ j=\overline{1,q}.$$

Множество $K_j(y)$ представляет собой гиперплоскость в E^m.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. Пусть градиенты $\nabla_y h_j(x_0,y)$, $j=\overline{1,q}$, линейно-независимы при всех $y\in b_j(x_0)$. Тогда если отображения $b_j,\ j=\overline{1,q}$, допускают аппроксимацию первого порядка в точке x_0 по направлению u относительно соответствия $K_j(y)$, то отображение $b(x)=\bigcap_{j=1,q} b_j(x)$ допускает аппроксимацию первого порядка в точке x по направлению u относительно соответствия $K(y)=\bigcap_{j=1,q} K_j(y)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\alpha_k\to+0,\ y_k\in b(x_0+\alpha_0 u)$, причем $y_k\to y$. Понятно, что $y\in b(x_0)$. Из определения b следует, что $y_k\in b_j(x_0+\alpha_k u)$ при всех j $(k=1,2,\ldots)$. Так как, по предположению, отображение b_j допускает аппроксимацию первого порядка, то (см. [4])

$$\rho(\alpha_k^{-1}(y_k-y),K_j(y))\xrightarrow[k\to\infty]{}0. \tag{4}$$

Множество $K(y)$ представляет собой пересечение гиперплоскостей $K_j(y)$, причем нормальные векторы $\nabla_y h_j(x_0,y)$ этих гиперплоскостей линейно-независимы. Отсюда, привлекая (4), получим, что $\rho(\alpha_k^{-1}(y_k-y), K(y)) \underset{k\to\infty}{\to} 0$. Это утверждение можно доказать по индукции. Предложение доказано.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. Пусть задано отображение вида

$$a(x)=\left\{y\in E^m \,\middle|\, \begin{array}{l} c_i(x)+(b_i,y)\le 0,\ i=\overline{1,p} \\ \ell_j(x)+(d_j,y)=0,\ j=\overline{j,q} \end{array}\right\}, \tag{5}$$

где функции $c_i(x)$ и $\ell_j(x), i=\overline{1,p}; j=\overline{1,q}$, непрерывно дифференцируемы в точке $x_0\in \operatorname{dom} a$. Пусть $y\in a(x_0)$ и векторы $b_i, i\in I(x_0,y); d_j, j=\overline{1,q}$, линейно-независимы при всех $y\in a(x_0)$. Тогда отображение (5) допускает аппроксимацию первого порядка в точке x_0 по любому направлению $u\in E^n$, $\|u\|=1$, относительно любого из соответствий

$$\Gamma(x_0,\cdot\,;u),\ cl K(x_0,\cdot\,;u)\quad cl\tilde K(x_0,\cdot\,;u).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Возьмем $u\in E^n$, $\|u\|=1$. Из предложения I следует, что достаточно рассмотреть соответствие $y\to T(x_0,y;u)$, которое определяется равенством

$$T(x_0,y;u)=\left\{v\in E^m \,\middle|\, \begin{array}{l} (\nabla c_i(x_0),u)+(b_i,v)\le 0,\ i\in I(x_0,y) \\ (\nabla \ell_j(x_0),u)+(d_j,v)=0,\ j=\overline{1,q} \end{array}\right\}.$$

Таким образом, в данном случае это соответствие постоянно.

Пусть $y_k\in a(x_0+\alpha_k u)$ и $y_k\to y$ при $k\to\infty$. Положим $y_k=y+\alpha_k v_k'$, где $\alpha_k v_k'\to 0$ при $k\to\infty$. Пусть $i\in I(x_0,y)$. Тогда

$$0\ge c_i(x_0+\alpha_k u)+(b_i,y+\alpha_k v_k')=c_i(x_0)+\alpha_k(\nabla c_i(x_0),u)+$$
$$+o_i(\alpha_k)+(b_i,y)+\alpha_k(b_i,v_k')=\alpha_k\{(\nabla c_i(x_0),u)+(b_i,v_k')\}+o_i(\alpha_k).$$

Кроме того,

$$0=\ell_j(x_0+\alpha_k u)+(d_j,y+\alpha_k v_k')=\ell_j(x_0)+\alpha_k(\nabla \ell_j(x_0),u)+\bar o_j(\alpha_k)+$$
$$+(d_j,y)+\alpha_k(d_j,v_k')=\alpha_k\{(\nabla \ell_j(x_0),u)+(d_j,v_k')\}+\bar o_j(\alpha_k),\ j=\overline{1,q}.$$

Следовательно,

$$\left.\begin{aligned} (\nabla c_i(x_0),u)+(b_i,v_k')+\varepsilon_i(\alpha_k)\le 0,\ i\in I(x_0,y) \\ (\nabla \ell_j(x_0),u)+(d_j,v_k')+\bar\varepsilon_j(\alpha_k)=0,\ j=\overline{1,q} \end{aligned}\right\}, \qquad (6)$$

где $\varepsilon_i(\alpha_k)=\alpha_k^{-1}O_i(\alpha_k)$ и $\bar\varepsilon_j(\alpha_k)=\alpha_k^{-1}\bar O_j(\alpha_k)$. Обозначим

$$H=[b_i,i\in I(x_0,y);d_j,j=\overline{1,q}]^T$$

и

$$\delta(\alpha_k)=[-\varepsilon_i(\alpha_k),\ i\in I(x_0,y);\ -\bar\varepsilon_j(\alpha_k),\ j=\overline{1,q}]^T.$$

Рассмотрим системы уравнений относительно ω :

$$H_\omega=\delta(\alpha_k),\quad k=1,2,\dots \qquad (7)$$

Так как в точке $y\in a(x_0)$ выполнены условия регулярности, то определена псевдообратная матрица $(HH^T)^{-1}H^T$ к матрице H. Поэтому $\omega_k=(HH^T)^{-1}H^T\delta(\alpha_k)$ – решение системы (7). Ясно, что $\omega_k\to\mathbb{O}$ при $k\to\infty$. Положим $v_k'=v_k+\omega_k$. Тогда из (7), (6) следует, что $v_k\in T(x_0,y;u)$. Следовательно, $y_k=y+\alpha_k v_k+\psi(\alpha_k)$, где $\psi(\alpha_k)=\alpha_k\omega_k$ и $\alpha_k^{-1}\psi(\alpha_k)\to\mathbb{O}$ при $k\to\infty$. Предложение доказано.

Следующий пример позволяет высказать предположение, что если функции, с помощью которых задано отображение (3), нелинейны по y, то это отображение допускает аппроксимацию первого порядка по любому направлению лишь в исключительных случаях.

ПРИМЕР. Рассмотрим отображение

$$\varphi(x)=\{y\in E^m:(Ax,x)+(By,y)=c\},$$

где A и B – симметричные матрицы размерности соответственно $n\times m$ и $m\times m$, причем $B\ne\mathbb{O}$, а c – некоторое число. Пусть $y\in\varphi(x_0)$. Покажем, что существуют такие $u\in E^n$, $\|u\|=1$, при которых отображение φ не допускает аппроксимацию в точке x_0 относительно, например, соответствия $y\longrightarrow\Gamma(x_0,y;u)$. Пусть u фиксировано, $y_k\in\varphi(x_0+\alpha_k u)$, $y_k\to y$ и $\alpha_k\to+0$ при $k\to\infty$. Положим $y_k=y+\alpha_k v_k$, где $\alpha_k v_k\xrightarrow[k\to\infty]{}\mathbb{O}$. Тогда получим

$$2(Ax_0,u)+2(By,v_k)+\alpha_k(Au,u)+\alpha_k(Bv_k,v_k)=0. \qquad (8)$$

Множество $\Gamma(x_0,y,u)$ имеет вид

$$\Gamma(x_0,y;u)=\{v\in E^m:(Ax_0,u)+(By,v)=0\}.$$

Известно, что расстояние от точки $z\in E^m$ до гиперплоскости $H=\{p\in E^m:(a,p)=\beta\}$ определяется равенством

$$\rho(z,H)=\|a\|^{-1}|(a,z)-\beta|.$$

Поэтому $\rho(\alpha_k^{-1}(y_k-y),\ \Gamma(x_0,y;u))=\rho(v_k,\Gamma(x_0,y;u))=$ $=\|By\|^{-1}|(Ax_0,u)+(By,v_k)|$. Таким образом, отображение φ допускает аппроксимацию в точке x_0 по направлению $u\in E^n$, $\|u\|=1$, относительно $\Gamma(x_0,y;u)$ тогда и только тогда, когда для всех последовательностей $\{\alpha_k\}$, $\{v_k\}$, для которых выполнение (8) и $\alpha_k v_k\to \mathbb{O}$, $\alpha_k\to+0$ при $k\to\infty$, справедливо соотношение

$$(Ax_0,u)+(By,v_k)\xrightarrow[k\to\infty]{}0\,.$$

Сопоставляя это с (8), получим, что для всех указанных α_k и v_k должно выполняться соотношение

$$\alpha_k(Bv_k,v_k)\xrightarrow[k\to\infty]{}0\,. \tag{9}$$

Покажем, что найдется такое полупространство, что для каждого u из этого полупространства ($\|u\|=1$) при некоторых v_k соотношение (9) не выполняется. Пусть e - некоторый вектор, ортогональный вектору By и обладающий тем свойством, что $(Be,e)\neq 0$. Такой вектор найдется, так как $B\neq\mathbb{O}$. Для определенности будем считать, что $(Be,e)>0$. Пусть, далее, вектор u таков, что $(u,Ax_0)<0$. Выберем произвольную последовательность $\alpha_k\to+0$ и положим $v_k=\alpha_k^{-\frac{1}{2}}\bar{\gamma}_k e$, где коэффициент $\bar{\gamma}_k$ определяется равенством

$$\bar{\gamma}_k=(-(Be,e)^{-1}(Au,2x_0+\alpha_k u))^{\frac{1}{2}}.$$

Так как $(Be,e)>0$ и $(u,Ax_0)=(Au,x_0)<0$, то при достаточно малых α_k величина, стоящая под корнем, неотрицательна, поэтому определение $\bar{\gamma}_k$ корректно. Нетрудно проверить, учитывая равенство $(By,e)=0$, что при таком выборе $\bar{\gamma}_k$ вектор v_k удовлетворяет уравнению (8). Имеем

$$\alpha_k(Bv_k,v_k)=\bar{\gamma}_k^2(Be,e)=-(Au,2x_0+\alpha_k u)\xrightarrow[k\to\infty]{}-2(u,Ax_0)>0.$$

Таким образом, для последовательности $\{v_k\}$ соотношение (9) не выполняется и, следовательно, отображение φ не допускает аппроксимацию первого порядка в точке x_0 по указанным направлениям u .

2. В работе [2] приводится другое определение аппроксимации первого порядка, отличающееся от определения I тем дополнительным условием, что участвующая в нем последовательность предполагается ограниченной. Пусть a – произвольное многозначное отображение и $y \in a(x_0)$. Справедливо следующее

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4. *Если множество $\widetilde{K}(x_0, y; u)$ не ограничено при некоторых $y \in a(x_0)$, $u \in E^m$, $\|u\| = 1$, то отображение a не допускает аппроксимацию первого порядка в указанном выше смысле в точке x_0 по направлению u относительно соответствия $y \to \widetilde{K}(x_0, y; u)$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из условий предложения следует, что существует последовательность $\{\widetilde{v}_k\} \subset \widetilde{K}(x_0, y; u)$ такая, что $\|\widetilde{v}_k\| \to \infty$, $k \to \infty$. Так как $\widetilde{v}_k \in \widetilde{K}(x_0, y; u)$, то существует такая функция $\psi_k(\alpha)$, что $y + \alpha\widetilde{v}_k + \psi_k(\alpha) \in a(x_0 + \alpha u)$, где $\alpha^{-1}\psi_k(\alpha) \to 0$ при $\alpha \to +0$. Возьмем такое $\alpha_k > 0$, чтобы выполнялись неравенства $\alpha_k < k^{-1}\|\widetilde{v}_k\|^{-1}$ и $\alpha_k^{-1}\|\psi_k(\alpha_k)\| < k^{-1}$. Положим

$$\widetilde{y}_k = y + \alpha_k \widetilde{v}_k + \psi_k(\alpha_k). \tag{10}$$

Тогда $\widetilde{y}_k \to y$ и $\widetilde{y}_k \in a(x_0 + \alpha_k u)$. Допустим, что существует некоторая последовательность $v_k' \in \widetilde{K}(x_0, y; u)$, при которой выполняется соотношение

$$\widetilde{y}_k = y + \alpha_k v_k' + \psi'(\alpha_k), \tag{11}$$

где $\alpha_k^{-1}\psi'(\alpha_k) \to 0$ при $k \to \infty$. Из (11) и (10) следует, что

$$\widetilde{v}_k - v_k' + \alpha_k^{-1}\psi_k(\alpha_k) - \alpha_k^{-1}\psi'(\alpha_k) = 0.$$

Переходя к пределу при $k \to \infty$, получим, что $\|v_k'\| \to \infty$ при $k \to \infty$. Предложение доказано.

Пусть задано отображение (I).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Говорят, что в точке $y_0 \in a(x_0)$ выполнены условия регулярности Мангасаряна – Фромовица (MF-условия), если градиенты $\nabla_y h_j(x_0, y_0)$, $j = \overline{1,q}$, линейно-независимы и существует вектор $\bar{v} \in E^m$ такой, что

$$(\nabla_y g_i(x_0, y_0), \bar{v}) < 0, \; i \in I(x_0, y_0);$$

$$(\nabla_y h_j(x_0,y_0),\bar{\sigma})=0,\ j=\overline{1,q}.$$

Используя теорему 4.I9 из [4], можно показать, что если в точке $y\in a(x_0)$ выполнены MF-условия регулярности, то

$$\Gamma(x_0,y;u)=T(x_0,y_0;u), \qquad (12)$$

где множество $T(x_0,y_0;u)$ определяется равенством (2).

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5. Пусть отображение $\Gamma(u)=\Gamma(x_0,y_0;u)$ имеет выпуклый график. Если в точке $y_0\in a(x_0)$ выполнены MF-условия регулярности, то множество $\Gamma(x_0,y_0;u)$ не ограничено при любом $u\in E^n$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Допустим противное. Пусть $\Gamma(u)$ ограничено при некотором u. Тогда $\Gamma(0)=\{0\}$ (см. [6]). В силу (I2) получим, что система

$$\left.\begin{aligned}&(\nabla_y h_j(x_0,y_0),\sigma)=0,\ j=\overline{1,q},\\ &(\nabla_y g_i(x_0,y_0),\sigma)\le 0,\ i\in I(x_0,y_0),\end{aligned}\right\}$$

не имеет ненулевого решения относительно σ. Это, однако, противоречит выполнению MF-условий регулярности. Следовательно, $F(x_0,y_0,u)$ не ограничено при любом $u\in E^n$.

ЗАМЕЧАНИЕ. Нетрудно проверить, что множество $\Gamma(x_0,y_0;u)=$ $=K(x_0,y_0;u)$, соответствующее отображению

$$b(x)=\{y\in E^m: h_j(x,y)=0,\ j=\overline{1,q}\},$$

где $h_j(x,y)$ - непрерывно-дифференцируемые функции, $j=\overline{1,q}$, $y_0\in b(x_0)$ и векторы $\nabla_y h_j(x_0,y_0)\neq 0, j=\overline{1,q}$, линейно-независимы, является неограниченным, если $q<m$.

Автор выражает благодарность А.М.Рубинову, под руководством и при помощи которого выполнена данная работа.

Литература

I. Демьянов В.Ф. Минимакс: дифференцируемость по направлениям. - Л.: Изд-во ЛГУ, I974.

2. Demyanov V.F., Zabrodin I.S. Directional differentiability of continous maximum function for quasidifferentiable functions// Math. Progr. Study. - 1986. - V.29.- P.I08-II7.

3. Минченко Л.И. Дифференциальные свойства функции максимума при связанных ограничениях // Журн. вычисл. математики и мат. физики. - 1984. - Т.24, № 2.- С.210-217.
4. Введение в нелинейное программирование/ Под ред. К.-Х.Эльстера. - М.: Наука, 1985.
5. Рубинов А.М. Аппроксимация многозначных отображений и дифференцируемость маргинальных функций // Докл. АН СССР. - 1987. - Т.292, №2. - С.269-271.
6. Пшеничный Б.Н. Выпуклый анализ и экстремальные задачи. - М., 1980 .

Поступила в ред.-изд отдел
23.05.1988 г.