Выпуск 44(6I) ОПТИМИЗАЦИЯ 1988 г.
Численные методы

УДК 5I9.8

ОПТИМИЗАЦИЯ ЛИНЕЙНОГО СТОХАСТИЧЕСКОГО РАСКРОЯ ПО КРИТЕРИЮ СТОИМОСТИ

Э.А.Мухачева, И.А.Соломещ, Н.И.Соломещ

Различные задачи рационального раскроя на линейные и прямоугольные заготовки рассмотрены в [I]. В качестве основного критерия оптимальности там принимаются величины, характеризующие суммарные затраты материала. В рассматриваемой в [2] задаче стохастического раскроя минимизируется математическре ожидание (м.о.) суммарной длины расходуемых полос. В практике раскроя встречаются ситуации, когда интерес представляют не только готовые заготовки, но и оставшиеся после их получения деловые остатки. При этом каждый кусок материала и делового остатка имеет определенную стоимость. Тогда в качестве критерия оптимальности принимается стоимость затрачиваемого на комплект материала, представляющая собой суммарную стоимость затребованных полос за вычетом стоимости деловых остатков.

В работе рассматривается следующая ситуация.

ЗАДАЧА Р. В условиях единичного производства комплект заготовок[*)] заданных длин $d_i,\ i=\overline{1,n}$, необходимо получить из полос случайной длины d, $d_{min} \le d \le \underline{d_{max}}$, $\max d_i < d_{min}$. Известны дискретный закон $\langle p_j, d_j \rangle,\ j=\overline{1,N}$, распределения длины полос, стоимость $z(d)$ полосы длины d и стоимость $c(\ell)$ сдаваемого в отход остатка длины ℓ.

Процесс раскроя рабочей полосы состоит из идентичных шагов, на каждом из которых выполняются следующие действия:

---

*) В комплекте могут быть заготовки одинаковых длин.

- выбирается альтернатива: продолжить раскрой полосы или сдать ее в отход и заказать новую полосу;

- определяется номер очередной отрезаемой заготовки из текущего набора;

- отрезается заготовка.

Первые два действия определяют стратегию резки. Необходимо определить оптимальную стратегию, при которой м.о. затрачиваемых на комплект средств будет минимальным.

В работе рассмотрены альтернативные технологические условия: полосу длиной $\ell > d_{кр}$ ($d_{кр} \leq d_{min}$) сдавать в отход не разрешается; полосу длиной $\ell \leq d_{max}$ можно сдать в отход.

Пусть заготовки естественно перенумерованы, т.е. длина i-й заготовки равна d_i. Обозначим через $K_{нач} = \{1, \ldots, n\}$ множество номеров требуемых заготовок, $K_0 = \emptyset$, $K \subset K_{нач}$. При решении поставленной задачи применяется метод, использующий прием динамического программирования, сходный с описанным в [2]. Для реализации его строится таблица, строки которой соответствуют всевозможным длинам ℓ р.п., а столбцы - всевозможным комбинациям K номеров заготовок. В клетке ($\ell; K$) указывается м.о. затрат на комплект K при длине ℓ рабочей полосы и содержится либо номер отрезаемой в ситуации (ℓ, K) заготовки, либо указание о сдаче р.п. в отход. Для заполнения таблицы используются соответствующие рекуррентные соотношения.

Для технологических условий $t = 1, 2$ при длине ℓ рабочей полосы и наборе K введем следующие обозначения: $M_t(\ell, K)$ - м.о. затрат на нарезку набора K при использовании оптимальной стратегии для рабочей полосы ℓ ; $M_t^{[1]}(\ell, K)$ - то же при условии, что от р.п. отрезается хотя бы одна заготовка; $M_t^{[2]}(\ell, K)$ - при условии, что р.п. сдается в отход.

Пусть $t = 1$. Тогда справедливы следующие рекуррентные соотношения.

Если $\ell < \min\limits_{i_j \in K} d_{i_j}$, то

$$M_1(\ell, K) = \sum_{j=1}^{N} [p_j \cdot M_1(d_j; K) + z(d_j)] - c(\ell),$$

причем в клетке (ℓ,κ) дается указание о сдаче р.п. в отход.

Если $\min\limits_{i_j\in\kappa} d_{i_j} \le \ell \le d_{\kappa p}$, то

$$M_1(\ell,\kappa) = \min(M_1^{[1]}(\ell;\kappa);\ M_1^{[2]}(\ell;\kappa)),$$

где

$$M_1^{[1]}(\ell,\kappa) = \min_{\{i_j\in\kappa:\, d_{i_j}\le\ell\}} M_1(\ell-d_{i_j};\kappa\setminus\{i_j\}),$$

$$M_1^{[2]}(\ell,\kappa) = \sum_{j=1}^{N}[\rho_j\cdot(M_1(d_j;\kappa)+z(d_j)]-c(\ell),$$

причем в клетку (ℓ,κ) заносится номер очередной отрезаемой заготовки (если $M_1(\ell,\kappa)=M_1^{[1]}(\ell,\kappa)$) либо указание о сдаче р.п. в отход (если $M_1(\ell;\kappa)=M_1^{[2]}(\ell,\kappa)$).

Если $\ell \ge \max(d_{\kappa p}, \min\limits_{i_j\in\kappa} d_{i_j})$, то

$$M_1(\ell;\kappa) = \min_{\{i_j\in\kappa:\, d_{i_j}\le\ell\}} M_1(\ell-d_{i_j};\kappa\setminus\{i_j\}),$$

причем в клетке (ℓ,κ) указывается номер заготовки, с которой следует продолжить резку набора κ.

Реализация оптимальной стратегии раскроя аналогична описанной в [I].

Пусть $t=2$. Тогда величины $M_2(\ell;\kappa)$ вычисляются с помощью следующих рекуррентных соотношений.

Если $\ell < \min\limits_{i_j\in\kappa} d_{i_j}$, то

$$M_2(\ell;\kappa) = M_2(0;\kappa)-c(\ell), \tag{I}$$

в клетке $(\ell;\kappa)$ дается указание о сдаче р.п. в отход.

Если $\ell \ge \min\limits_{i_j\in\kappa} d_{i_j}$, то

$$M_2(\ell;\kappa) = \min(M_2^{[1]}(\ell;\kappa), M_2^{[2]}(\ell;\kappa)), \tag{2}$$

где

$$M_2^{[1]}(\ell;\kappa) = \min_{\{i_j\in\kappa:\, d_{i_j}\le\ell\}} M_2(\ell-d_{i_j};\kappa\setminus\{i_j\}), \tag{3}$$

$$M_2^{[2]}(\ell;\kappa) = M_2(0;\kappa)-c(\ell), \tag{4}$$

причем в клетку $(\ell;\kappa)$ кроме значения $M_1(\ell;\kappa)$ заносится либо номер очередной отрезаемой заготовки, либо указание о сдаче р.п. в отход.

При вычислениях следует считать, что $M_t(\ell;\kappa_0)=-c(\ell)$.

В рекуррентные формулы для вычисления $M_2(\ell;\kappa)$ входит значение $M_2(0;\kappa)$ – м.о. затрат на комплект κ при нулевой длине р.п., т.е. в ситуации, когда неизвестно, будет ли вновь поступившая полоса использоваться или она пойдет в деловые отходы. Эта величина не может быть вычислена с помощью приведенных соотношений (I)-(4). Для ее отыскания решается следующая задача, относящаяся к классу задач об оптимальной остановке [3].

ЗАДАЧА В. В процессе производства создается ситуация, когда с вероятностью p_i, $i=\overline{1,n}$, оказывается возможным завершить работу, израсходовав z_i, $i=\overline{1,n}$, средств. При появлении i-й возможности можно либо воспользоваться ею, либо отказаться и, затратив c_i средств, вернуться к исходной ситуации. Определить стратегию отказов, обеспечивающую минимум м.о. затрат на завершение работы.

Поскольку существуют стратегии с конечным м.о. затрат (например, "использовать первую выпавшую полосу") и при любой такой стратегии фактические затраты, а значит, и м.о. затрат не меньше $\min\limits_{i=\overline{1,n}} z_i$, то множество математических ожиданий, соответствующих всевозможным стратегиям, ограничено снизу. Конечный его инфимум обозначим через M.

Пусть S – множество всевозможных стратегий, обладающих конечным математическим ожиданием затрат. Следующие леммы и теорема доказывают существование оптимальной стратегии и позволяют ее сформировать.

ЛЕММА I. Значение M удовлетворяет уравнению

$$x=\sum_{i=1}^{n} p_i\cdot\min(z_i;x+c_i). \qquad (5)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. ◣ Пусть $M(s)$ – м.о. затрат при стратегии $s\in S$. Рассмотрим некоторую стратегию $s'\in S$. Пусть x_i, $i=\overline{1,n}$, – фактические затраты при действиях, предписанных стратегией s', при условии появления на первом шаге i-й возможности; p_i' – вероятность воспользоваться i-й возможностью согласно s'; $q_i'=1-p_i'$.

M_i' – м.о. фактических затрат при стратегии s' в результате шагов, последующих за появлением i-й возможности на первом шаге. Тогда

$$M(x_i)=p_i'\cdot z_i+q_i'(M_i'+c_i).$$

Оценим м.о. затрат при стратегии S' :

$$M'\overset{def}{=\!=}M(S')=\sum_{i=1}^{n}p_i\cdot M(x_i)=\sum_{i=1}^{n}p_i\cdot(p_i'\cdot z_i+$$

$$+q_i'\cdot(M_i'+c_i))\geqslant\sum_{i=1}^{n}p_i\cdot min(z_i\,;\,M_i'+c_i).$$

Поскольку $M=\inf\limits_S M(S)$, то существует стратегия $S''\in S$ такая, что $min(M',M_i')\geqslant M''\overset{def}{=\!=}M(S'')$. Продолжая неравенство, получим

$$M'\geqslant\sum_{i=1}^{n}p_i\cdot min(z_i\,;\,M''+c_i). \tag{6}$$

Правая часть (6) представляет собой м.о. фактических затрат при следующей стратегии.

Если первой появилась i-я возможность и $z_i\leqslant M''+c_i$, то этой возможностью следует воспользоваться для завершения работы. В противном случае следует вернуться в исходную ситуацию, затратив при этом c_i, и действовать согласно стратегии S''. Таким образом, справедливо соотношение

$$M\leqslant\sum_{i=1}^{n}p_i\cdot min(z_i\,;\,M''+c_i)\leqslant M(S'). \tag{7}$$

Рассмотрим последовательность стратегий $S_k\in S$ таких, что $M(S_k)\to M$. Полагая в (7) $S'=S_k$ и переходя к пределу с учетом того, что $M\leqslant M''\leqslant M(S_k)$, а функция в средней части двойного неравенства (7) непрерывна по M'', получим

$$M=\sum_{i=1}^{n}p_i\cdot min(z_i\,;\,M+c_i).\blacktriangleleft$$

ЛЕММА 2. Если $\sum\limits_{i=1}^{n}p_i\cdot c_i>0$, то M – единственное решение уравнения (5).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. ▶ Запишем (5) в виде

$$\varphi(x)\overset{def}{=\!=}x-\sum_{i=1}^{n}p_i\cdot min(z_i\,;\,x+c_i)=0.$$

Не ограничивая общности рассуждений, можно считать, что $p_i>0,\ i=\overline{1,n}$, и $z_i,\ i=\overline{1,n}$, пронумерованы в порядке возрастания величин $x_i \overset{def}{=} z_i - c_i$.

Тогда при $x \leq x_1$, $\varphi(x) = -\sum_{i=1}^{n} p_i c_i < 0$ и (5) может иметь корни лишь на промежутке $]x_1; +\infty[$. Поскольку

$$\varphi(x) = \begin{cases} x - \sum_{i=1}^{n} p_i z_i - \sum_{i=k+1}^{n} p_i (x + c_i) & \text{при } k = \overline{1, n-1}, x \in]x_k, x_{k+1}[, \\ x - \sum p_i \cdot z_i & \text{при } x \in]x_n, +\infty[, \end{cases}$$

то

$$\varphi'(x) = \begin{cases} 1 - \sum_{i=1}^{k} p_i & \text{при } x \in]x_k; x_{k+1}[, \ k = \overline{1, n-1}, \\ 1 & \text{при } x \in]x_n; +\infty[, \end{cases}$$

т.е. $\varphi'(x) > 0$ и, следовательно, $\varphi(x)$ строго возрастает на $]x_1; +\infty[$. Таким образом, кроме M, являющегося корнем (5) согласно лемме I, других корней это уравнение не имеет.

Для заданного числа A рассмотрим так называемую пороговую стратегию S_A. Отказ от возможности завершения работы продолжается до тех пор, пока при появлении очередной возможности не окажется, что $z_i \leq A + c_i$. Тогда появившаяся i-я возможность используется для завершения работы.

Ясно, что при пороге $A < \min\limits_{i=\overline{1,n}} (z_i - c_i)$ стратегию S_A нет смысла рассматривать, так как при ней на каждом шаге происходит отказ от возможности завершения и требуемая работа никогда не будет выполнена.

В дальнейшем нам понадобятся следующие величины, определяемые стратегией S_A:

$M_{зт}(A)$ – м.о. затрат на произвольном шаге на завершение работы, если согласно стратегии S_A появившаяся на этом шаге возможность будет использована;

$M_{пл}(A)$ – м.о. платы на произвольном шаге, если согласно стратегии S_A происходит отказ от возможности завершения работы на этом шаге.

Обозначим

$$P_A = \sum_{i: z_i \leq A + c_i} p_i, \quad Q_A = 1 - P_A = \sum_{i: z_i > A + c_i} p_i,$$

ЛЕММА 3. При любом

$$A > \min (z_i - c_i) \tag{8}$$

м.о. фактических затрат при применении стратегии S_A в рассматриваемой задаче

$$M(s_A) = M_{зт}(A) + \frac{M_{пл}(A) \cdot Q_A}{P_A} . \qquad (9)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. ◣ Считая, что $p_i > 0,\ i = \overline{1,n}$, рассмотрим два случая:

а) $A \geq z_i - c_i$ при любом i. Тогда первая же появившаяся возможность для завершения работы будет реализована и

$$M(s_A) = M_{зт}(A). \qquad (10)$$

б) $A < z_i < c_i$ при некотором i. Тогда с учетом (8) $0 < P_A < 1$ и при этом

$$M_{зт}(A) = \frac{1}{P_A} \sum_{i : z_i \leq A + c_i} p_i z_i , \quad M_{пл}(A) = \frac{1}{Q_A} \sum_{i : z_i > A + c_i} p_i c_i . \qquad (11)$$

Случайную величину x, обозначающую фактические затраты при стратегии S_A, представим в виде $x = \sum_{k=1}^{\infty} x_k$, где x_k равно фактическим затратам, если возможность, появившаяся на k-м шаге, будет использована, а в противном случае – равно нулю. С учетом равенства $\sum_{k=1}^{\infty} k x^k = \frac{x}{(1-x)^2}$ при $|x| < 1$ получаем

$$M(s_A) = M(x) = P_A \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \left[Q_A^{k-1} (M_{зт}(A) + (k-1) M_{пл}(A)) \right] =$$

$$= \frac{P_A}{1 - Q_A} \cdot M_{зт}(A) + P_A \cdot M_{пл}(A) \cdot \frac{Q_A}{(1-Q_A)^2} = M_{зт}(A) + M_{пл}(A) \cdot \frac{Q_A}{P_A} .$$

Поскольку (10) при $Q_A = 0$ является частным случаем (9), то утверждение леммы доказано.

ТЕОРЕМА. При $\sum_{i=1}^{n} p_i c_i > 0$ пороговая стратегия S_M, где M – единственный корень уравнения (5), является оптимальной для рассматриваемой задачи в классе стратегий, обладающих конечным математическим ожиданием затрат.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. ◣ Согласно лемме 2 единственный корень уравнения (5) $M = \inf_{S} M(S)$. С учетом (11) получаем

$$M = \sum_{i=1}^{n} p_i \cdot \min(z_i; M + c_i) = \sum_{i: z_i \le M + c_i} p_i z_i + \sum_{i: z_i > M + c_i} p_i (M + c_i) =$$
$$= M_{зт}(M) \cdot P_M + M_{пл}(M) \cdot Q_M + M \cdot Q_M ,$$

откуда

$$M = M_{sт}(M) + M_{пл}(M) \cdot \frac{Q_M}{P_M} .$$

Но по лемме 3 этой же величине равно значение $M(s_M)$, и поскольку $M = \inf_s M(s)$, следовательно, s_M – оптимальная стратегия в рассматриваемой задаче.

Вернемся к случаю $t = 2$. В формулах (I), (4) при отыскании $M_2(0,K)$ следует обратиться к решению вспомогательной задачи В, считая выполнением работы получение комплекта заготовок K. Заполнение очередного столбца, соответствующего набору K, следует начать с клетки $(0,K)$. Для этого надо решить уравнение (5), приняв $z_i = M_2^{[\square]}(d_i; K) + z(d_i)$, $c_i = z(d_i) - c(d_i)$, $i = \overline{1,N}$. Значение полученного корня и есть искомое $M_2(0;K)$. После этого заполнение столбца продолжается по формулам (I)–(4). Реализация оптимальной стратегии раскроя аналогична описанной в [2].

Программы написаны на языке Фортран, реализованы для ЭВМ ЕС. Они могут быть использованы при создании автоматизированного раскройного оборудования.

Литература

I. Мухачева Э.А. Рациональный раскрой промышленных материалов. Применение в АСУ. – М.: Машиностроение, 1984.
2. Мухачева Э.А., Соломещ Н.И. Задача стохастического линейного раскроя // Оптимизация. – 1985. – Вып.36(53). – С. 49–55.
3. Роббинс Г., Сигмунд Д., Чао И. Теория оптимальных правил остановки. – М.: Наука, 1977.

Поступила в ред.-изд. отдел
08.06.1988 г.