УДК 5I9.853

ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ ВНУТРЕННЕЙ ТОЧНОСТЬЮ В ДВУХУРОВНЕВОМ ИТЕРАЦИОННОМ ПРОЦЕССЕ

В.В.Калашников, Н.И.Калашникова

§ I. Постановка задачи

Многие численные методы оптимизации сводятся к итерационному процессу вида

$$x_{\ell+1} = \mathcal{F}(x_\ell),\ \ell = 0,1,\dots, \tag{I}$$

$x_\ell, x_{\ell+1} \in R^m$, где для практического построения $x_{\ell+1}$, в свою очередь, применяется итерационный процесс

$$\left.\begin{aligned} z_s &= \Psi(z_{s-1}, x_\ell),\ s = 1,2,\dots, \\ z_0 &= x_\ell . \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

Как правило, процесс (2) требует бесконечного числа итераций, т.е. $x_{\ell+1} = \lim\limits_{s\to\infty} z_s$. Поэтому при каждом $\ell \in N$ необходимо решить вопрос об остановке процесса (2).

Этот вопрос рассматривался и решался многими авторами с различных позиций. Например, можно упомянуть работы [I-7]. В частности, в работе [3] вместо процесса (I) рассматривался процесс

$$x_{\ell+1} = \tilde{\mathcal{F}}(x_\ell, \gamma_\ell),\ \ell = 0,1,\dots, \tag{3}$$

где γ_ℓ – некоторый управляющий параметр. Далее, в работе [3] ставилась задача определения числа шагов n и последовательности $\{\gamma_k\}_{k=0}^{n-1}$, при которых процесс (3) даст приближение неподвижной точки x_* отображения $\mathcal{F}$ с погрешностью $\eta_n \le \varepsilon$, причем суммарная трудоемкость процесса должна быть минимальной. В качестве величины трудоемкости $(\ell+1)$-го шага в [3] предлагалось использовать величину $c(\eta_\ell, \gamma_\ell) = -K \cdot \ln(\gamma_\ell/\eta_\ell)$, где $K>0$ – некоторая константа, а η_ℓ – погрешность приближения x_ℓ. В статье В.А.Суханова [6] предложено в качестве более общего случая рассмотреть такой, в котором $c(\eta_\ell,\gamma_\ell) = -K\cdot\ln(\gamma_\ell/\eta_\ell)+c_0$, где $c_0>0$ – некоторое положительное число. Кроме того, в работе [6] широко использованы приемы формализации, предложенные в статье [3], для формулировки различных классов задач типа "итерация в итерации". В данной работе этот подход развивается дальше и приводится обоснование методики управления двухуровневым процессом (I)-(2).

Предположим, что имеется непрерывная функция $\delta: R^m \times R^m \to R$, с помощью значений которой можно оценивать отклонение итерации z от $\Phi(w)$. Другими словами, для любых z и w из R^m выполнены неравенства

$$C_1 \cdot \delta(z,w) \le \|z-\Phi(w)\| \le C_2 \cdot \delta(z,w) \qquad (4)$$

с некоторыми положительными константами C_1 и C_2. Тогда значение $\delta(z_s, x_\ell)$ может служить оценкой величины погрешности для процесса (2). Поэтому в качестве критерия остановки процесса (2) примем выполнение неравенства

$$\delta(z_s, x_\ell) \le \gamma_\ell , \qquad (5)$$

где $\gamma_\ell>0$ – выбранная точность; если критерий (5) выполнен для некоторого $s\in N$, положим $x_{\ell+1}=z_s$. Таким образом, процесс (I) заменяется на такой, в котором в силу (4) и (5) выполнены соотношения

$$\|x_{\ell+1}-\Phi(x_\ell)\| \le C_2\cdot\gamma_\ell, \quad \ell=0,1,\ldots \qquad (6)$$

Далее, пусть x_* – предельная точка процесса (I) и пусть известна некоторая функция $\eta: R^m \to R$, дающая оценку отклонения точки x от точки x_*:

$$\mathcal{D}_1 \cdot \eta(x) \le \|x-x_*\| \le \mathcal{D}_2 \cdot \eta(x), \qquad (7)$$

где $\mathcal{D}_1$ и $\mathcal{D}_2$ – некоторые положительные константы. В этом случае естественным критерием остановки нашего процесса (6) служит выполнение неравенства

$$\eta(x_{\ell+1}) \le \varepsilon ,$$

где $\varepsilon > 0$ – заранее заданная конечная точность.

Зафиксировав величины $\eta_0 = \eta(x_0)$ и $\varepsilon > 0$ $(\varepsilon < \eta_0)$, мы можем управлять ходом процесса (6), выбирая различные значения параметров γ_ℓ. При этом вполне разумным представляется требование того, чтобы на $(\ell+1)$ -м шаге выполнялось соотношение $C_2 \cdot \gamma_\ell \le \mathcal{D}_1 \cdot \eta_\ell = \mathcal{D}_1 \cdot \eta(x_\ell)$, так как точность выполнения шага должна быть заведомо не грубее уже достигнутой точности в процессе (I). Кроме того, естественно предположить, что трудоемкость $(\ell+1)$ -го шага непосредственно связана с величиной γ_ℓ. Тогда возникает вопрос о выборе последовательности управляющих параметров $\{\gamma_\ell\}$, которая обеспечивает минимальную суммарную трудоемкость для достижения заданной точности ε.

Следует заметить, однако, что параметр γ_ℓ используется лишь как оценка отклонения $x_{\ell+1}$ от $\Phi(x_\ell)$. Фактически же итерационный процесс не реализуется на предельных оценках. Поэтому при большом числе шагов возникнут большие расхождения между реальными и рассчитанными заранее трудоемкостью и числом шагов процесса (6). Таким образом, более гибким и лучше реагирующим на изменение обстановки является способ управления процессом, в котором из найденной последовательности $\{\gamma_\ell\}$ используется лишь параметр γ_0 как точность выполнения первого шага. После этого найденный x_1 принимается за начальное приближение, и для него опять вычисляется новое γ_0. Понятно, что метод расчета γ_0, применяемый на каждом шаге, должен быть достаточно простым.

Таким образом, мы рассматриваем двухуровневый процесс, в котором верхний уровень – это сам итерационный процесс (6), а нижний – итерационный процесс (2).

Хотя для функций $\bar{\delta}(z,w) = \|z - \Phi(w)\|$ и $\bar{\eta}(x) = \|x - x_*\|$ известны лишь оценки (4) и (7), посмотрим, какой получилась бы модель управления вычислительным процессом, если бы значения $\bar{\eta}(x)$ и $\bar{\delta}(z,w)$ мы могли вычислять точно. С точки зрения оптимизации итерационного процесса, нас интересует связь между $\bar{\eta}_\ell = \bar{\eta}(x_\ell)$ – достигнутой точностью к началу $(\ell+1)$ -го шага, управляющим параметром $\bar{\gamma}_\ell$, выбранным на данном шаге, и точностью $\bar{\eta}_{\ell+1} = \bar{\eta}(x_{\ell+1})$ после выполнения шага. Эта зависимость, вообще говоря, может быть получена лишь в виде оценки

$$0 \leq \bar{\eta}_{\ell+1} \leq \varphi(\bar{\eta}_\ell, \bar{\gamma}_\ell),\ \ell = 0, 1, \ldots$$

В реальных условиях шаг процесса не должен ухудшать уже достигнутую точность $\bar{\eta}_\ell$, поэтому в качестве $\varphi(\bar{\eta}_\ell, \bar{\gamma}_\ell)$ естественно взять функцию вида

$$\varphi(\bar{\eta}_\ell, \bar{\gamma}_\ell) = \min\{\bar{\eta}_\ell, \tilde{\varphi}(\bar{\eta}_\ell, \bar{\gamma}_\ell)\},$$

где функция $\tilde{\varphi}$ определяется свойствами процесса и по своему смыслу должна быть монотонной по каждой из переменных. При этом естественно считать, что $\tilde{\varphi}(\bar{\eta}_\ell, \bar{\gamma}_\ell) > \bar{\gamma}_\ell$ для любых $\bar{\eta}_\ell > 0$ и $\bar{\gamma}_\ell > 0$. Кроме того, при достаточно малом $\bar{\gamma}_\ell$, т.е. при достаточно точном выполнении шага верхнего уровня, должно соблюдаться неравенство

$$\tilde{\varphi}(\bar{\eta}_\ell, \bar{\gamma}_\ell) \leq \bar{\eta}_\ell .$$

Для управления процессом нужна также некоторая функция $c(\bar{\eta}_\ell, \bar{\gamma}_\ell)$, характеризующая трудоемкость нахождения $x_{\ell+1}$, удовлетворяющего неравенству (6). В реальных условиях даже на проверку этого неравенства требуется затратить некоторое количество вычислений. Поэтому будем считать, что

$$c(\bar{\eta}_\ell, \bar{\gamma}_\ell) = \sigma + \tilde{c}(\bar{\eta}_\ell, \bar{\gamma}_\ell),$$

где $\sigma > 0$ – некоторое (малое) число, а функция $\tilde{c}(\bar{\eta}_\ell, \bar{\gamma}_\ell) \geq 0$ определяется свойствами процесса и по своему смыслу, естественно, обладает монотонностью по $\bar{\gamma}_\ell$. Что касается ее зависимости от $\bar{\eta}_\ell$, то ввиду равенства $z_0 = x_\ell$ близость точки x_ℓ к решению x_* обеспечивает в реальных условиях малость величины $\|z_0 - \Phi(z_0)\|$ и, следовательно, малость величины $\delta(z_0, x_\ell)$. Поэтому при одном и том же $\bar{\gamma}_\ell$ трудоемкость выполнения критерия (6) тем меньше, чем меньше $\bar{\eta}_\ell$.

Основываясь на вышеизложенном, сделаем следующие предположения:

I) функция $\tilde{\varphi}(\bar{\eta}, \bar{\gamma}) \geq 0$ непрерывная, монотонно возрастает по обеим переменным, причем

$$\tilde{\varphi}(\bar{\eta}, 0) < \bar{\eta} \quad \text{при} \quad \bar{\eta} > 0;$$
$$\tilde{\varphi}(\bar{\eta}, \bar{\gamma}) > \bar{\gamma} \quad \text{при} \quad \bar{\eta} > 0, \bar{\gamma} > 0;$$

2) функция $\tilde{c}(\bar{\eta}, \bar{\gamma}) \geq 0$ не убывает по $\bar{\eta}$ и не возрастает по $\bar{\gamma}$.

Теперь задача для определения $\bar{\gamma}_0$ может быть поставлена в следующей форме. При заданных $\bar{\eta}_0 = \bar{\eta}(x_0)$ и $\bar{\varepsilon} > 0$ ($\bar{\varepsilon} < \bar{\eta}_0$) требуется выбрать последовательность управляющих параметров $\{\bar{\gamma}_\ell\}$ так, чтобы минимизировать наибольшую возможную трудоемкость процесса. При этом будем считать, что каждая реализация приближенного процесса характеризуется парой последовательностей $\{\bar{\eta}_\ell\}_{\ell=0}^{\infty}$ и $\{\bar{\gamma}_\ell\}_{\ell=0}^{\infty}$, для которых выполнены соотношения

$$0 \le \bar{\eta}_\ell \le \varphi(\bar{\eta}_{\ell-1}, \bar{\gamma}_{\ell-1}), \ \ell=1,2,\ldots \tag{8}$$

Кроме того, поскольку $\{x_\ell\}$ должна стремиться к x_*, а $\delta(x_*, x_*) = 0$, из (5) заключаем, что последовательность $\{\bar{\gamma}_\ell\}$ должна стремиться к нулю. Иначе на бесконечном числе шагов мы могли бы положить $x_{\ell+1} = x_\ell$ и эти шаги исключить из рассмотрения.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ I. Пара последовательностей $(\{\bar{\eta}_\ell\}, \{\bar{\gamma}_\ell\})$ называется допустимой, если для нее выполнено соотношение (8) и $\lim_{\ell\to\infty} \bar{\gamma}_\ell = 0$.

Легко проверить, что если пара $(\{\bar{\eta}_\ell\}, \{\bar{\gamma}_\ell\})$ допустима, то для любого $\bar{\varepsilon} > 0$ найдется номер $n \in N$ такой, что $\bar{\eta}_n \le \bar{\varepsilon}$. Следовательно, можно определить функцию трудоемкости допустимой пары $(\{\bar{\eta}_\ell\}, \{\bar{\gamma}_\ell\})$ в виде

$$\widetilde{S}(\bar{\eta}_0, \bar{\varepsilon}, \{\bar{\eta}_\ell\}, \{\bar{\gamma}_\ell\}) = \sum_{i=0}^{n-1} c(\bar{\eta}_i, \bar{\gamma}_i),$$

где n - первый номер, для которого $\bar{\eta}_n \le \bar{\varepsilon}$. Так как мы хотим минимизировать максимальную возможную трудоемкость процесса, то на множестве Γ' последовательностей $\bar{\gamma} = \{\bar{\gamma}_0 > 0\}$, стремящихся к нулю, определим функцию

$$\zeta(\gamma, \eta_0, \varepsilon) = \sup_{\{\bar{\eta}_\ell\}:\ \text{пара } (\{\bar{\eta}_\ell\}, \{\bar{\gamma}_\ell\}) \text{ допустима.}} \widetilde{S}(\bar{\eta}_0, \bar{\varepsilon}, \{\bar{\eta}_\ell\}, \{\bar{\gamma}_\ell\}),$$

Нетрудно показать, что $\zeta(\bar{\gamma}, \bar{\eta}_0, \bar{\varepsilon}) = \widetilde{S}(\bar{\eta}_0, \bar{\varepsilon}, \{\hat{\eta}_\ell\}, \{\bar{\gamma}_\ell\})$, где последовательность $\{\hat{\eta}_\ell\}$ определяется по рекуррентной формуле

$$\left.\begin{aligned} &\hat{\eta}_0 = \bar{\eta}_0, \\ &\hat{\eta}_{\ell+1} = \varphi(\hat{\eta}_\ell, \bar{\gamma}_\ell), \ \ell = 0,1,\ldots \end{aligned}\right\} \tag{9}$$

Таким образом , задача об оптимальном управлении вычислительным процессом (2), (6) сводится к следующей задаче: найти

$$S(\bar{\eta}_0, \bar{\varepsilon}) = \inf_{\bar{\gamma}\in\Gamma'} \zeta(\bar{\gamma}, \bar{\eta}_0, \bar{\varepsilon}) = \inf_{\bar{\gamma}\in\Gamma'} \widetilde{S}(\bar{\eta}_0, \bar{\varepsilon}_0, \{\hat{\eta}_\ell\}, \{\bar{\gamma}_\ell\}), \tag{10}$$

где $\Gamma' = \{\gamma' = \{\bar{\gamma}_\ell\}_{\ell=0}^{\infty} : \bar{\gamma}_\ell > 0, \ \lim_{\ell\to\infty} \bar{\gamma}_\ell = 0\}$.

Рассмотрим произвольную последовательность $\bar{\gamma} \in \Gamma'$ и определяемое ею значение

$$\tilde{S}(\bar{\eta}_0, \bar{\varepsilon}, \{\hat{\eta}_\ell\}, \{\bar{\gamma}_\ell\}) = \sum_{i=0}^{n-1} c(\hat{\eta}_i, \bar{\gamma}_i),$$

где n – первый номер, для которого $\hat{\eta}_n \leq \bar{\varepsilon}$. Можно показать, что если существует номер $\ell_0 \leq n-1$ такой, что $\tilde{\varphi}(\hat{\eta}_{\ell_0}, \bar{\gamma}_{\ell_0}) \geq \hat{\eta}_{\ell_0}$, то $\bar{\gamma}$ не является решением задачи (I0). Отсюда следует, что мы должны искать решение задачи (I0) лишь среди таких последовательностей $\bar{\gamma} \in \Gamma'$, для которых последовательность $\{\hat{\eta}_\ell\}$, определяемая соотношениями

$$\left.\begin{aligned} &\hat{\eta}_0 = \bar{\eta}_0, \\ &\hat{\eta}_{\ell+1} = \tilde{\varphi}(\hat{\eta}_\ell, \bar{\gamma}_\ell), \ \ell = 0, 1, \ldots, n-1, \end{aligned}\right\} \tag{II}$$

убывает, т.е. $\hat{\eta}_{\ell+1} < \hat{\eta}_\ell$, $\ell = 0, 1, \ldots, n-1$; здесь, как и ранее, n – первый номер, для которого $\hat{\eta}_n \leq \bar{\varepsilon}$. Заметим, что из убывания $\{\hat{\eta}_\ell\}_{\ell=0}^{n}$ и предположения I) о функции $\tilde{\varphi}$ вытекает выполнение неравенств

$$\bar{\gamma}_\ell \leq \hat{\eta}_\ell, \quad \ell = 0, 1, \ldots, n-1. \tag{I2}$$

Действительно, если бы при каком-то $\ell \leq n-1$ имело место обратное неравенство, это привело бы к противоречию:

$$\bar{\gamma}_\ell > \hat{\eta}_\ell > \hat{\eta}_{\ell+1} = \tilde{\varphi}(\hat{\eta}_\ell, \bar{\gamma}_\ell) > \bar{\gamma}_\ell.$$

Далее, ясно, что $S(\bar{\eta}_0, \bar{\varepsilon})$ неотрицательно и не возрастает по $\bar{\varepsilon}$. Нетрудно также убедиться, что $S(\bar{\eta}_0, \bar{\varepsilon})$ не убывает по $\bar{\eta}_0$. Это наряду с (I2) дает возможность для нахождения $S(\bar{\eta}_0, \bar{\varepsilon})$ применить процесс Беллмана:

$$S(\bar{\eta}_0, \bar{\varepsilon}) = \min_{\bar{\gamma}_0 \leq \bar{\eta}_0} \{S(\tilde{\varphi}(\bar{\eta}_0, \bar{\gamma}_0), \bar{\varepsilon}) + c(\bar{\eta}_0, \bar{\gamma}_0)\},$$

учитывая, что $S(\bar{\eta}_0, \bar{\varepsilon}) = 0$ при $\bar{\eta}_0 \leq \bar{\varepsilon}$. Однако в данной работе будут рассмотрены функции $\tilde{\varphi}(\bar{\eta}, \bar{\gamma})$ и $\tilde{c}(\bar{\eta}, \bar{\gamma})$ такого вида, которые позволяют решить задачу (I0) без применения методов динамического программирования.

Если бы нам было известно значение $\bar{\eta}_0 = \bar{\eta}(x_0)$, мы смогли бы определить, решив задачу (I0), величину $\bar{\gamma}_0$ и совершить один шаг внешнего процесса, заключающийся в проведении итераций (2) до выполнения условия

$$\bar{\delta}(z_s, x_\ell) = \|z_s - \Phi(x_\ell)\| \leq \bar{\gamma}_0.$$

Но нам известны не сами функции $\bar{\eta}(x)$ и $\bar{\delta}(z, w)$, а их оценки с двух сторон значениями функций $\eta(x)$ и $\delta(z,w)$. В этом случае мы можем определить величину γ_0 как решение задачи (10), в которой $\overline{\eta}_0$ и $\overline{\varepsilon}$ заменены соответственно на $\eta_0 = \mathcal{D}_1 \cdot \eta(x_0)$ и $\varepsilon = \overline{\varepsilon}/\mathcal{D}_2$, а затем совершить внешний шаг, заключающийся в проведении итераций (2) до выполнения условия $\delta(z_s, x_\ell) \le \gamma_0/C_2$. Затем положим $x_{\ell+1} = z_s$, $\eta_0 = \mathcal{D}_1 \cdot \eta(x_{\ell+1})$ и перейдем к следующему внешнему шагу.

В этой работе рассмотрим достаточно типичный случай, когда основной процесс (1) в глобальном смысле сходится линейно, а в некоторой достаточно малой окрестности V точки x_* эта сходимость имеет порядок $1+\alpha$ с $\alpha \in (0,1]$ (например, квадратичная). Другими словами, найдутся величины $0<\rho<1$ и $\mathcal{D}>0$, зависящие от начального приближения x_0, такие, что

$$\|\Phi(x_\ell) - x_*\| \le \min\{\rho, \mathcal{D}\cdot\|x_\ell - x_*\|^\alpha\}\cdot\|x_\ell - x_*\|, \qquad (13)$$
$$\ell = 0,1,\dots$$

Тогда, имея в виду цепочку неравенств

$$\|x_{\ell+1} - x_*\| \le \|\Phi(x_\ell) - x_*\| + \|x_{\ell+1} - \Phi(x_\ell)\| \le$$

$$\le \min\{\rho, \mathcal{D}\cdot\|x_\ell - x_*\|^\alpha\}\cdot\|x_\ell - x_*\| + \|x_{\ell+1} - \Phi(x_\ell)\|,$$

можем взять в качестве $\tilde{\varphi}(\overline{\eta},\overline{\gamma})$ функцию

$$\tilde{\varphi}(\overline{\eta},\overline{\gamma}) = \min\{\rho, \mathcal{D}\cdot\overline{\eta}^\alpha\}\cdot\overline{\eta} + \overline{\gamma},$$

удовлетворяющую, очевидно, предположению 1).

Далее, предположим, что внутренний процесс (2) сходится линейно, т.е. для любого ℓ выполнены оценки

$$\|z_s - \Phi(x_\ell)\| \le \omega\cdot\|z_{s-1} - \Phi(x_\ell)\|, \quad s = 1,2,\dots,$$

с некоторым параметром $0<\omega<1$. Отсюда легко вывести, что, для того чтобы гарантировать выполнение условия $\overline{\delta}(z_s, x_\ell) \le \overline{\gamma}_\ell$, достаточно совершить не менее S шагов процесса (2), где

$$S = \frac{\ln(\overline{\gamma}_\ell/\overline{\delta}(x_\ell, x_\ell))}{\ln\omega}.$$

С помощью неравенства треугольника и формулы (13) нетрудно получить соотношение

$$\delta(x_\ell, x_\ell) \le (1+\rho)\cdot\overline{\eta}(x_\ell), \quad \ell = 0,1,\dots$$

Следовательно, чтобы гарантировать выполнение условия $\overline{\delta}(z_s, x_\ell) \le \overline{\gamma}_\ell$, достаточно проделать не менее S_1 шагов процесса

(2), где

$$s_1 = \frac{\ln(1+\rho)}{-\ln\omega} + \frac{\ln(\bar{\gamma}_e/\bar{\eta}_e)}{\ln\omega} \quad (\geq s). \qquad (14)$$

Ввиду того, что трудоемкость итерационного процесса (2) можно считать пропорциональной числу проделанных шагов, то, принимая во внимание (14), примем в качестве значения функции $\tilde{c}(\bar{\eta}_e, \bar{\gamma}_e)$ величину

$$\tilde{c}(\bar{\eta}_e, \bar{\gamma}_e) = K\cdot\left[\ln\frac{\bar{\eta}_e}{\bar{\gamma}_e} + \ln(1+\rho)\right]_+, \; \ell=0,1,\ldots,$$

где $K = -1/\ln\omega > 0$, а $\nu_+ = \max\{0,\nu\}$ для вещественного ν. Учитывая вид целевой функции задачи (10), можем сделать замену переменных $\sigma := \sigma/K$ и переписать эту задачу выбора последовательности $\gamma_0, \gamma_1, \ldots, \gamma_{n-1}$ в виде

$$\sum_{i=0}^{n-1}\left\{\left[\ln\left(\frac{\eta_i}{\gamma_i}\right) + B'\right]_+ + \sigma\right\} \longrightarrow \inf_{\gamma\in\Gamma'}, \qquad (15)$$

где $B' = \ln(1+\rho) > 0$, $\eta_0 = \mathcal{D}_1\eta(x_0)$, а n определяется соотношениями

$$\left.\begin{aligned} \varepsilon < \eta_e &= \min\{\rho, \mathcal{D}\cdot\eta_{e-1}^{\alpha}\}\eta_{e-1} + \gamma_{e-1}, \; \ell=1,2,\ldots,n-1, \\ \eta_e &= \min\{\rho, \mathcal{D}\,\eta_{n-1}^{\alpha}\}\eta_{e-1} + \gamma_{n-1} \leq \varepsilon. \end{aligned}\right\} \qquad (16)$$

Как было отмечено выше, мы вправе искать решение задачи (15) на множестве Γ таких последовательностей $\gamma\in\Gamma'$, для которых последовательность $\{\eta_e\}_{e=0}^{n-1}$, определяемая соотношениями (16), является убывающей. При этом из (16) следует, что $\gamma_e \leq \eta_e$ для всех $\ell = 0,1,\ldots,n-1$. Поэтому окончательно мы должны решить задачу

$$\sum_{i=0}^{n-1}\left(\ln\frac{\eta_i}{\gamma_i} + B\right) \longrightarrow \inf_{\gamma\in\Gamma} \qquad (17)$$

при ограничениях (16); здесь $B = B' + \sigma$.

§ 2. Решение задачи оптимального управления точностью

Сделав очевидную замену переменных, ограничения (16) можно привести к виду

$$\left.\begin{aligned} \varepsilon < \eta_e &= \min\{\rho, \eta_{e-1}^{\alpha}\}\cdot\eta_{e-1} + \gamma_{e-1}, \; \ell = 1,2,\ldots,n-1, \\ \eta_n &= \min\{\rho, \eta_{e-1}^{\alpha}\}\eta_{n-1} + \gamma_{n-1} \leq \varepsilon. \end{aligned}\right\} \qquad (18)$$

В силу монотонности последовательности $\{\eta_\ell\}_{\ell=0}^{n-1}$ при $\gamma \in \Gamma$ нам достаточно рассмотреть при решении задачи (17)-(18) три случая:

(i) $\rho^{1/\alpha} \geqslant \eta_0\ (>\varepsilon)$;
(ii) $(\eta_0>)\ \varepsilon \geqslant \rho^{1/\alpha}$;
(iii) $\eta_0 > \rho^{1/\alpha} > \varepsilon$.

Очевидно, если имеет место соотношение (i), то решение задачи (17) следует искать при условиях

$$\left.\begin{aligned} \varepsilon < \eta_\ell = \eta_{\ell-1}^{1+\alpha} + \gamma_{\ell-1},\ \ell=1,2,\ldots,n-1, \\ \eta_n = \eta_{n-1}^{1+\alpha} + \gamma_{n-1} \leq \varepsilon . \end{aligned}\right\} \tag{18}$$

Так как $\eta_0 < 1$, то для заданного $\varepsilon < \eta_0$ существует единственное натуральное $n_0 \geqslant 1$, для которого выполнены неравенства

$$\eta_0^{(1+\alpha)^{n_0}} < \varepsilon \leq \eta_0^{(1+\alpha)^{n_0-1}} . \tag{19}$$

Рассмотрим для $n \geqslant n_0$ уравнение

$$f_n(x) = \prod_{i=0}^{n-1} \left[1 + (1+\alpha)^i x\right]^{(1+\alpha)^{n-1-i}} = \frac{\varepsilon}{\eta_0^{(1+\alpha)^n}} \tag{20}$$

относительно неизвестной $x \in R$. Легко проверить, что при $n \geqslant n_0$ и $\alpha > 0$ уравнение (20) имеет ровно один положительный корень. Наряду с $f_n(x)$ рассмотрим функции

$$\tilde{f}_n(\xi_0, \xi_1, \ldots, \xi_{n-1}) = \eta_0^{(1+\alpha)^n} \prod_{i=0}^{n-1} (1+\xi_i)^{(1+\alpha)^{n-1-i}}$$

и

$$\tilde{g}_n(\xi_0, \xi_1, \ldots, \xi_{n-1}) = \ln \frac{\eta_0}{\varepsilon} + \sum_{i=0}^{n-1} \ln \frac{1+\xi_i}{\xi_i} + B \cdot n ;$$

здесь $\xi_i > 0,\ i = 0, \ldots, n-1$.

ЛЕММА I. Функция $\tilde{g}_n(\xi_0, \ldots, \xi_{n-1})$ на множестве

$$W = \left\{(\xi_0, \xi_1, \ldots, \xi_{n-1}) \in \operatorname{int} R_+^n : \tilde{f}_n(\xi_0, \ldots, \xi_{n-1}) = \varepsilon\right\} \tag{21}$$

принимает наименьшее значение при

$$\xi_i = (1+\alpha)^i \cdot \hat{\xi}_0,\ i = 0, 1, \ldots, n-1 , \tag{22}$$

где $\hat{\xi}_0$ – (единственный) положительный корень уравнения (20).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как $\widetilde{f}_n(\xi_0,\dots,\xi_{n-1})>0$ при $\xi_i>0$, $i=0,\dots,n-1$, равенство в (21) можно, логарифмируя обе его части, заменить на равенство

$$\sum_{i=0}^{n-1}(1+\alpha)^{n-1-i}\ln(1+\xi_i)=\ln\frac{\varepsilon}{\eta_0(1+\alpha)^n}.$$

Для задачи

$$\widetilde{g}_n(\xi_0,\dots,\xi_{n-1})\longrightarrow\min_W$$

построим функцию Лагранжа

$$\mathcal{L}(\xi_0,\dots,\xi_{n-1},\lambda)=\ln\frac{\eta_0}{\varepsilon}+B\cdot n+\sum_{i=0}^{n-1}\ln\frac{1+\xi_i}{\xi_i}+$$
$$+\lambda\left[\sum_{i=0}^{n-1}(1+\alpha)^{n-1-i}\ln(1+\xi_i)-\ln\frac{\varepsilon}{\eta_0(1+\alpha)^n}\right]$$

и выпишем систему уравнений для ее стационарных точек

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\xi_i}(\xi_0,\dots,\xi_{n-1},\lambda)=-\frac{1}{\xi_i(1+\xi_i)}+\frac{\lambda\cdot(1+\alpha)^{n-1-i}}{1+\xi_i}=0,\ i=0,1,\dots,n-1.$$

Очевидно, что для любого решения этой системы выполнены соотношения $\xi_i=(1+\alpha)^i\cdot\xi_0$ при $i=0,1,\dots,n-1$. Но если координаты точки $(\xi_0,\xi_1,\dots,\xi_{n-1})$ связаны этими соотношениями, то верно равенство $\widetilde{f}_n(\xi_0,\dots,\xi_{n-1})=f_n(\xi_0)$. Поэтому единственной стационарной точкой функции Лагранжа в области $(\operatorname{int}R_+^n)\times R$ является точка, определенная в условии леммы при $\lambda=\frac{1}{(1+\alpha)^{n-1}\xi_0}$.

Далее, так как в этой точке

$$\frac{\partial^2\mathcal{L}}{\partial\xi_i\partial\xi_j}=\begin{cases}0,\ i\neq j,\\ \dfrac{1}{\xi_i^2(1+\xi_i)}>0,\ i=j,\end{cases}$$

то она является (единственной) точкой локального минимума функции $\widetilde{g}_n(\xi_0,\dots,\xi_{n-1})$ на множестве W. Для завершения доказательства леммы заметим, что множество W ограничено, и так как $\widetilde{g}_n(\xi_0,\dots,\xi_{n-1})$ неограниченно возрастает при стремлении точки $(\xi_0,\dots,\xi_{n-1})$ к границе множества R_+^n, то найденная точка локального минимума является точкой глобального минимума для рассматриваемой функции на множестве W. Лемма доказана.

Построим при фиксированном $\eta_0\le\rho^{1/\alpha}$ и заданном $\varepsilon>0$ последовательность $\hat{\gamma}(n)=\{\hat{\gamma}_\ell\}_{\ell=0}^{\infty}$ по рекуррентным формулам

$$\left.\begin{aligned} &\hat{\gamma}_\ell = (1+\alpha)^\ell \cdot \hat{\xi}_0 \cdot \hat{\eta}_\ell^{1+\alpha}, \quad \hat{\eta}_{\ell+1} = \hat{\eta}_\ell^{1+\alpha} + \hat{\gamma}_\ell, \quad \ell = 0, 1, \ldots, n-1, \\ &\hat{\gamma}_\ell = \varepsilon/\ell, \quad \ell = n, n+1, \ldots, \end{aligned}\right\} \qquad (23)$$

где $\hat{\eta}_0 = \eta_0$, а $\hat{\xi}_0$ – (единственный) положительный корень уравнения (20). Покажем, что при любом $n \geq n_0$ последовательность $\hat{\gamma}^{(n)}$ принадлежит множеству Γ. Для этого достаточно проверить, что если последовательность $\{\hat{\eta}_\ell\}_{\ell=0}^{k-1}$ построена по формулам (23), где $k \leq n$ – первый номер, для которого $\hat{\eta}_k \leq \varepsilon$, то она монотонно убывает. В самом деле, члены этой последовательности удовлетворяют соотношениям

$$\varepsilon < \hat{\eta}_\ell = \hat{\eta}_{\ell-1}^{1+\alpha} \cdot \left[1 + (1+\alpha)^{\ell-1} \cdot \hat{\xi}_0\right], \quad \ell = 0, 1, \ldots, k-1.$$

Так как $\hat{\xi}_0$ – положительный корень уравнения (20), то имеет место равенство

$$\hat{\eta}_0^{(1-\alpha)^n} \cdot \prod_{i=0}^{n-1} \left[1 + (1+\alpha)^i \cdot \hat{\xi}_0\right]^{(1+\alpha)^{n-1-i}} = \varepsilon. \qquad (24)$$

Пользуясь формулой

$$\alpha\left[1 + (1+\alpha) + (1+\alpha)^2 + \ldots + (1+\alpha)^{n-1}\right] = (1+\alpha)^n - 1,$$

можно переписать (24) в виде

$$\prod_{i=0}^{n-1} \left[\hat{\eta}_0^\alpha + (1+\alpha)^i \cdot \hat{\xi}_0 \cdot \hat{\eta}_0^\alpha\right]^{(1+\alpha)^{n-1-i}} = \frac{\varepsilon}{\hat{\eta}_0}.$$

И так как $\varepsilon/\hat{\eta}_0 < 1$, то $\hat{\xi}_0 \cdot \hat{\eta}_0^\alpha < 1 - \hat{\eta}_0^\alpha$, а значит, $\hat{\gamma}_0 = \hat{\xi}_0 \cdot \hat{\eta}_0^{1+\alpha} < \hat{\eta}_0 - \hat{\eta}_0^{1+\alpha}$. Отсюда вытекает, что $\hat{\eta}_1 = \hat{\eta}_0^{1+\alpha} + \hat{\gamma}_0 < \hat{\eta}_0$. Далее, используя формулу $\hat{\eta}_1 = (1 + \hat{\xi}_0) \cdot \eta_0^{1+\alpha}$, перепишем (24) в виде

$$\hat{\eta}_1^{(1+\alpha)^{n-1}} \prod_{i=1}^{n-1} \left[1 + (1+\alpha)^i \cdot \hat{\xi}_0\right]^{(1+\alpha)^{n-1-i}} = \varepsilon.$$

Поступая совершенно аналогично предыдущему, получим отсюда соотношение

$$\prod_{i=1}^{n-1} \left[\hat{\eta}_1^\alpha + (1+\alpha)^i \cdot \hat{\xi}_0 \cdot \hat{\eta}_1^\alpha\right]^{(1+\alpha)^{n-1-i}} = \frac{\varepsilon}{\hat{\eta}_1}.$$

Снова, если $\varepsilon < \hat{\eta}_1$, делаем вывод, что $(1+\alpha) \cdot \hat{\xi}_0 \cdot \hat{\eta}_1^\alpha < 1 - \hat{\eta}_1^\alpha$. Следовательно, $\hat{\gamma}_1 = (1+\alpha) \cdot \hat{\xi}_0 \cdot \hat{\eta}_1^{1+\alpha} < \hat{\eta}_1 - \hat{\eta}_1^{1+\alpha}$.

Отсюда вытекает цепочка $\hat{\eta}_2 = \hat{\eta}_1^{1+\alpha} + \hat{\gamma}_1 < \hat{\eta}_1^{1+\alpha} + \hat{\eta}_1 - \hat{\eta}_1^{1+\alpha} = \hat{\eta}_1$.

Рассуждая таким же образом и далее, получим неравенства

$$\hat{\gamma}_l < \hat{\eta}_l - \hat{\eta}_l^{1+\alpha}, \quad l = 0,1,\ldots,k-1,$$

из которых следует убывание последовательности $\{\hat{\eta}_l\}_{l=0}^{k-1}$. Попутно мы доказали, что на самом деле для последовательности $\{\hat{\eta}_l\}_{l=0}^{k-1}$ выполнены соотношения

$$\max\{\varepsilon, \gamma_l\} < \hat{\eta}_l = \hat{\eta}_{l-1}^{1+\alpha} + \hat{\gamma}_{l-1}, \; l = 1,2,\ldots,k-1. \qquad (25)$$

Теперь представим допустимое множество задачи (I7),(I8) в виде $\Gamma \subset \bigcup\limits_{n \geq n_0} \Gamma_n$, где Γ_n при каждом $n \geq n_0$ представляет собой множество последовательностей $\gamma = \{\gamma_l\}$ из Γ таких, что n - первый номер, для которого $\eta_n \leq \varepsilon$. Здесь, как и в (I8), η_l определяется по формулам $\eta_l = \eta_{l-1}^{1+\alpha} + \gamma_{l-1}, l=1,2,\ldots$

ЗАМЕЧАНИЕ I. При $n < n_0$ множества Γ_n пусты, так как при любой $\gamma \in \Gamma$ и любом $l \leq n_0 - 1$ справедлива цепочка соотношений

$$\eta_l = \eta_0^{(1+\alpha)^l} \cdot \tilde{f}_l(\xi_0, \xi_1, \ldots, \xi_{l-1}) = \eta_0^{(1+\alpha)^l} \prod_{i=0}^{l-1} (1+\xi_i)^{(1+\alpha)^{l-1-i}} > \eta_0^{(1+\alpha)^l} \geq \varepsilon$$

в силу (I9). Здесь

$$\xi_i = \gamma_i / \eta_i^{1+\alpha}, \; i = 0,1,\ldots,n-1. \qquad (26)$$

Напомним, что функция $\zeta(\gamma, \eta_0, \varepsilon)$ определена в виде $\zeta(\gamma, \eta_0, \varepsilon) = \sum\limits_{i=0}^{n-1} c(\eta_i, \gamma_i)$, где последовательность $\{\eta_i\}$ строится по формулам (I8), а n - первый номер, при котором $\eta_n \leq \varepsilon$.

ЛЕММА 2. Для любого $\gamma \in \Gamma_n$ справедливо неравенство

$$\zeta(\gamma, \eta_0, \varepsilon) \geq \zeta(\hat{\gamma}^{(n)}, \eta_0, \varepsilon). \qquad (27)$$

Кроме того, $\hat{\gamma}^{(n_0)} \in \Gamma_{n_0}$ и, следовательно, $\inf\limits_{\gamma \in \Gamma_{n_0}} \zeta(\gamma, \eta_0, \varepsilon)$ достигается на $\gamma = \hat{\gamma}^{(n_0)}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Прежде всего отметим, что согласно (20) и (23) имеют место равенства $\hat{\eta}_n = \hat{\eta}_{n-1}^{1+\alpha} + \hat{\gamma}_{n-1} = \varepsilon$; отсюда и из замечания I, в частности, следует, что $\hat{\gamma}^{(n_0)} \in \Gamma_{n_0}$. Далее, для доказательства неравенства (27) достаточно рассмотреть лишь такие последовательности $\gamma = \{\gamma_l\} \in \Gamma_n$, для которых $\eta_n = \varepsilon$. В самом деле, если $\gamma \in \Gamma_n$ и $\eta_n < \varepsilon$, т.е.

$\eta_{n-1}^{1+\alpha}+\gamma_{n-1}<\varepsilon$, то можно уменьшить слагаемое $\left(\ln\frac{\eta_{n-1}}{\gamma_{n-1}}+B\right)$ в выражении для функции $\zeta(\gamma,\eta_0,\varepsilon)$, увеличив γ_{n-1} до величины $\tilde{\gamma}_{n-1}=\varepsilon-\eta_{n-1}^{1+\alpha}$. При этом остальные слагаемые в выражении для $\zeta(\gamma,\eta_0,\varepsilon)$ не изменятся.

Далее, аналогично (26), положим

$$\hat{\xi}_\ell=\hat{\gamma}_\ell/\hat{\eta}_\ell^{1+\alpha}=(1+\alpha)^\ell\cdot\hat{\xi}_0,\ \ell=0,1,\ldots,n-1.$$

Тогда $\zeta(\gamma,\eta_0,\varepsilon)=\tilde{g}_n(\xi_0,\xi_1,\ldots,\xi_{n-1})$, а $\zeta(\hat{\gamma}^{(n)},\eta_0,\varepsilon)\le$ $\le\tilde{g}_n(\hat{\xi}_0,\hat{\xi}_1,\ldots,\hat{\xi}_{n-1})$, так как при $n>n_0$ соотношение $\hat{\eta}_\ell\le\varepsilon$ может быть выполненным не только при $\ell=n$, но и при некоторых $\ell<n$. Кроме того, так как оба набора $(\xi_0,\ldots,\xi_{n-1})$ и $(\hat{\xi}_0,\ldots,\hat{\xi}_{n-1})$ принадлежат множеству W, определенному формулой (2I), то, согласно лемме I, выполнено неравенство

$$\tilde{g}_n(\hat{\xi}_0,\hat{\xi}_1,\ldots,\hat{\xi}_{n-1})\le\tilde{g}_n(\xi_0,\xi_1,\ldots,\xi_{n-1}). \tag{28}$$

Тогда требуемое неравенство (27) следует из цепочки

$$\zeta(\hat{\gamma}^{(n)},\eta_0,\varepsilon)\le\tilde{g}_n(\hat{\xi}_0,\ldots,\hat{\xi}_{n-1})\le\tilde{g}_n(\xi_0,\ldots,\xi_{n-1})=\zeta(\gamma,\eta_0,\varepsilon).$$

В частности, $\inf\limits_{\gamma\in\Gamma_{n_0}}\zeta(\gamma,\eta_0,\varepsilon)=\zeta(\hat{\gamma}^{(n_0)},\eta_0,\varepsilon)$, так как $\hat{\gamma}^{(n_0)}\in$ $\in\Gamma_{n_0}$. Лемма доказана.

Теперь можно заключить, что оптимальное значение целевой функции

$$\mu=\inf_{\gamma\in\Gamma}\sum_{i=0}^{n-1}\left(\ln\frac{\eta_i}{\gamma_i}+B\right)=\inf_{\gamma\in\Gamma}\zeta(\gamma,\eta_0,\varepsilon)$$

задачи (I7)-(I8′) совпадает со значением

$$\nu=\inf_{n\ge n_0}\tilde{g}_n(\hat{\xi}_0,\hat{\xi}_1,\ldots,\hat{\xi}_{n-1}).$$

Действительно, как отмечалось выше, $\zeta(\hat{\gamma}^{(n)},\eta_0,\varepsilon)\le$ $\le\tilde{g}_n(\hat{\xi}_0,\hat{\xi}_1,\ldots,\hat{\xi}_{n-1})$, а $\hat{\gamma}^{(n)}\in\Gamma=\bigcup\limits_{n\ge n_0}\Gamma_n$, следовательно, $\mu\le\nu$. С другой стороны, для всякой последовательности $\gamma\in\Gamma$ найдется номер $n\ge n_0$ такой, что $\gamma\in\Gamma_n$. Тогда из соотношения $\zeta(\gamma,\eta_0,\varepsilon)=\tilde{g}_n(\xi_0,\xi_1,\ldots,\xi_{n-1})$ и неравенства (28) следует, что $\nu\le\mu$. Значит, $\mu=\nu$ и вместо задачи (I7)-(I8′) будем решать задачу

$$\tilde{g}_n(\hat{\xi}_0,\ldots,\hat{\xi}_{n-1})=\ln\left(\frac{\eta_0}{\varepsilon}\prod_{i=0}^{n-1}\frac{1+(1+\alpha)^i\cdot\hat{\xi}_0}{(1+\alpha)^i\cdot\hat{\xi}_0}\right)+B\cdot n\longrightarrow\inf_{n\ge n_0}, \tag{29}$$

где $\hat{\xi}_0 > 0$ однозначно определяется по n как положительный корень уравнения (20). В силу соотношений (25) можно заключить, что решение задачи (29) является решением исходной задачи (I7)-(I8$'$) в случае (i).

Для того чтобы показать, что инфимум в задаче (29) достигается на некотором $\bar{n} \in N$, обобщим эту задачу на случай любого вещественного положительного n. Сначала введем обозначение

$$g_n(\xi_0) = \ln\left(\frac{l_0}{\varepsilon}\prod_{i=0}^{n-1}\frac{1+(1+\alpha)^i\xi_0}{(1+\alpha)^i\xi_0}\right) + B\cdot n$$

и перепишем задачу (29) в виде

$$\left.\begin{array}{l} g_n(\xi_0) \longrightarrow \inf\limits_{n\geq n_0}, \\ \text{при условии} \quad f_n(\xi_0) = \varepsilon/l_0^{(1+\alpha)^n},\ \xi_0>0. \end{array}\right\} \qquad (30)$$

Положив $g_0(\xi_0) = \ln\frac{l_0}{\varepsilon}$ и $f_0(\xi_0) = 1$, заметим, что

$$g_{n+1}(\xi_0) = g_n(\xi_0) + \ln\frac{1+(1+\alpha)^n\cdot\xi_0}{(1+\alpha)^n\cdot\xi_0} + B,$$

$$f_{n+1}(\xi_0) = [f_n(\xi_0)]^{1+\alpha}\cdot[1+(1+\alpha)^n\cdot\xi_0],\quad n=0,1,\ldots$$

Далее, введем бесконечные произведения

$$\rho(x) = \prod_{i=0}^{\infty}[1+(1+\alpha)^i x]^{\frac{1}{(1+\alpha)^{i+1}x}}, \qquad (31)$$

$$\tilde{\rho}(x) = \prod_{i=0}^{\infty}[1+(1+\alpha)^i x]/[(1+\alpha)^i x]. \qquad (32)$$

ЛЕММА 3. Бесконечные произведения (31) и (32) сходятся равномерно по x на всяком замкнутом луче $[\delta,+\infty)$, $\delta>0$, а функции $\rho(x)$ и $\tilde{\rho}(x)$ непрерывно дифференцируемы на интервале $(0,+\infty)$. Кроме того, имеет место следующее равенство для любого $x\in(0,+\infty)$:

$$x\cdot(\ln\tilde{\rho}(x))'_x = -((1+\alpha)\cdot x\cdot\ln\rho(x))'_x. \qquad (33)$$

Доказательство этой леммы, как и леммы 5, приведено в §3 настоящей статьи.

Теперь определим функции

$$\bar g_n(\xi_0)=\ln\left(\frac{l_0}{\varepsilon}\cdot\frac{\tilde p(\xi_0)}{\tilde p((1+\alpha)^n\cdot\xi_0)}\right)+B\cdot n$$

и

$$\bar f_n(\xi_0)=\left(p(\xi_0)/p((1+\alpha)^n\cdot\xi_0)\right)^{(1+\alpha)^n\cdot\xi_0},$$

где $n\geqslant 0$ – уже любое вещественное число, и заметим, что выполнены соотношения

$$\bar g_{n+1}(\xi_0)=\bar g_n(\xi_0)+\ln\frac{1+(1+\alpha)^n\xi_0}{(1+\alpha)^n\xi_0}+B,$$

$$\bar f_{n+1}(\xi_0)=\left[\bar f_n(\xi_0)\right]^{1+\alpha}\cdot\left(1+(1+\alpha)^n\cdot\xi_0\right)$$

для любого $n\geqslant 0$. Отсюда следует, что так как $\bar g_0(\xi_0)=\ln\frac{l_0}{\varepsilon}$ и $\bar f_0(\xi_0)=1$, то значения функций $\bar g_n(\xi_0)$ и $\bar f_n(\xi_0)$ при натуральных n совпадают со значениями $g_n(\xi_0)$ и $f_n(\xi_0)$ соответственно. Введем обозначение $y=(1+\alpha)^n$ для $n\in R_+$ и запишем обобщение задачи (30) в форме

$$\Phi(y)=\ln\tilde P(\xi_0(y))-\ln\tilde P(y\cdot\xi_0(y))+\frac{B}{\ln(1+\alpha)}\ln y\to\inf_{y\geqslant 1},\qquad(34)$$

где $\xi_0=\xi_0(y)>0$ – решение уравнения

$$f(\xi_0,y)=y\cdot\ln l_0-\xi_0\cdot y\cdot\ln p(\xi_0 y)+\xi_0\cdot y\cdot\ln p(\xi_0)=\ln\varepsilon\qquad(35)$$

относительно ξ_0.

ЛЕММА 4. Если $1\leq y\leq\frac{\ln\varepsilon}{\ln l_0}$, то не существует такого $\xi_0>0$, что числа ξ_0, y удовлетворяют равенству (35). Если же $y>\frac{\ln\varepsilon}{\ln l_0}$, то уравнение (35) имеет единственное решение $\xi_0=\xi_0(y)>0$. При этом $\xi_0(y)$ непрерывно дифференцируемо как функция от y, и

$$\frac{d\xi_0(y)}{dy}=\dot\xi_0=\frac{1}{y}\cdot\frac{\xi_0\cdot r'(\xi_0\cdot y)-\ln l_0-r(\xi_0)}{r'(\xi_0)-r'(\xi_0\cdot y)},\qquad(36)$$

где функция $r(x)$ задается равенством

$$r(x)=x\ln p(x)=\sum_{i=0}^{\infty}\frac{\ln(1+(1+\alpha)^i x)}{(1+\alpha)^{i+1}}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Перегруппировав слагаемые в уравнении (35) и поделив их на $y \geq 1$, получим соотношение

$$\omega(\xi_0, y) \equiv \xi_0 \cdot \ln p(\xi_0) - \xi \cdot \ln p(\xi_0 y) = \frac{\ln \varepsilon}{y} - \ln \eta_0 . \qquad (37)$$

Зафиксируем произвольное значение $y > 1$ и рассмотрим функцию $\overline{\omega}(\xi_0) = \omega(\xi_0, y)$. Очевидно, что $\overline{\omega}(0) = 0$ и

$$\frac{d\overline{\omega}}{d\xi_0} = \tau'(\xi_0) - \tau'(\xi_0 y) = \sum_{i=0}^{\infty} \left[\frac{1}{(1+\alpha)(1+(1+\alpha)^i \xi_0)} - \frac{1}{(1+\alpha)(1+(1+\alpha)^i \xi_0 y)} \right] > 0$$

при любых $\xi_0 > 0$. Кроме того, так как

$$\frac{1}{1+(1+\alpha)^i \xi_0} - \frac{1}{1+(1+\alpha)^i \xi_0 y} =$$

$$= \frac{(y-1)\cdot \xi_0 \cdot (1+\alpha)^i}{(1+(1+\alpha)^i \xi_0)(1+(1+\alpha)^i \xi_0 y)} \geq \frac{(y-1)(1+\alpha)^i \xi_0}{(1+(1+\alpha)^i \xi_0 \cdot y)^2} ,$$

то

$$\frac{d\omega}{d\xi_0} \geq \frac{(y-1)\cdot \xi_0}{(1+\alpha)} \cdot \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{(1+\alpha)^i} \cdot \frac{1}{y^2 \xi_0^2 + \frac{2\cdot \xi_0 \cdot y}{(1+\alpha)^i} + \frac{1}{(1+\alpha)^{2i}}} \geq$$

$$\geq \frac{y-1}{1+\alpha} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{(1+\alpha)^i} \cdot \frac{\xi_0}{(1+\xi_0 y)^2} = \frac{(y-1)\cdot \xi_0}{\alpha(1+\xi_0 y)^2} .$$

Следовательно,

$$\overline{\omega}(\xi_0) \geq \frac{y-1}{\alpha y^2} \cdot \left[\frac{1}{1+\xi_0 y} + \ln(1+\xi_0 \cdot y) \right] - \frac{y-1}{\alpha y^2} .$$

Правая же часть в (37) равна $\frac{1}{y} \ln \frac{\varepsilon}{\eta_0^y}$. Отсюда вытекает, что положительное решение уравнения (37) существует и единственно в том и только в том случае, если $\ln \frac{\varepsilon}{\eta_0^y} > 0$, или, что равносильно, $y > \frac{\ln \varepsilon}{\ln \eta_0}$. При этом заметим, что

$$\frac{1}{y} \ln \frac{\varepsilon}{\eta_0^y} = \omega(\xi_0(y), y) \geq \frac{y-1}{\alpha y^2} \left[\ln(1+\xi_0 \cdot y) - \frac{\xi_0 \cdot y}{1+\xi_0 y} \right] > \frac{\ln(1+\xi_0 \cdot y)}{\alpha y^2} \cdot (y-1) - \frac{1}{\alpha \cdot y},$$

и получим оценку

$$0 < \xi_0(y) < \frac{1}{y} \left[\left(\frac{\varepsilon \cdot e^{1/\alpha}}{\eta_0^y} \right)^{\frac{\alpha y}{y-1}} - 1 \right] .$$

Наконец, равенство (36) прямо следует из теоремы о неявной функции. Лемма доказана.

Введем обозначение $\tilde{\tau}(x)=\ln\tilde{p}(x)=\sum_{i=0}^{\infty}\ln\left(1+\frac{1}{(1+\alpha)^i x}\right)$ при $x>0$ и перепишем функцию $\varphi(y)$ из задачи (34) в виде

$$\varphi(y)=\tilde{\tau}(\xi_0(y))-\tilde{\tau}(y\cdot\xi_0(y))+\frac{B}{\ln(1+\alpha)}\cdot\ln y .$$

Тогда

$$\frac{d\varphi}{dy}(y)=\tilde{\tau}'(\xi_0(y))\cdot\dot{\xi}_0-\tilde{\tau}'(y\cdot\xi_0(y))\cdot\left[\xi_0(y)+y\cdot\dot{\xi}_0\right]+\frac{B}{y\ln(1+\alpha)} .$$

Используя соотношение (33), которое в новых обозначениях принимает вид

$$\tilde{\tau}'(x)=-\frac{1+\alpha}{x}\cdot\tau'(x),\ x>0,$$

получим равенство

$$\frac{d\varphi}{dy}(y)=-\dot{\xi}_0\cdot\frac{1+\alpha}{\xi_0}\cdot\left[\tau'(\xi_0)-\tau'(\xi_0\cdot y)\right]+\frac{1+\alpha}{y}\cdot\tau'(\xi_0\cdot y)+\frac{B}{y\ln(1+\alpha)} .$$

Подставляя в него выражение (36) вместо $\dot{\xi}_0$, в итоге выпишем формулу

$$\frac{d\varphi}{dy}(y)=\frac{1+\alpha}{y}\cdot\frac{\ln\rho_0}{\xi_0(y)}+\frac{1+\alpha}{y}\cdot\frac{\tau(\xi_0(y))}{\xi_0(y)}+\frac{B}{y\ln(1+\alpha)}$$

для первой производной функции $\varphi(y)$. Приравнивая ее к нулю, выводим уравнение

$$\ln\rho_0+\xi_0(y)\ln p(\xi_0(y))+\frac{B\cdot\xi_0(y)}{(1+\alpha)\ln(1+\alpha)}=0. \qquad (38)$$

Любое решение ξ_0 этого уравнения однозначно определяет стационарную точку y функции $\varphi(y)$. В самом деле, для фиксированного ξ_0, удовлетворяющего (38), уравнение (35) для определения y принимает вид

$$f(\xi_0,y)\equiv-\frac{B\cdot\xi_0\cdot y}{(1+\alpha)\ln(1+\alpha)}-\xi_0 y\cdot\ln p(\xi_0\cdot y)=\ln\varepsilon .$$

Но из этого уравнения следует, что $y=c/\xi_0$, где $c>0$ - единственный положительный корень уравнения

$$\ln\varepsilon+c\cdot\ln p(c)+\frac{B\cdot c}{(1+\alpha)\ln(1+\alpha)}=0,$$

т.е. уравнения (38) при $\rho_0=\varepsilon$.

Далее, нетрудно проверить, что уравнение (38) имеет единственное решение $\xi_0>0$. Действительно, функция $\chi(x)=$

$=x\ln p(x)+Q_\alpha x$, где $Q_\alpha=B/[(1+\alpha)\ln(1+\alpha)]$, монотонно возрастает, причем $\chi(0)=0$, и $\chi(x)\to+\infty$ при $x\to+\infty$, а $[-\ln \eta_0]>0$. Поэтому существует единственная точка $\xi_0^*>0$, удовлетворяющая (38), а значит, существует единственная точка $y^*>\ln\varepsilon/\ln\eta_0$ такая, что пара (ξ_0^*, y^*) удовлетворяет уравнению (35) и, кроме того, $\frac{d\Phi}{dy}(y^*)=0$. Покажем, что точка y^* является (единственной) точкой локального минимума функции $\Phi(y)$ на интервале $\left(\frac{\ln\varepsilon}{\ln\eta_0}, +\infty\right)$. В самом деле,

$$\frac{d^2\Phi}{dy^2}(y^*)=\frac{1+\alpha}{\xi_0^*\cdot y^*}\cdot\dot\xi_0(y^*)\cdot[r'(\xi_0^*)+Q_\alpha].$$

Подставляя сюда выражение (36) вместо $\dot\xi_0=\dot\xi_0(y^*)$, имеем соотношение

$$\frac{d^2\Phi}{dy^2}(y^*)=\frac{1+\alpha}{(y^*)^2}\,\frac{[r'(\xi_0^*\cdot y^*)+Q_\alpha]\cdot[r'(\xi_0^*)+Q_\alpha]}{r'(\xi_0^*)-r'(\xi_0^*\cdot y^*)}>0,$$

из которого и вытекает требуемое утверждение. Таким образом, мы показали, что функция $\Phi(y)$ унимодальная: она убывает на интервале $\left(\frac{\ln\varepsilon}{\ln\eta_0}, y^*\right)$ и возрастает на интервале $(y^*,+\infty)$. Следовательно, y^* – точка глобального минимума функции $\Phi(y)$ на интервале $\left(\frac{\ln\varepsilon}{\ln\eta_0}, +\infty\right)$, т.е. y^* – решение задачи (34). Так как значение функций $\bar g_n(\xi_0)$ и $\bar f_n(\xi_0)$ совпадают при натуральных n со значениями соответственно функций $g_n(\xi_0)$ и $f_n(\xi_0)$, определяющих исходную задачу (30), то мы можем заключить, что решением задачи (30) является одно из чисел

$$\bar n=\left[\frac{\ln y^*}{\ln(1+\alpha)}\right] \quad \text{или} \quad \bar{\bar n}=\left[\frac{\ln y^*}{\ln(1+\alpha)}\right]+1,$$

где $[z]$ – целая часть вещественного z.

Исследуем теперь левую часть ограничения (35) обобщенной задачи, т.е. функцию $f(\xi_0, y)$. Она, очевидно, возрастает по ξ_0 и, следовательно, функция $f(0,y)=y\cdot\ln\eta_0=(1+\alpha)^n\cdot\ln\eta_0$ является нижней огибающей семейства функций $\{f(\xi_0,y),\ \xi_0\geq 0\}$. Далее, в §3 данной статьи будет доказана

ЛЕММА 5. *Функция $f(\xi_0,y)$ выпукла по y при любом фиксированном $\xi_0>0$.*

Так как $\frac{\partial f}{\partial y}(\xi_0,y)=\ln\eta_0+r(\xi_0)-\xi_0\cdot r'(\xi_0\cdot y)$, а

$$r'(\xi_0,y)=\frac{1}{1+\alpha}\cdot\sum_{i=0}^{\infty}\frac{1}{1+(1+\alpha)^i\cdot\xi_0\cdot y}\to 0$$

при $y\to+\infty$, то графически семейство функций

$$\{\eta(\xi_0,n)=e^{f(\xi_0,(1+\alpha)^n)}\}_{\xi_0\geq 0}$$

можно изобразить (условно) в виде

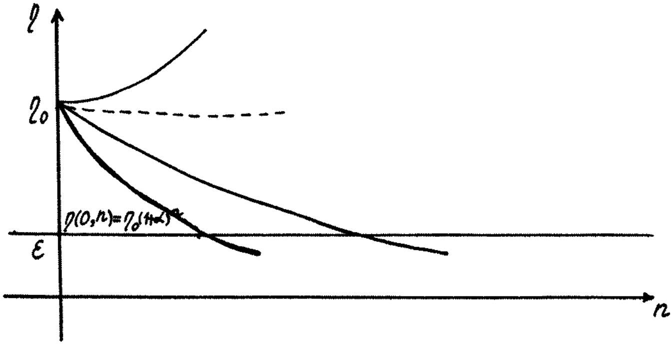

Рис. I

Отметим при этом, что если $\ln\eta_0+r(\xi_0)\leq 0$, то $\frac{\partial f}{\partial y}(\xi_0,y)<0$ при всех $y>1$ и, следовательно, $\eta(\xi_0,n)$ монотонно убывает по n. Поэтому для оптимального значения ξ_0^*, удовлетворяющего уравнению (38), график $\eta(\xi_0^*,n)$ пересекает прямую $\eta=\varepsilon$ лишь один раз, так как

$$\ln\eta_0+r(\xi_0^*)=-\frac{B\cdot\xi_0^*}{(1+\alpha)\ln(1+\alpha)}\leq 0.$$

ПРИМЕР. Пусть $\eta_0=\frac{9}{16}=0{,}5625, \alpha=1, B=0$. Тогда уравнение (38) имеет вид $\ln\eta_0+x\ln p(x)=0$ и его единственное положительное решение – число ξ_0 = 0,28126504. Если ε = 0,5, то $f(\xi_0,n)=\varepsilon$ при n^* = 0,48974812, следовательно, оптимальным целым n является $n=[n^*]+1=1$. Действительно, если выбрать $\xi_0^{(1)}$ = 0,58024697, то $\gamma_0=\xi_0^{(1)}\cdot\eta_0^2$ = 0,18359375 и $\eta_1=\eta_0^2+\gamma_0=0{,}5=\varepsilon$. Если же выбрать $\xi_0^{(2)}$ = 0,5454137, то $\gamma_0=\xi_0^{(2)}\cdot\eta_0^2$ = 0,17259445 и $\eta_1=\eta_0^2+\gamma_0$ = 0,4890007. Тогда на втором шаге $\gamma_1=2\xi_0^{(2)}\cdot\eta_1^2$ = 0,26087396 и $\eta_2=\eta_1^2+\gamma_1$ = 0,49999564 $\approx\varepsilon$. Трудоемкость же двухшагового счета (даже выполнения первого его шага) в данном случае больше, чем одношагового.

Если же ε = 0,4, то $f(\xi_0,n)=\varepsilon$ при n^* = 1,05753, значит, мы можем заключить, что n_{opt} равно либо $[n_*]=1$, либо $[n_*]+1=2$. Нетрудно проверить, что если взять $\xi_0^{(1)} = 0{,}2641975$, то $\gamma_0 = \xi_0^{(1)} \cdot \eta_0^2 \doteq 0{,}08359374$, а $\eta_1 = \eta_0^2 + \gamma_0 = 0{,}39999999 \approx \varepsilon$. При этом $\ln(\eta_0/\gamma_0) = 1{,}9064229$. Если же положить $\xi_0^{(2)} = 0{,}4497387$, то $\gamma_0 = \xi_0^{(2)} \cdot \eta_0^2 = 0{,}1423014$ и $\eta_1 = \eta_0 + \gamma_0 = 0{,}45870639 > \varepsilon$; далее, $\gamma_1 = 2 \cdot \xi_0^{(2)} \cdot \eta_1^2 = 0{,}18926043$ и $\eta_2^2 = \eta_1^2 + \gamma_1 = 0{,}39967198 \approx \varepsilon$. Однако $\ln\frac{\eta_0}{\gamma_0} + \ln\frac{\eta_1}{\gamma_1} = 2{,}2597380$, так что $n_{opt} = 1$.

Рассмотрим теперь случай (ii), т.е. предположим, что $\eta_0 > \varepsilon \geq \rho^{1/\alpha}$. В этом случае мы должны решать задачу (17) при ограничениях

$$\left.\begin{aligned} &\varepsilon < \eta_\ell = \rho \cdot \eta_{\ell-1} + \gamma_{\ell-1}, \; \ell = 1,2,\dots,n-1, \\ &\eta_n = \rho \cdot \eta_{n-1} + \gamma_{n-1} \leq \varepsilon. \end{aligned}\right\} \tag{18''}$$

Очевидно, существует $n_0 \in N$, для которого выполнены неравенства

$$\rho^{n_0} \cdot \eta_0 < \varepsilon \leq \rho^{n_0 - 1} \cdot \eta_0 . \tag{39}$$

Построим при фиксированном $n \geq n_0$ и заданном η_0 последовательность $\hat{\gamma}^{(n)} = \{\hat{\gamma}_\ell\}$ по рекуррентным формулам

$$\left.\begin{aligned} &\hat{\gamma}_\ell = \hat{\xi} \cdot \rho \cdot \hat{\eta}_\ell, \; \hat{\eta}_{\ell+1} = \rho \cdot \hat{\eta}_\ell + \hat{\gamma}_\ell = (1+\hat{\xi}) \cdot \rho \cdot \hat{\eta}_\ell, \\ &\ell = 0,1,\dots, \end{aligned}\right\} \tag{40}$$

где $\hat{\eta}_0 = \eta_0$, а $\hat{\xi} = \frac{1}{\rho}\sqrt[n]{\frac{\varepsilon}{\eta_0}} - 1 > 0$. Покажем, что при всяком $n \geq n_0$ последовательность $\hat{\gamma}^{(n)}$ принадлежит множеству Γ_n таких последовательностей $\gamma = \{\gamma_\ell\} \in \Gamma$, которые обладают следующим свойством: если построить последовательность $\{\eta_\ell\}$ по формулам $\eta_{\ell+1} = \rho \cdot \eta_\ell + \gamma_\ell, \ell = 0,1,\dots$, то n - первый номер, для которого $\eta_n \leq \varepsilon$. В самом деле, $\hat{\eta}_{\ell+1} < \hat{\eta}_\ell$, так как $(1+\hat{\xi}) \cdot \rho = \sqrt[n]{\frac{\varepsilon}{\eta_0}} < 1$ и, следовательно, последовательность $\{\hat{\eta}_\ell\}$ монотонно убывает. Отсюда также следует выполнение неравенства $\hat{\gamma}_\ell < \hat{\eta}_\ell, \ell = 0,1,\dots$ Тогда, принимая во внимание выражение для $\hat{\xi}$, можем заключить, что для последовательности $\{\hat{\eta}_\ell\}$ справедливы соотношения

$$\left.\begin{aligned} &\max\{\varepsilon, \hat{\gamma}_\ell\} < \hat{\eta}_\ell = \rho \cdot \hat{\eta}_{\ell-1} + \hat{\gamma}_{\ell-1}, \; \ell = 1,2,\dots,n-1, \\ &\hat{\eta}_n = \rho \cdot \hat{\eta}_{n-1} + \hat{\gamma}_{n-1} = \varepsilon, \end{aligned}\right\}$$

которые и означают, что $\hat{\gamma}^{(n)} \in \Gamma_n$.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. При $n < n_0$ множества Γ_n пусты. В самом деле, определив для произвольной последовательности $\gamma \in \Gamma$ параметры ξ_ℓ по формуле

$$\xi_\ell = \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\gamma_\ell}{\eta_\ell}, \ \ell = 0, 1, \ldots, \tag{41}$$

получим соотношение $\eta_\ell = \rho^\ell \cdot \eta_0 \cdot \prod_{i=0}^{\ell} (1 + \xi_i)$, которое с учетом (39) показывает, что $\eta_\ell > \varepsilon$ при $\ell \leq n_0 - 1$.

ЛЕММА 6. При каждом $n \geq n_0$ инфимум

$$\inf_{\gamma \in \Gamma_n} \zeta(\gamma, \eta_0, \varepsilon) = \inf_{\gamma \in \Gamma_n} \sum_{\ell=0}^{n-1} \left(\ln \frac{\eta_\ell}{\gamma_\ell} + B \right) \tag{42}$$

достигается на последовательности $\hat{\gamma}^{(n)}$, определяемой соотношениями (40).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассуждая так же, как в доказательстве леммы 2, легко показать, что в задаче (42) в качестве допустимых можно оставить лишь такие последовательности $\gamma = \{\gamma_\ell\} \in \Gamma_n$, для которых $\eta_n = \varepsilon$. Тогда, с учетом обозначений (41), можем переписать задачу (42) в виде

$$\ln \frac{\eta_0}{\varepsilon} + \sum_{\ell=0}^{n-1} \ln \frac{1 + \xi_\ell}{\xi_\ell} + B \cdot n \longrightarrow \inf_{\{\xi_\ell\} > 0} \tag{43}$$

при условии

$$\rho^n \cdot \eta_0 \cdot \prod_{\ell=0}^{n-1} (1 + \xi_0) = \varepsilon.$$

Используя, как и при доказательстве леммы 2, стандартную технику множителей Лагранжа, получим, что функция цели в задаче (43) принимает минимальное значение в точке $(\xi_0, \ldots, \xi_{n-1})$, координаты которой равны

$$\xi_0 = \xi_1 = \ldots = \xi_{n-1} = \hat{\xi} = \frac{1}{\rho} \sqrt[n]{\varepsilon / \eta_0} - 1.$$

Лемма доказана.

Теперь, аналогично тому, как это было проделано при рассмотрении случая (i), сводим задачу (17)-(18) к задаче

$$\ln \frac{\eta_0}{\varepsilon} + n \cdot \left[\ln \frac{1 + \xi(n)}{\xi(n)} + B \right] \longrightarrow \inf_{n \geq n_0}, \tag{44}$$

где $\xi(n) = \frac{1}{\rho} \sqrt[n]{\frac{\varepsilon}{\eta_0}} - 1$. Для отыскания решения этой задачи рассмотрим функцию $\mathcal{F} : R_+ \longrightarrow R_+$, определенную формулой

$$\mathcal{F}(n) = n \cdot \left[\ln \frac{1 + \xi(n)}{\xi(n)} + B \right]$$

для произвольного вещественного n, большего, чем $\bar{n}_0 = \ln\frac{\varepsilon}{\eta_0} / \ln\rho$. Здесь функция $\xi : R_+ \longrightarrow R_+$ задана в виде

$$\xi(n) = \frac{1}{\rho}\cdot\left(\frac{\varepsilon}{\eta_0}\right)^{\frac{1}{n}} - 1, \tag{45}$$

Найдем первую производную функции $\mathcal{F}(n)$:

$$\mathcal{F}'(n) = B + \ln\frac{1+\xi(n)}{\xi(n)} - \frac{n\cdot\xi'(n)}{\xi(n)\cdot(1+\xi(n))} =$$

$$= B + \ln\frac{1+\xi(n)}{\xi(n)} + \frac{1}{\rho}\cdot\frac{\left(\frac{\varepsilon}{\eta_0}\right)^{\frac{1}{n}}\cdot\ln\left(\frac{\varepsilon}{\eta_0}\right)^{\frac{1}{n}}}{\xi(n)\cdot(1+\xi(n))}.$$

Как следует из (45), $\frac{1}{\rho}\cdot\left(\frac{\varepsilon}{\eta_0}\right)^{1/n} = 1+\xi(n)$ и $\ln\left(\frac{\varepsilon}{\eta_0}\right)^{1/n} = \ln(1+\xi(n)) + \ln\rho$. Поэтому, приравнивая $\mathcal{F}'(n)$ к нулю, получаем уравнение, аналогичное полученному в [5], именно

$$\xi\ln\xi = B\cdot\xi + (1+\xi)\ln(1+\xi) + \ln\rho, \tag{46}$$

для определения параметра $\bar{\xi} = \xi(\bar{n})$, отвечающего стационарной точке $\bar{n} \in R_+$. Это уравнение имеет единственное решение $\bar{\xi} > 0$, ибо функция

$$\tilde{\mu}(\xi) = B\cdot\xi + (1+\xi)\ln(1+\xi) - \xi\ln\xi + \ln\rho$$

монотонно возрастает и стремится к $+\infty$ при $\xi \to +\infty$, а $\lim\limits_{\xi\to 0+0}\tilde{\mu}(\xi) = \ln\rho < 0$. Далее,

$$\mathcal{F}''(n) = -\frac{\xi'(n)}{\xi(n)(1+\xi(n))} - \frac{\ln\varepsilon/\eta_0}{n^2\cdot\xi(n)} - \frac{\ln\varepsilon/\eta_0\cdot\xi'(n)}{n\cdot\xi^2(n)} =$$

$$= -\frac{\ln(\varepsilon/\eta_0)}{n^2\cdot\xi(n)} - \frac{\xi'(n)}{\xi(n)}\cdot\left[\frac{1}{1+\xi(n)} + \frac{\ln(1+\xi(n)) + \ln\rho}{\xi(n)}\right] =$$

$$= -\frac{1}{n\cdot\xi(n)}\cdot\left[\ln(1+\xi(n)) + \ln\rho\right] + \frac{1}{n\cdot\xi(n)}\cdot(1+\xi(n)) \times$$

$$\times\left[\frac{1}{1+\xi(n)} + \frac{\ln(1+\xi(n)) + \ln\rho}{\xi(n)}\right]\cdot\left[\ln(1+\xi(n)) + \ln\rho\right] =$$

$$= \frac{1+\xi(n)}{n\cdot\xi^2(n)}\cdot\left[\ln(1+\xi(n)) + \ln\rho\right]^2 \geqslant 0$$

для любого $n \geq \overline{n}_0$. Из этой формулы и уравнения (46) следует, что $\mathcal{F}''(\overline{n}) > 0$. Значит, функция $\mathcal{F}(n)$, будучи выпуклой, достигает своего минимального значения в точке $\overline{n}$, которая однозначно определяется величиной $\overline{\xi} = \xi(\overline{n})$ – решением уравнения (46), по формуле (45). Наконец, с помощью точки $\overline{n}$ можно определить решение n^* исходной задачи (44). Именно,

$$n^* = \left[\frac{\ln(\varepsilon/\eta_0)}{\ln(1+\overline{\xi}) + \ln \rho}\right] \quad \text{или} \quad n^* = \left[\frac{\ln(\varepsilon/\eta_0)}{\ln(1+\overline{\xi}) + \ln \rho}\right] + 1$$

в зависимости от того, на каком из этих двух натуральных чисел функция $\mathcal{F}(n)$ принимает меньшее значение; здесь $[z]$ – целая часть вещественного z.

Теперь выясним, как ведет себя величина $\gamma_0 = \xi_0 \cdot \rho \cdot \eta_0$ в зависимости от $\rho \in (0,1)$ при фиксированной η_0; здесь $\xi_0 > 0$ – единственный положительный корень уравнения (46), в котором $B = const > 0$. Для этого исследуем поведение величины $R(\rho) = \xi_0(\rho) \cdot \rho$. Ясно, что $\xi_0(\rho) \to 0$ при $\rho \to 1-0$ и $\xi(\rho) \to +\infty$ при $\rho \to 0+0$. Следовательно, $R(\rho) \to 0$ при $\rho \to 1-0$. Пользуясь теоремой о неявной функции, выразим из уравнения (46), дифференцируя его по ρ, величину производной $\dfrac{d\xi_0(\rho)}{d\rho}$:

$$\xi_0'(\rho) = -1/(\rho \cdot A), \tag{47}$$

где $A = \ln\left(1 + \dfrac{1}{\xi_0(\rho)}\right) + B$. Найдем теперь производную

$$\frac{dR}{d\rho}(\rho) = R'(\rho) = \xi_0(\rho) + \rho \cdot \xi_0'(\rho) = \xi_0 - \frac{1}{A} = \frac{A \cdot \xi_0 - 1}{A}. \tag{48}$$

Отсюда следует, что $R'(\rho) = 0$ при $A\xi_0 = 1$, т.е. в случае выполнения равенства

$$\varkappa(\xi_0) \equiv \xi_0 \cdot \ln\left(1 + \frac{1}{\xi_0}\right) + B \cdot \xi_0 - 1 = 0.$$

Это уравнение имеет ровно один корень $\overline{\xi}_0$. В самом деле, $\lim\limits_{\xi_0 \to 0+0} \varkappa(\xi_0) = -1$, $\lim\limits_{\xi \to +\infty} \varkappa(\xi_0) = +\infty$. Далее, $\dfrac{d\varkappa(\xi_0)}{d\xi_0} = \ln\left(1 + \dfrac{1}{\xi_0}\right) - \dfrac{1}{1+\xi_0} + B$. Убедимся, что $\ln\left(1 + \dfrac{1}{\xi_0}\right) > \dfrac{1}{1+\xi_0}$ при всех $\xi_0 > 0$. Действительно, $(1+\xi_0)\ln\left(1 + \dfrac{1}{\xi_0}\right) \to +\infty$ при $\xi_0 \to 0+0$ и

$$\lim_{\xi_0 \to +\infty} \frac{\ln(1+1/\xi_0)}{1/(1+\xi_0)} = \lim_{\xi_0 \to +\infty} \left[-\frac{1}{(1+\xi_0)\cdot\xi_0}\right] \Big/ \left[-\frac{1}{(1+\xi_0)^2}\right] = 1.$$

Кроме того, $\frac{d}{d\xi_0}\left[(1+\xi_0)\ln\left(1+\frac{1}{\xi_0}\right)\right]=\ln\left(1+\frac{1}{\xi_0}\right)-\frac{1}{\xi_0}\leq 0$ при любых $\xi_0>0$. Следовательно, $\varkappa'(\xi_0)>0$ при всех $\xi_0>0$, откуда и вытекает единственность решения $\bar{\xi}_0$ уравнения $\varkappa(\xi_0)=0$. Учитывая (47) и (48), заключаем, что функция $R(\rho)$ монотонно возрастает на интервале $(0,\bar{\rho})$, где $\xi_0(\bar{\rho})=\bar{\xi}_0$, и убывает на интервале $(\bar{\rho},1)$. Наконец, нетрудно проверить, что $\lim_{\rho\to 0+0}R(\rho)=0$. Таким образом, графически можно изобразить поведение $R(\rho)$ следующим образом:

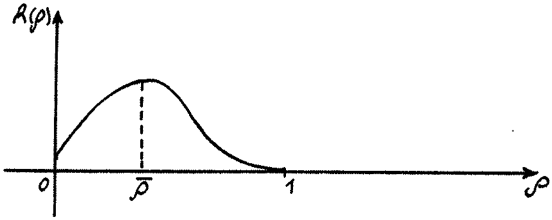

Рис.2

Итак, при $\rho>\bar{\rho}$ с ухудшением параметра линейной оценки скорости сходимости (т.е. при увеличении ρ) приходится уменьшать допустимую погрешность γ_0 шага внутреннего процесса. Это, конечно, ведет к увеличению трудоемкости шага. Значит, при $\rho>\bar{\rho}$ выгоднее с вычислительной точки зрения использовать более точную оценку скорости сходимости при управлении итерационным процессом, что, в общем, согласуется с соображениями здравого смысла. Что касается условия $\rho>\bar{\rho}$, заметим, что при фиксированном η_0 и заданном $\varepsilon<\eta_0$, как было показано выше, число шагов n , которое реализуется в оптимально управляемом итерационном процессе с линейной скоростью сходимости, равно

$$n=\left[\frac{\ln(\varepsilon/\eta_0)}{\ln(\rho+\rho\cdot\xi_0)}\right] \quad \text{или} \quad n=\left[\frac{\ln(\varepsilon/\eta_0)}{\ln(\rho+\rho\cdot\xi_0)}\right]+1,$$

где $\xi_0>0$ - корень уравнения (46). Нам также известно, что $\ln(\rho+\rho\cdot\xi_0)<0$ и $\ln(\rho+\rho\cdot\xi)\to 0-0$ при $\rho\to 1-0$. Следовательно, $n\to+\infty$ при $\rho\to 1-0$. Таким образом, условие $\rho>\bar{\rho}$ выполнено при большом числе шагов, на что в целом и рассчитан разработанный подход.

Наконец, рассмотрим случай (iii), т.е. такой, в котором выполнены соотношения $\eta_0 > \rho^{1/\alpha} > \varepsilon$. Понятно, что для любой последовательности $\gamma \in \Gamma$ найдется номер n_0 такой, что

$$\begin{cases} \rho^{1/\alpha} < \eta_l = \rho \cdot \eta_{l-1} + \gamma_{l-1}, \ l = 1, \dots, n_0 - 1, \\ \eta_{n_0} = \rho \cdot \eta_{n_0-1} + \gamma_{n_0-1} \leq \rho^{1/\alpha}. \end{cases}$$

Если при этом окажется, что $\eta_{n_0} \leq \varepsilon$, то процесс закончен. Если же $\eta_{n_0} > \varepsilon$, то найдется номер $\bar{n}_0 \in N$ такой, что $\bar{n}_0 \geq n_0 + 1$, и выполнены соотношения

$$\begin{cases} \varepsilon < \eta_{l+1} = \eta_l^{1+\alpha} + \gamma_l, \ l = n_0, \dots, \bar{n}_0 - 2, \\ \eta_{\bar{n}_0} = \eta_{\bar{n}_0-1}^{1+\alpha} + \gamma_{\bar{n}_0-1} \leq \varepsilon. \end{cases}$$

Ясно, что в обоих случаях справедливо неравенство $\eta_{n_0} > \rho^{1+1/\alpha}$. Таким образом, для нахождения оптимальной последовательности γ достаточно решить задачу

$$\inf_{\eta \in [\rho^{1+1/\alpha}, \rho^{1/\alpha}]} [S_1(\eta_0, \eta) + S_2(\eta, \varepsilon)], \tag{49}$$

если $\varepsilon \leq \rho^{1+1/\alpha}$; если же $\varepsilon \in (\rho^{1+1/\alpha}, \rho^{1/\alpha})$, то надо решить задачу

$$\inf_{\eta \in [\varepsilon, \rho^{1/\alpha}]} [S_1(\eta_0, \eta) + S_2(\eta, \varepsilon)]. \tag{50}$$

Здесь $S_1(\eta_0, \eta) = \mathcal{F}(n(\eta_0, \eta))$ – оптимальная трудоемкость линейно-сходящегося внешнего процесса, а $S_2(\eta, \varepsilon) = \Phi((1+\alpha)^{n(\eta,\varepsilon)})$ – оптимальная трудоемкость внешнего процесса, сходящегося со сверхлинейной (квадратичной) скоростью. Если для исследования задач (49) и (50), как и ранее, перейдем к вещественному n, то в силу того, что $\bar{\xi} > 0$ – решение уравнения (46) – не зависит от η_0 и η, получим, что оптимальная трудоемкость смешанного процесса равна

$$S_1(\eta_0, \rho^{1/\alpha}) + S_2(\rho^{1/\alpha}, \varepsilon).$$

Соответственно при реализации итеративного процесса в качестве точности γ_k на ($k+1$)-м шаге следует выбрать значение

$$\gamma_k = \begin{cases} \bar{\xi}\cdot\rho\cdot\eta_k, & \text{где } \bar{\xi} \text{ - корень уравнения (46), если } \eta_k > \rho^{1/\alpha}; \\ \bar{\bar{\xi}}\cdot\eta_k^{1+\alpha}, & \text{где } \bar{\bar{\xi}} \text{ - корень уравнения } \ln\eta_k + \xi\ln p(\xi) + \frac{B}{(1+\alpha)\ln(1+\alpha)} = 0, \text{ если } \eta_k \le \rho^{1/\alpha}. \end{cases}$$

§ 3. Доказательство лемм 3 и 5

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ 3. Для того чтобы показать равномерную сходимость по x бесконечного произведения (3I), достаточно показать, что функциональный ряд

$$\ln p(x) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\ln(1+(1+\alpha)^i x)}{(1+\alpha)^{i+1}x}$$

сходится равномерно по x на всяком замкнутом луче $[\delta, +\infty)$, $\delta > 0$. Заметим, что функция $\ln(1+(1+\alpha)^i x)/x$ монотонно убывает на таком луче. Следовательно, для любых $x \geq \delta$ имеет место неравенство

$$\sum_{i=0}^{\infty} \frac{\ln(1+(1+\alpha)^i x)}{(1+\alpha)^{i+1}x} \leq \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\ln(1+(1+\alpha)^i \delta)}{(1+\alpha)^{i+1}\delta},$$

Числовой ряд $\sum_{i=0}^{\infty} \frac{\ln(1+(1+\alpha)^i\delta)}{(1+\alpha)^{i+1}\delta}$ сходится, так как

$$\lim_{i\to\infty} \frac{\ln(1+(1+\alpha)^{i+1}\cdot\delta)(1+\alpha)^i\cdot\delta}{(1+\alpha)^{i+2}\cdot\delta\cdot\ln(1+(1+\alpha)^i\delta)} = \frac{1}{1+\alpha} < 1.$$

Таким образом, равномерная сходимость бесконечного произведения $p(x)$ для $x \geq \delta$, $\delta > 0$, доказана. Далее, заметим, что

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{\ln(1+(1+\alpha)^i x)}{(1+\alpha)^{i+1}x}\right) = -\frac{\ln(1+(1+\alpha)^i x)}{(1+\alpha)^{i+1}x^2} + \frac{1}{(1+\alpha)\cdot x\cdot(1+(1+\alpha)^i x)}.$$

Но, как следует из доказанного выше, ряд $-\sum_{i=0}^{\infty} \frac{\ln(1+(1+\alpha)^i x)}{(1+\alpha)^{i+1}x^2}$ сходится равномерно по x при $x \geq \delta$, $\delta > 0$, а ряд

$\sum\limits_{i=0}^{\infty} \frac{1}{(1+\alpha)x\cdot(1+(1+\alpha)^i x)}$ сходится равномерно по x на том же луче в силу оценки

$$\frac{1}{(1+\alpha)\cdot x(1+(1+\alpha)^i x)} \leq \frac{1}{(1+\alpha)\cdot \delta\cdot(1+(1+\alpha)^i\delta)},\ i=0,1,\dots,$$

имеющей место для любого $x \geqslant \delta$. Следовательно, функциональный ряд

$\sum\limits_{i=0}^{\infty} \frac{d}{dx}\left(\frac{\ln(1+(1+\alpha)^i x)}{(1+\alpha)^{i+1}\cdot x}\right)$ на луче $x \geqslant \delta,\ \delta > 0$, сходится равномерно по x. Поэтому функция $p(x)$ непрерывно дифференцируема при $x > 0$, и при этом справедливо равенство

$$[\ln p(x)]'_x = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{d}{dx}\left(\frac{\ln(1+(1+\alpha)^i x)}{(1+\alpha)^{i+1}\cdot x}\right).$$

Для того чтобы доказать равномерную по x сходимость бесконечного произведения (32), достаточно показать, что функциональный ряд

$$\ln\tilde{p}(x) = \sum_{i=0}^{\infty} \ln\left(\frac{1+(1+\alpha)^i x}{(1+\alpha)^i x}\right) \qquad (51)$$

равномерно по x сходится на каждом замкнутом луче $[\delta,+\infty)$, $\delta > 0$. Так как при $x > 0$ имеют место неравенства

$$\ln\frac{1+(1+\alpha)^i\cdot x}{(1+\alpha)^i\cdot x} = \ln\left(1+\frac{1}{(1+\alpha)^i x}\right) \leq \frac{1}{(1+\alpha)^i x},\ i=0,1,\dots,$$

а функциональный ряд $\sum\limits_{i=0}^{\infty} \frac{1}{(1+\alpha)^i x}$ сходится равномерно по x на любом замкнутом луче $[\delta,+\infty)$, $\delta > 0$, то ряд (51), а вместе с ним и бесконечное произведение (32) сходятся равномерно по x при $x \geqslant \delta$, $\delta > 0$. Ввиду равномерной сходимости ряда $-\sum\limits_{i=0}^{\infty} \frac{1}{(1+(1+\alpha)^i\cdot x)\cdot x}$ при $x \geqslant \delta,\ \delta > 0$, функция $\tilde{p}(x)$ непрерывно дифференцируема на интервале $(0,+\infty)$ и при этом выполнено равенство

$$(\ln\tilde{p}(x))'_x = -\sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{(1+(1+\alpha)^i\cdot x)\cdot x}. \qquad (52)$$

Далее, так как справедливо соотношение

$$x\ln p(x) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\ln(1+(1+\alpha)^i\cdot x)}{(1+\alpha)^{i+1}}, \qquad (53)$$

а функциональный ряд

$$\sum_{i=0}^{\infty} \frac{d}{dx}\left(\frac{\ln(1+(1+\alpha)^i x)}{(1+\alpha)^{i+1}}\right)=\sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{(1+\alpha)(1+(1+\alpha)^i x)}$$

сходится равномерно по x на всяком замкнутом луче $[\delta,+\infty)$, $\delta > 0$, то отсюда вытекает равенство

$$(x \ln p(x))'_x = -\sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{(1+\alpha)(1+(1+\alpha)^i x)}, \; x > 0. \qquad (54)$$

Но из (52) и (54) следует (33). Лемма доказана.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ 5. Для того чтобы показать выпуклость функции $f(\xi_0, y)$ по y, достаточно показать выпуклость по y функции $[-\xi_0 \cdot y \cdot \ln p(\xi_0, y)]$. Дифференцируя дважды равенство (53) и учитывая равномерную по x сходимость на любом замкнутом луче $[\delta,+\infty)$, $\delta > 0$, функциональных рядов

$$\sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{(1+\alpha)(1+(1+\alpha)^i x)} \quad \text{и} \quad \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(1+\alpha)^{i-1}}{(1+(1+\alpha)^i x)^2},$$

получим, что

$$[-\xi_0 \cdot y \cdot \ln p(\xi_0 \cdot y)]''_{yy} = \xi_0^2 \cdot \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(1+\alpha)^{i-1}}{(1+(1+\alpha)^i \cdot \xi_0 \cdot y)^2} > 0$$

при любом $y \geq 1$. Лемма доказана.

Литература

I. Перфилов С.Н., Хабибуллин Р.Ф. К вопросу об оптимальности итерационных процессов // Исследования по прикладной математике. - Казань. - 1979. - Вып.6. - С.41-50.

2. Ульм С. Методы декомпозиции для решения задач оптимизации.- Таллин:Валгус, 1979.

3. Калашникова Н.И. Об оптимизации управления точностью в двухуровневом процессе // Оптимизация. - 1982. - Вып.29(46). - С.5-21.

4. Калашникова Н.И. Управление точностью выполнения шага в методе нагруженного функционала// Оптимизация. - 1982. - Вып. 30(47). - С.115-127.

5. Суханов В.А. Численные методы решения конечномерных задач оптимизации. - Барнаул: изд. Алтайск. гос. ун-та, 1982.

6. Суханов В.А. Получение оптимального алгоритма в задачах типа "итерация в итерации" для двухступенчатых итерационных процессов // Моделирование и оптимизация структурных систем. - Барнаул: изд. Алтайск. гос. ун-та, 1984. - С.92-99.
7. Калашников В.В., Калашникова Н.И. Управление точностью выполнения шага в методе Ньютона для решения нелинейной задачи дополнительности // Оптимизация. - 1988. - Вып.43(60). - С.27-40.

Поступила в ред.-изд. отдел
25.10.1988 г.