Выпуск 43(60) ОПТИМИЗАЦИЯ 1988 г.

Модели динамики и равновесия

УДК 519.86

ТЕОРЕМЫ О РАВНОВЕСИЯХ В МОДЕЛЯХ ЭКОНОМИКИ С ДВУМЯ ВИДАМИ ЦЕН

Г.А.Кошевой

1. В рассматриваемых моделях предполагается наличие двух "рынков", на каждом из которых действуют свои цены. На первом - "государственном" цены фиксируются, на другом - "кооперативном" не фиксируются. Предполагается, что производственная система стремится максимизировать прибыль, измеряемую в "кооперативных" ценах. Для согласования производства и потребления в таких экономиках, наряду с введением "кооперативных" цен, используется механизм количественных ограничений на потребляемые объемы товаров по "государственным" ценам [1]. В работе доказываются теоремы существования равновесий при различных предположениях относительно механизма сосуществования двух "рынков".

2. Экономика $\mathcal{E}^{I,II}$ задается в виде набора параметров:

$$\mathcal{E}^{I,II} = \{(X_i^{I}, X_i^{II}, Y_i, \alpha_i, \beta_i, u_i, \omega_i)_{i=1,\dots,n}, q, \mathcal{P}\}.$$

Здесь $N=\{1,2,\dots,n\}$ - множество индексов экономических агентов - участников экономической системы; n - количество участников; q - фиксированный вектор цен ($q \in R_+^{\ell}$); $\mathcal{P}$ - множество "рыночных" цен ($\mathcal{P} \subset R_+^{\ell}$); p - элемент множества $\mathcal{P}$; $L=\{1,2,\dots,\ell\}$ - множество индексов товаров; ℓ - количество товаров.

В модели предполагается наличие двух рынков, на одном рынке товары покупаются по ценам q , а на другом - по ценам p , которые устанавливаются так, чтобы сбалансировать спрос и предложение. Множество товаров $L=\{1,2,\dots,\ell\}$ разобьем на два множества: $K_p=\{k\in L | p_k < q_k\}$, $K'_p = L \setminus K_p$. Остальные параметры модели: Y_i – множество производственных возможностей i-го агента; $Y_i \subset \mathbb{R}^\ell$ – выпуклый компакт; ω_i – вектор начальных запасов i-го агента.

Множество допустимых выпусков в экономике есть

$$Y=\{y\in \mathbb{R}^\ell_+ | y=\sum_{i\in N}(y_i+\omega_i),\ y_i\in Y_i\}.$$

Для каждого i определены функции: $\alpha_i : Y\times\mathcal{P}\times q \to \mathbb{R}^1_+$, $\beta_i : Y \to \mathbb{R}^\ell_+$. С помощью последней вводится многозначное отображение $X^I_i: Y \to 2^{\mathbb{R}^\ell_+}$, $X^I_i(y)=\{x_i\in \mathbb{R}^\ell_+ | x_{ik}\le \beta_{ik}(y)\}$.
Множество $X^I_i(y)$ можно интерпретировать как совокупность таких наборов продуктов, которые оказываются доступными для потребления агенту i по ценам q.

Определим множество X^{II}_i векторов потребления, допустимых i-му агенту по ценам p. Будем считать, что для всех номеров i имеем $X^{II}_i = X^{II}$, т.е. предполагается одинаковая доступность каждому участнику для потребления всех товаров, имеющихся на втором рынке.

Рассмотрим два способа определения X^{II}.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ I. $X^{II}(y,p,q)=\{x^{II}\in \mathbb{R}^\ell_+ |$ если $k\in K_p$, то $x^{II}_k\le\sum_{i\in N}(y_{ik}+\omega_{ik}-\beta_{ik}(y))$, а если $k\in K'_p$, то $x^{II}_k\in\Psi$, где $\Psi\subset \mathbb{R}^{|K'_p|}_+$ – выпуклый компакт, содержащий множество $T=\{x\in \mathbb{R}^{|K'_p|}_+ | x\in H(Y)\cap \mathbb{R}^{|K'_p|}_+\}$.

Это определение описывает ситуацию, в которой на второй рынок поступает оставшаяся часть продуктов от выделения "квот" $\beta_i(y)$. Буквой H обозначается выпуклая оболочка множества.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. $X^{II}=\{x^{II}\in \mathbb{R}^\ell_+ | x^{II}\in\Psi'$, где $\Psi'\subset \mathbb{R}^\ell_+$ – выпуклый компакт, содержащий множество $H(Y)\}$.

Это определение описывает ситуацию, в которой любое количество произведенной продукции может быть куплено по ценам p.

Заметим, что если X^{II} из определения 2, то $X^I(y,p,q)\subset X^{II}$, так как $\sum_{i\in N}\beta_i(y)\le y$.

Набор функций $\{\alpha_i(y,p,q)\}_{i=1,\dots,n}$ является основным денежным доходом, которым агент i обладает в случае суммарного выпуска $y=\sum_{i\in N}(y_i+\omega_i)$, "рыночных" цен p и фиксированных q. Множество допустимых состояний экономики $\mathcal{E}^{I,II}$ при действующих ценах p,q есть

$$Z(p,q)=\{z=(\{x_i^{I}\}_{i\in N},\{x_i^{II}\}_{i\in N},\{y_i\}_{i\in N},p,q)\,|\,(y_i\in Y_i)_{i\in N},$$

$$(x_i^{II}\in X_i^{II})_{i\in N},(x_i^{I}\in X_i^{I}(y,p,q))_{i\in N}\}.$$

Очевидно, что $Z(p,q)\subset\prod_{i=1}^{n}\mathbb{R}_+^{3\ell}$.

Формирование суммарного денежного дохода, которым агент располагает в состоянии z для покупки продуктов, складавается из основного дохода $\alpha_i(y,p,q)$ и дополнительного $\sum_{k\in K_p'}(\beta_{ik}(y)-x_{ik}^{I})(p_k-q_k)$. Таким образом, предполагается, что если реально для потребления i-му агенту необходимо x_{ik}^{I} продуктов, то разницу $\beta_{ik}(y)-x_{ik}^{I}$ он может реализовать по цене p_k, если $k\in K_p'$. В соответствии с этим предположением о поведении участника определим бюджетное отображение $B_i: Z(p,q)\to 2^{Z_i}$ следующим образом:

$$B_i(z)=\{\tilde{z}_i=(\tilde{x}_i^{I},\tilde{x}_i^{II},\tilde{y}_i),\ \tilde{x}_i^{I}\in X_i^{I}(y|\tilde{y}_i),\ \tilde{x}_i^{II}\in X_i^{II},\ \tilde{y}_i\in Y_i\,|\,q\cdot\tilde{x}_i^{I}+p\cdot x_i^{II}\leq$$

$$\leq\alpha_i(y|\tilde{y}_i,p,q)+\sum_{k\in K_p'}(\beta_{ik}(y|\tilde{y}_i)-\tilde{x}_{ik}^{I})(p_k-q_k)\}.$$

Отображение предпочтения агента $P_i: Z(p,q)\to 2^{Z_i}$ задается выражением

$$P_i(z)=\{\tilde{z}_i=(\tilde{x}_i^{I},\tilde{x}_i^{II},y_i),\ \tilde{x}_i^{I}\in X_i^{I}(y|\tilde{y}_i),\ \tilde{x}_i^{II}\in X_i^{II},\ \tilde{y}_i\in Y_i\,|\,(p,\tilde{y}_i)\geq(p,y_i),$$

$$u_i(\tilde{x}_i^{I},\tilde{x}_i^{II})>u_i(x_i^{I},x_i^{II})\},$$

u_i - функция полезности i-го ранга.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. Состояние экономического равновесия есть вектор $\bar{z}\in Z(p,q)$ такой, что $B_i(\bar{z})\cap P_i(\bar{z})\neq\emptyset$,

$$E(\bar{z})=\sum_{i\in N}(\bar{x}_i^{I}+x_i^{II})-y=0.$$

3. Условия существования экономического равновесия.

ПРЕДПОЛОЖЕНИЕ I. а) множества Y_i, X_i^{II} из определения 2 являются непустыми выпуклыми компактами;

б) $\mathcal{P}=\{p\in\mathbb{R}_+^{\ell}\,|\,\sum_{k\in L}p_k=1\}$;

в) функции $\alpha_i(y,p,q)$, $\beta_i(y)$ — непрерывные по совокупности переменных и вогнутые по y ;

г) для каждого $i \in N$ и любого $z \in Z(p,q)$ существуют $(x_i^{*I}, x^{*II}, y_i^*) \in Z_i$ такие, что

$$max(p,q)x_i^{*I} + p \cdot x_i^{*II} < \alpha_i(y|y_i^*,p,q) + \sum_{k \in K_p'} \beta_{ik}(y|y_i^*)(p_k - q_k).$$

Из этого предположения немедленно вытекает, что $X_i^I(y)$ — непустой выпуклый компакт, а также следующая

ЛЕММА I. В экономике $\mathcal{E}^{I,II}$, удовлетворяющей предположению I, отображения B_i являются непрерывными, а множества $B_i(z)$ являются непустыми выпуклыми компактами для всех $z \in Z(p,q) \times \mathcal{P}$.

ПРЕДПОЛОЖЕНИЕ 2 (закон Вальраса). Для любого $z \in Z(p,q) \cdot \mathcal{P}$ выполняется равенство

$$\sum_{i \in N} \alpha_i(y,p,q) = \sum_{i \in N} \sum_{k \in K_p'} \beta_{ik}(y)(q_k - p_k) + \sum_{k \in L} \Big(\sum_{i \in N} y_{ik} + \omega_{ik}\Big) \cdot p_k .$$

ПРЕДПОЛОЖЕНИЕ 3. Функция полезности имеет вид:

$$u_i(x_i^I \cdot x_i^{II}) = w_i(x_i^I + x_i^{II}),$$

где $w_i : R_+^\ell \longrightarrow R_+^1$ — возрастающая.

Это предположение описывает ситуацию, когда предполагается одинаковая полезность товаров, купленных на "государственном" или "кооперативном" рынках.

ЛЕММА 2. Пусть выполняются предположения 2 - 3, тогда если $p_k < q_k$ и $\bar{z}_i \in \underset{\tilde{z}_i \in B_i(z)}{argmax}\, u_i(\tilde{x}_i^I, \tilde{x}_i^{II})$, то $\bar{x}_{ik}^I = 0$.

ТЕОРЕМА I. Пусть выполняются предположения I - 3, u_i — непрерывные, вогнутые, возрастающие, без насыщения. Тогда для любого вектора $q \in R_+^\ell$ существует равновесие в

$$\mathcal{E}^{I,II} = \{(X_i^I(y), X_i^{II}, Y_i, \alpha_i, \beta_i, u_i, \omega_i)_{i \in N}, q, \mathcal{P}\}.$$

Эта теорема описывает ситуацию существования экономического равновесия, когда "кооперативный" рынок не зависит от "государственного" рынка и цен q. Следующая теорема описывает ситуацию существования равновесия, когда на "кооперативный" рынок поступает часть произведенной продукции, оставшаяся от выделения товаров для "государственного" рынка.

ТЕОРЕМА 2. Пусть выполняются предположения Iа),в),г), 2-3, u_i - дважды дифференцируемые, строго вогнутые, возрастающие; без насыщения; $\alpha_i(y,p,q)$ - дифференцируемые по q и однородные, $\alpha_i(y,tp,tq)=t\alpha_i(y,p,q)$; $X^{II}(y,p,q)$ из определения I; $\mathcal{P}=R^\ell_+$. Тогда для любого $q\in R^\ell_+$ существует равновесие в $\mathcal{E}^{I,II}=\{(X^I_i(y),X^{II}_i(y),Y_i,\alpha_i,\beta_i,u_i,\omega_i)_{i\in N},q,\mathcal{P}\}$.

Для доказательства этой теоремы необходима следующая

ЛЕММА 3. Пусть выполняется предположение 2 и существует равновесие в экономике $\mathcal{E}^{I,II}\bar{z}=\{(\bar{x}^I_i)_{i\in N},(\bar{x}^{II}_i)_{i\in N},(\bar{y}_i)_{i\in N},\bar{p},q\}$. Тогда если $\bar{p}_k<\bar{q}_k$, то $\sum_{i\in N}\bar{x}^I_{ik}=0$.

Из этой леммы вытекает, что в условиях теоремы 2 равновесный вектор цен $\bar{p}\geqslant q$.

4. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО леммы 2. Из бюджетного ограничения следует, что потребление i-го участника (x^I_i, x^{II}_i) удовлетворяет неравенству

$$\sum_{k\in L}max(p_k,q_k)\cdot\bar{x}^I_{ik}+p\cdot\bar{x}^{II}_i\leqslant\alpha_i(y,p,q)+\sum_{k\in K_p'}\beta_{ik}(y)(p_k-q_k).$$

Рассмотрим номер k такой, что $p_k<q_k$, и рассмотрим k-й член в сумме слева: $q_k\cdot\bar{x}^I_{ik}+p_k\cdot x^{II}_{ik}=p_k\cdot(q_k/p_k\cdot\bar{x}^I_{ik}+x^{II}_{ik})$. Предположим, что $\bar{z}_{ik}$ - k-я компонента вектора $\bar{z}_i$ и $\bar{x}^{II}_{ik}\neq 0$. Рассмотрим состояние $\tilde{z}_i=(\bar{z}_{i1},\ldots,\tilde{z}_{ik},\ldots,\bar{z}_{i\ell})$ с k-й компонентой $\tilde{z}_{ik}=(0,q_k/p_k\cdot\bar{x}^I_{ik}+\bar{x}^{II}_{ik},\bar{y}_{ik})$. Это состояние, как легко видеть, удовлетворяет бюджетному ограничению, а по предположению 3

$$u_i(\tilde{z}_i)=w_i(\bar{x}^I_{i1}+\ldots+\bar{x}^I_{ik-1}+q_k/p_k\cdot\bar{x}^I_{ik}+\ldots+\bar{x}^{II}_i)>$$
$$>w_i(\bar{x}^I_{i1}+\ldots+\bar{x}^I_{ik-1}+\bar{x}^I_{ik}+\ldots+\bar{x}^{II}_i)=u_i(\bar{z}_i),$$

следовательно, $\bar{z}_i \notin \underset{\bar{z}_i \in B_i(z)}{\operatorname{argmax}}\, u_i(\tilde{z})$, что и завершает доказательство.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО леммы I. Непустота и полунепрерывность сверху следуют из непрерывности функции

$$\sum_{k \in L} \max(p_k, q_k)\cdot x^{I}_{ik} + p\cdot x^{II}_i - \alpha_i(y,p,q) - \sum_{k \in K'_p} \beta_{ik}(y)(p_k - q_k)$$

и предположения Iг). Докажем полунепрерывность снизу. Бюджетное отображение имеет вид

$$B_i(z,p,q) = \{(\tilde{x}^{I}_i, \tilde{x}^{II}_i, \tilde{y}_i) \mid \tilde{x}^{I}_i \in X^{I}_i(y|\tilde{y}_i), \tilde{x}^{II}_i \in X^{II}, y_i \in Y_i,$$

и выполняется

$$\sum_{k \in L}(\max(p_k,q_k)\cdot\tilde{x}^{I}_{ik} + p\cdot\tilde{x}^{II}_i - \alpha_i(y|\tilde{y}_i,p,q) - \sum_{k \in K'_p} \beta_{ik}(y|\tilde{y}_i)(p_k - q_k) \le 0\}.$$

Пусть $p^s \to p^o, (x^{oI}_i, x^{oII}_i, y^o_i) \in B_i(z,p^o,q)$. Рассмотрим множество

$$T_s = \{t \in [0,1] \mid (tx^{oI}_i + (1-t)x^{*I}_i, tx^{oII}_i + (1-t)x^{*II}_i, ty^o_i + (1-t)y^*_i) \in B_i(z,p^s,q)\}.$$

Множество T_s непусто и компактно ($0 \in T_s$). Обозначим через t^s максимальный элемент множества T_s . Последовательность $\{t^s\}$ можно считать сходящейся, и пусть $t = \lim_{s\to\infty} t^s$. Если $t = 1$, тогда последовательность

$$(x^{sI}_i, x^{sII}_i, y^s_i) = (t^s x^{oI}_i + (1-t^s)x^{*I}_i,\ t^s x^{oII}_i + (1-t^s)x^{*II}_i, t^s y^o_i + (1-t^s)y^*_i)$$

является искомой.

Предположим, что $t < 1$, тогда, начиная с некоторого номера, $t^s < 1$. Покажем что в этом случае $\sum_{k \in L}\max(p^s_k, q_k)x^{sI}_{ik} + p^s x^{sII}_i = \alpha_i(y|y^s_i,p^s,q) + \sum_{k \in K'_p}\beta_{ik}(y|y^s)(p^s_k - q_k)$. В самом деле, если $\sum_{k \in L}\max(p^s_k, q_k)x^{sI}_{ik} + p^s x^{sII}_i < \alpha_i(y|y^s_i, p^s, q) + \sum_{k \in K'_p}\beta_{ik}(y|y^s)(p^s_k - q_k)$, тогда положим $\bar{t}^s = t^s + \varepsilon < 1$ и рассмотрим точку

$$(x^{sI}_i, x^{sII}_i, y'_i) = (\bar{t}^s x^{oI}_i + (1-\bar{t}^s)x^{*I}_i,\ \bar{t}^s x^{oII}_i + (1-\bar{t}^s)x^{*II}_i,\ \bar{t}^s y^o_i + (1-\bar{t}^s)y^*_i).$$

По непрерывности функции $\max(p^s,q)x^I_i + p^s x^{II}_i - \alpha_i(y,p^s,q) - \sum_{k \in K'_p}\beta_{ik}(y)(p^s_k - q_k)$ можно выбрать $\varepsilon > 0$ настолько малым, что $(x^{sI'}_i, x^{sII'}_i, y^{s'})$ удовлетворяет

$$\sum_{k\in L} max(p_k^s,q_k)x_{ik}^{sI'}+p^s x^{sII'}-\alpha_i(y|y_i^{s'},p^s,q)-\sum_{k\in K_p'}\beta_{ik}(y|y_i^{s'})(p_k^s-q_k)<0,$$

что противоречит максимальности t^s. Следовательно, при $t<1$

$$0=\lim_{s\to\infty}(max(p^s,q)x_i^{sI}+p^s x_i^{sII}-\alpha_i(y|y_i^s,p^s,q)-\sum_{k\in K_{ps}'}\beta_{ik}(y|y_i^s)(p_k^s-q_k)=$$

$$=max(p^o,q)\bar{x}_i^I+p^o\bar{x}_i^{II}-\alpha_i(y|\bar{y}_i,p^o,q)-\sum_{k\in K_{p^o}'}\beta_{ik}(y|\bar{y}_i)(p_k^o-q_k),$$

где $\bar{y}_i=ty_i^o+(1-t)y_i^*$, $\bar{x}_i^{I,II}=tx_i^{oI,II}+(1-t)x_i^{*I,II}$.

Воспользуемся вогнутостью $\alpha_i(y,p,q),\beta_i(y)$ по y:

$$0=max(p^o,q)\bar{x}_i^I+p^o\bar{x}_i^{II}-\alpha_i(y|\bar{y}_i,p^o,q)-\sum_{k\in K_{p^o}'}\beta_{ik}(y|\bar{y}_i)(p_k^o-q_k)\leq$$

$$\leq t\cdot(max(p^o,q)x_i^{oI}+p^o x_i^{oII}-\alpha_i(y|y_i^o,p^o,q)-\sum_{k\in K_{p^o}'}\beta_{ik}(y|y_i^o)(p_k^o-q_k)+$$

$$+(1-t)\cdot(max(p^o,q)x_i^{*I}+p^o x_i^{*II}-\alpha_i(y|y_i^*,p^o,q)-\sum_{k\in K_{p^o}'}\beta_{ik}(y|y_i^*)(p_k^o-q_k).$$

Учитывая, что второе слагаемое в сумме меньше нуля, получаем

$$max(p^o,q)x_i^{oI}+p^o x_i^{oII}>\alpha_i(y|y_i^o,p^o,q)+\sum_{k\in K_{p^o}'}\beta_{ik}(y|y_i^o)(p_k^o-q_k),$$

что противоречит условию $(x_i^{oI},x_i^{oII},y_i^o)\in B_i(z,p^o,q)$, что и завершает доказательство.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО леммы 3. Пусть $K_p\neq\emptyset$, зафиксируем какой-нибудь номер $k\in K_p$. Тогда по условию существования равновесия $E(\bar{z})=0$, т.е. $\bar{y}_k=\sum_{i\in N}(\bar{y}_{ik}+\bar{\omega}_{ik})=\sum_{i\in N}(\bar{x}_{ik}^I+x_{ik}^{II})$.

Просуммируем по всем i бюджетные ограничения

$$\sum_{k\in L}\bar{x}_{ik}^I\cdot q_k+\sum_{k\in K_p}\bar{x}_{ik}^{II}\cdot p_k+\sum_{k\in K_p'}x_{ik}^{II}\cdot p_k\leq$$

$$\leq\alpha_i(\bar{y}|\bar{y}_i,p,q)+\sum_{k\in K_p'}(\beta_{ik}(\bar{y}|\bar{y}_i)-\bar{x}_{ik}^I)(p_k-q_k)$$

и перенесем в каждом неравенстве $-\sum_{k\in K_p'}\bar{x}_{ik}^I(p_k-q_k)$ в левую часть.

Тогда имеем следующее неравенство:

$$\sum_{i\in N}\sum_{k\in K_p}(\bar{x}^{I}_{ik}\cdot q_k+\bar{x}^{II}_{ik}\cdot p_k)+\sum_{i\in N}\sum_{k\in K'_p}(\bar{x}^{I}_{ik}+\bar{x}^{II}_{ik})\cdot p_k\leq$$

$$\leq\sum_{i\in N}\alpha_i(\bar{y},p,q)+\sum_{i\in N}\sum_{k\in K'_p}\beta_{ik}(\bar{y})(p_k-q_k).$$

Левая часть этого неравенства имеет вид

$$\sum_{k\in K_p}\Big[\sum\bar{x}^{I}_{ik}\cdot q_k+(\bar{y}_k-\sum_{i\in N}\bar{x}^{I}_{ik})\cdot p_k\Big]+\sum_{k\in K'_p}y_k\cdot p_k,$$

а правая, согласно предположению 2,

$$\sum_{i\in N}\alpha_i(\bar{y},p,q)+\sum_{i\in N}\sum_{k\in K'_p}\beta_{ik}(\bar{y})(p_k-q_k)=\sum_{k\in L}y_k\cdot p_k.$$

Таким образом, получаем

$$\sum_{k\in K_p}(\sum_{i\in N}\bar{x}^{I}_{i}\cdot q_k+(\bar{y}_k-\sum_{i\in N}\bar{x}^{I}_{ik})\cdot p_k)\leq\sum_{k\in L}\bar{y}_k\cdot p_k,$$

следовательно, $\sum_{k\in K_p}\sum_{i\in N}\bar{x}^{I}_{ik}(q_k-p_k)\leq 0$, откуда получаем либо $p_k\geq q_k$, либо $\sum_{i\in N}\bar{x}^{I}_{ik}=0$, что и доказывает лемму.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО теоремы I. Идея доказательства в применении леммы Гейла. Определим индивидуальные функции спроса и предложения.

Функция предложения i-го участника определяется, как в случае конкурентного равновесия:

$$\psi^i(p)=\{y_i\in Y_i\mid(p,y_i)=\max_{y\in Y_i}(p,y)\}.$$

Непрерывность и непустота образа очевидны из предположения Iа). Пусть $\Psi(p)=\sum_{i\in N}(\psi^i(p)+\omega_i)$ – совокупное предложение.

Функцию спроса определим, согласно лемме 2, следующим образом:

$$\varphi^i(p)=\{x_i=x^I_i+x^{II}_i\mid x^I_i\in X^I(\Psi(p),p,q),\ x^{II}_i\in X^{II}_i,\ u_i\cdot(x^I_i,x^{II}_i)\geq u_i(\tilde{x}^I_i,\tilde{x}^{II}_i)$$

для любых $\tilde{x}^I_i$, $\tilde{x}^{II}_i$ таких, что $\tilde{x}^I_i+\tilde{x}^{II}_i\in X^I_i(\Psi(p),p,q)\cup X^{II}_i\subset X^{II}$,

$$\sum_{k\in K_p'} p_k\cdot \tilde{x}_{ik}^{I} + \sum_{k\in L} p_k\cdot \tilde{x}_{ik}^{II} \le \alpha_i(\Psi(p),p,q) + \sum_{k\in K_p'} \beta_{ik}(\Psi(p))(p_k-q_k)\}.$$

Функции $\varphi^i(p)$ непрерывные и являются непустым подмножеством в $\bigcup_{i\in N}\bigcup_{p\in\mathcal{P}} B_i(p)$, что следует из леммы I.

Пусть $\Phi(p)=\sum_{i\in N}\varphi^i(p)$ – совокупный спрос.

Выполнение закона Вальраса: просуммируем левые и правые части бюджетных ограничений

$$\sum_{i\in N}\sum_{k\in K_p'} p_k\cdot \tilde{x}_{ik}^{I} + \sum_{i\in N}\sum_{k\in L} p_k\cdot \tilde{x}_{ik}^{II} \le$$

$$\le \sum_{i\in N}\alpha_i(\Psi(p),p,q) + \sum_{i\in N}\sum_{k\in K_p'} \beta_{ik}(\Psi(p))(p_k-q_k).$$

Левая часть имеет вид $\sum_{i\in N}\sum_{k\in K_p'} p_k\cdot \tilde{x}_{ik}^{I} + \sum_{i\in N}\sum_{k\in L} p_k\cdot \tilde{x}_{ik}^{II} = p\cdot\Phi(p)$,

а правая, согласно предположению 2,

$$\sum_{i\in N}\alpha_i(\Psi(p),p,q) + \sum_{i\in N}\sum_{k\in K_p'} \beta_{ik}(\Psi(p))(p_k-q_k) = p\cdot\Psi(p).$$

Таким образом, имеем выполнение закона Вальраса $p\cdot(\Psi(p)-\Phi(p))\ge 0$.

Для применения леммы Гейла надо указать выпуклый компакт Γ, содержащий $\Psi(p)-\Phi(p)$ для любого $p\in\mathcal{P}$.

Легко видеть, что $\Psi(p)\subset Y$, где Y – выпуклый компакт по предположению Iа).

По предположениям Iа–в) существует константа $K>0$ такая, что

$$B_i(p)\subseteq \bar{B}_i(p)=\{(x_i^I,x_i^{II},\psi^i(p))\,|\,(p,x_i^I+x_i^{II}\le K\}.$$

Ограниченность $\bigcup_{p\in\mathcal{P}}\bar{B}_i(p)$ следует из компактности множества $X_i^I(\Psi(p),p,q), X_i^{II}, Y, \mathcal{P}$. Откуда существует выпуклый компакт Φ_0 такой, что

$$\Phi(p)\subseteq \bigcup_{i\in N}\bigcup_{p\in\mathcal{P}} B_i(p)\subseteq \Phi_0.$$

Искомый компакт есть $\Gamma=Y-\Phi_0$.

Таким образом, по лемме Гейла существует $v^*=y^*-x^*\ge 0$, где $y^*\in\Psi(p^*)$, $x^*\in\Phi(p^*)$. Равенство $y^*=x^*$ вытекает из ненасыщаемости u_i и выполнения закона Вальраса в форме равенства.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО теоремы 2. Рассмотрим симплекс цен $S_M = \{p \in \mathbb{R}^\ell_+ | \sum_{k\in L} p_k = M\}$ и покажем, что цены $(p\in S_M, -q)$ эквивалентны ценам $(\tilde{p} \in S_1,\ q/M)$.

Действительно, разделим обе части бюджетного ограничения

$$\max(q,p)\cdot x_i^I + p\cdot x_i^{II} \le \alpha_i(y,p,q) + \sum_{k\in K_p'} \beta_{ik}(y)(p_k - q_k)$$

на M. Тогда получим

$$\max\left(\frac{q}{M},\frac{p}{M}\right)\cdot x_i^I + \frac{p}{M}\cdot x_i^{II} \le \frac{1}{M}\alpha_i(y,p,q) + \sum_{k\in K_p'} \beta_{ik}(y)\left(\frac{p_k}{M} - \frac{q_k}{M}\right),$$

используя однородность $\frac{1}{M}\alpha_i(y,p,q) = \alpha_i\left(y,\frac{p}{M},\frac{q}{M}\right)$, получаем

$$\max\left(\frac{q}{M},\tilde{p}\right)\cdot x_i^I + \tilde{p}\cdot x_i^{II} \le \alpha_i\left(y,\tilde{p},\frac{q}{M}\right) + \sum_{k\in K_p'} \beta_{ik}(y)\left(\tilde{p}_k - \frac{q_k}{M}\right).$$

Таким образом, условие $M\to\infty$ эквивалентно $q\to 0$, поэтому можно считать, что $p\in S_1$ и $q \le (\varepsilon,\dots,\varepsilon)$.

Функции предложения определяются, как в теореме I:

$$\psi^i(p) = \{y_i \in Y_i | (p,y_i) = \max_{y\in Y_i}(p,y)\},\quad \Psi(p) = \sum_{i\in N}(\psi^i(p) + \omega_i).$$

Функции спроса определим сначала в области $\tilde{\mathcal{P}} = \{p\in S_1 | p \ge q\}$, а в область $S_1 \setminus \mathcal{P}$ продолжим по непрерывности:

$$\varphi^i(p) = \{x^i = (x_i^I, x_i^{II}) | x_i^I \in X_i^I(\Psi(p),p,q),\ x_i^{II}\in X_i^{II}(\Psi(p)), p\in\tilde{\mathcal{P}}, u_i(x_i^I,x_i^{II}) \ge u_i(\tilde{x}_i^I,\tilde{x}_i^{II})$$

для любых

$$\tilde{x}_i^I \in X_i^I(\Psi(p),p,q),\ \tilde{x}_i^{II}\in X^{II}: \sum_{k\in K_p'} p_k\cdot \tilde{x}_{ik}^I +$$
$$+\sum_{k\in L} p_k\cdot\tilde{x}_{ik}^{II} \le \alpha_i(\Psi(p),p,q) + \sum_{k\in K_p} \beta_{ik}(\Psi(p)(p_k - q_k))\}.$$

В области $\tilde{\mathcal{P}}$ потребительские множества $X^{II}(\Psi(p),p,q)$ из определения I совпадают с X^{II} из определения 2, так как $K_p = \varnothing$ для $p\in\tilde{\mathcal{P}}$. Поэтому функции спроса в этой области цен совпадают. Продолжим функцию спроса в область $S_1 \setminus \tilde{\mathcal{P}}$. Если $\bar{p} \in S_1 \setminus \{p\in\mathbb{R}^\ell_+ | p \ge q\}$, тогда по лемме 3 $K_{\bar{p}} = \varnothing$ и для любого $k \in K_{\bar{p}}$ выполняется $\sum_{i\in N} x_{ik}^I = 0$. Рассмотрим $\sum_{i\in N}\beta_{ik}(\bar{y})$. Возможны два случая:

I) $\sum_{i\in N}\beta_{ik}(\bar{y}) > 0$, тогда равновесия не существует, так как на втором рынке K-го продукта

$$\sum_{i\in N}(\bar{y}_{ik}+\omega_{ik}-\beta_{ik}(\bar{y}))\neq\sum_{i\in N}(\bar{y}_{ik}+\omega_{ik}),$$

и баланс невозможен.

2) $\sum_{i\in N}\beta_{ik}(\bar{y})=0$, тогда в равновесии по K-му продукту нет двух рынков и бюджетные ограничения можно рассматривать в виде

$$\sum_{n\in K_p\setminus\{k\}}\max(p_n,q_n)\tilde{x}^{I}_{in}+p\cdot\tilde{x}^{II}_i\leq\alpha_i(\bar{y},p,q)+\sum_{n\in K'_p\cup\{k\}}\beta_{ik}(\bar{y})(p_n-q_n),$$

и в этом случае будем считать $k\in K'_p$.

Если вектор цен лежит в области $S_1\setminus\mathcal{P}$ и выполняется первый случай, тогда равновесия не существует (если второй – тогда предлагаемое ниже продолжение обеспечивает существование равновесия в этой области), поэтому продолжаем функцию в эту область цен так, чтобы она была непрерывной:

$$\varphi^i(p)=\{x^i=(x^I_i,x^{II}_i)\,|\,x^I_i\in X^I_i(\Psi(p),p,q),\,x^{II}_i\in X^{II}_i$$

из определения 2; $u_i(x^I_i,x^{II}_i)\geq u_i(\tilde{x}^I_i,\tilde{x}^{II}_i)\ \forall\tilde{x}^I_i,\tilde{x}^{II}_i\in X^I_i\cup X^{II}_i\subset X^{II}$:

$$\sum_{k\in K_p}p_k\cdot\tilde{x}^{I}_{ik}+\sum_{k\in L}p_k\cdot\tilde{x}^{II}_{ik}\leq\alpha_i(\Psi(p),p,q)+\sum_{k\in K'_p}\beta_{ik}(\Psi(p)(p_k-q_k))\}.$$

Непрерывность и непустота $\varphi^i(p)$ следует из леммы I. Выполнение закона Вальраса проверяется аналогично, как в теореме I. Множество Γ определяется также аналогичным образом. Для завершения доказательства теоремы покажем, что существует ε такое, что для любого $q\leq(\varepsilon,\dots,\varepsilon)$ равновесный вектор цен $\bar{p}\geq\varepsilon$.

Рассмотрим случай $q=0$. Равновесие существует, и из условия строгой вогнутости функций полезности u_i имеем $\bar{p}(0)>(0,\dots,0)$.

Пусть теперь $q\leq(\varepsilon,\dots,\varepsilon)$, равновесие существует по теореме I. Обозначим равновесный вектор цен $\bar{p}(\varepsilon)$. Рассмотрим правые части бюджетных ограничений

$$\alpha_i(\Psi(p),p,q)+\sum_{k\in K'_p}\beta_{ik}(\Psi(p)(p_k-q_k))$$

и оценим их разность при $q=(\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_\ell)\le(\varepsilon,\dots,\varepsilon)$, $q=(0,\dots,0)$, $p\in S_1$:

$$|\alpha_i(\Psi(p),p,q)+\sum_{k\in K_p'}\beta_{ik}(\Psi(p))(p_k-q_k)-\alpha_i(\Psi(p),p,0)-\sum_{k\in L}\beta_{ik}(\Psi(p))\cdot p_k|\le$$

$$\le|\alpha_i(\Psi(p),p,q)-\alpha_i(\Psi(p),p,0)|+|\sum_{k\in K_p'}\beta_{ik}(\Psi(p))\cdot\varepsilon|+|\sum_{k\in K_p}\beta_{ik}(\Psi(p))\cdot\varepsilon|\le C\cdot\varepsilon,$$

где константа C не зависит от ε (по дифференцируемости $\alpha_i(y,p,q)$). По теореме о неявной функции и в силу дифференцируемости u_i имеем $|\bar p(\varepsilon)-\bar p(0)|\le C_1\cdot\varepsilon$ [2]. Откуда следует, что можно выбрать $\varepsilon>0$ таким малым, чтобы : $\bar p(\varepsilon)>\varepsilon$, что и завершает доказательство.

Литература

I. Макаров В.Л., Васильев В.А., Козырев А.Н., Маракулин В.М. О некоторых проблемах и результатах современной математической экономики// Оптимизация. - I982. - Вып.30(47). - С.5-86.

2. Dierker E. Topological methods in Walrasian Economics // Lecture Notes in Economics and Mathematicsl Systems. - N.Y., I974.

Поступила в ред.-изд. отдел
I.II.87 г.