Выпуск 43(60) ОПТИМИЗАЦИЯ 1988 г.

МОДЕЛИ ДИНАМИКИ И РАВНОВЕСИЯ

УДК 330.115

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ В МАГИСТРАЛЬНЫХ ТЕОРЕМАХ

А.Я.Заславский

1. Пусть R^n_+ - конус элементов с неотрицательными координатами пространства R^n. Для $x \in R$, $r > 0$ положим

$$\|x\| = \sum_i |x_i|; \quad B(x,r) = \{y \in R^n : \|x-y\| \le r\};$$
$$K = \{y \in R^n : y_i > 0 \ (i = 1,\dots,n)\}.$$

Через Π обозначим совокупность всех непустых компактных подмножеств конуса R^n_+, в которой вводится хаусдорфова метрика уклонений, обозначаемая через d. Для x, $y \in R^n_+ \setminus \{0\}$ положим $\rho(x,y) = \|\|x\|^{-1}x - \|y\|^{-1}y\|$. Символом $\mathfrak{A}$ обозначим совокупность суперлинейных нормальных отображений $a : R^n_+ \to \Pi$, имеющих замкнутый график, таких, что $a(1,1,\dots,1) \cap K \ne \emptyset$ [1,2]. В пространстве $\mathfrak{A}$ вводится метрика, в которой "расстоянием" между a, b является $d(G(a), G(b))$, где

$$G(a) = \{(x,y) : x \in R^n_+, \|x\| \le 1, y \in a(x)\}.$$

С каждым $a \in \mathfrak{A}$ связываются неймановский темп роста $\alpha(a)$, $\|a\| = \sup\{\|y\| : (x,y) \in G(a)\}$ и двойственное отображение $a' : R^n_+ \to \Pi$. Заметим, что функция $\alpha : \mathfrak{A} \to R$ непрерывна. Положительной границей замкнутого нормального в смысле R^n телесного подмножества $h \subset R^n_+$ называется множество $\partial^+ h = \{x \in h : \lambda x \notin h \ (\lambda > 1)\}$ [2].

Пусть $T \in \{1,2,\dots\} \cup \{\infty\}$. Моделью называется последовательность $\{a_t : t \in \{0,1,\dots\},\ t < T\} \subset \mathfrak{A}$.

Рассмотрим отображение $a \in \mathfrak{A}_1$, имеющее состояние равновесия $(\alpha(a), (X, \alpha(a)X), p)$, для которого $X, p \in K$, $\|X\| = 1$, и магистраль $M_\alpha = \{\lambda X : \lambda \ge 0\}$ [1]. Для $\delta > 0$ положим

$W(\delta)=\{b\in \mathfrak{A} : d(G(b),G(a))\le \delta\}$. Обозначим через G замыкание

$$\bigcup_{t=1}^{\infty} \alpha(a)^{-t}a^t(X).$$

По теореме 14.8 [I] $\alpha(a)^{-t}a^t(x)\to\lambda(x)G$ при $t\to\infty$ ($x\in K$, $\lambda(x)>0$). Нетрудно видеть, что функция $\lambda: K\to R$ монотонна, положительно однородна и непрерывна.

Пусть $T,K\in\{1,2,\dots\}$, $\gamma>1$. Траектория $(x_t)_{t=0}^{T}$ модели $\{a_t\}_{t=0}^{T-1}$ является (κ,γ) - оптимальной, если для любого $t\in[0,T-\kappa]$ выполняется $\gamma_1 x_{t+\kappa}\in\partial^+(a_{t+\kappa-1}\dots a_t(x_t))$ при некотором $\gamma_1\in[1,\gamma]$. Траектория $(x_t)_{t=0}^{T}$ модели $\{a_t\}_{t=0}^{T-1}$ оптимальна, если $x_T\in\partial^+(a_{T-1}\dots a_0(x_0))$.

Справедливы следующие теоремы.

ТЕОРЕМА I. Пусть $x^0\in K$, $\varepsilon>0$. Тогда существуют $\delta>0$, $\gamma>1$, целые числа $k\ge 1$, $L_i\ge 0$ ($i=1,2$) такие, что $B(x^0,\delta)\subset K$, для всякой (κ,γ)-оптимальной траектории $\{x_t: t=0,\dots,T\}$, $x_0\in B(x^0,\delta)$ произвольной модели $\{a_t: t=0,\dots,T-1\}\subset W(\delta)$ выполняется

$$\rho(x_t,X)\le\varepsilon\ (L_1\le t\le T-L_2).$$

Если $x^0=X$, то $L_1=0$.

ТЕОРЕМА 2. Пусть $x^0\in K$, $\varepsilon>0$. Тогда существуют $\delta>0$, целые числа $L_i\ge 0$ ($i=1,2$) такие, что $B(x^0,\delta)\subset K$, для всякой оптимальной траектории $\{x_t: t=0,\dots,T\}$, $x_0\in B(x^0,\delta)$ произвольной модели $b\in W(\delta)$ выполняется

$$\|\alpha(b)^{-t}x_t-\lambda(x^0)X\|\le\varepsilon\ (L_1\le t\le T-L_2).$$

Если $x^0=X$, то $L_1=0$.

Рассмотрим непрерывные монотонные положительно однородные функции $\varphi_t: R^n_+\to R_+$ ($t=0,1,\dots$) такие, что

$$0<c_2\le\varphi_t(x)\le c_1<\infty\quad (x\in R^n_+,\ \|x\|=1,\ t=0,1,\dots). \tag{I}$$

Пусть $x^0\in K$, точка (x_0,b) принадлежит достаточно малой окрестности (x^0,a), $\mu>0$. Рассмотрим задачу

$$\max \sum_{t=0}^{T} \alpha(b)^{-t} \varphi_t(x_t), \quad x_{t+1} \in b(x_t) (t \in 0,\dots,T-1), \qquad (2)$$
$$\alpha(b)^{-T} x \geq \mu X.$$

В дальнейшем считаем ее имеющей решение. Это справедливо при малых μ.

ТЕОРЕМА 3. Пусть $\varepsilon, \mu > 0$. Тогда существуют $\delta > 0$, $L_1, L_2 \in \{0,1,\dots\}$ такие, что $B(x^0, \delta) \subset K$, при любых $b \in W(\delta)$, $x_0 \in B(x^0, \delta)$ для решения $(x_t)_{t=0}^{T}$ задачи (2) выполняется
$$\rho(x_t, X) \leq \varepsilon (L_1 \leq t \leq T - L_2).$$
Если $x^0 = X$, то $L_1 = 0$.

Отметим, что для линейной модели результат, близкий к теореме 3, приведен в [3].

2. В этом пункте всюду идет речь о траекториях отображения a.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ I. Пусть $x^0 \in K$. Тогда для каждого $\varepsilon > 0$ найдутся $\delta > 0$, $L_1, L_2 \in \{0,1,\dots\}$ такие, что для любой оптимальной траектории $\{x_t : t = 0,\dots,T\}$, $x_0 \in B(x^0, \delta)$ модели выполняется
$$\| \alpha(a)^{-t} x_t - \lambda(x^0) X \| \leq \varepsilon (L_1 \leq t \leq T - L_2).$$

Доказательству предложения I предпошлем несколько лемм. Не ограничивая общности, считаем, что $\alpha(a) = \lambda(x^0) = 1$. Для натурального числа T, числа $\gamma > 1$ положим
$$\mathcal{O}(T, \gamma) = \{\{a^t(x)\} : t \geq T, \gamma^{-1} x^0 \leq x \leq \gamma x^0\}.$$
Непосредственно проверяется справедливость следующего утверждения.

ЛЕММА I. Для любого $\varepsilon > 0$ существуют $\gamma > 1$, $T \in \{1,2,\dots\}$ такие, что $d(h, \sigma) \leq \varepsilon (h \in \mathcal{O}(T, \gamma))$.

Пусть h – замкнутое телесное подмножество R_+^n, $(h - R_+^n) \cap R_+^n = h$. Положим
$$h^i = a^{-i}(\partial + a^i(h)) \cap h \, (i = 1,2,\dots), \quad \chi(h) = \bigcap_i h^i.$$
По предложению I4.6 [I] имеем $\chi(\sigma) = \{X\}$.

Так же, как и лемма I4.I [2], доказывается

ЛЕММА 2. Пусть $\kappa \in \{1,2,\dots\}$, $\varepsilon > 0$. Тогда существуют $\gamma > 1$, $T \in \{1,2,\dots\}$ такие, что

$$h^k \subset (a^{-k}(\partial^+\sigma)\cap\sigma)+B(0,\varepsilon)\;(h\in \mathfrak{A}(T,\gamma)).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО предложения I. Заметим, что

$$a^{-k}(\partial^+\sigma)\cap\sigma \longrightarrow \chi(\sigma)=\{X\} \quad \text{при} \quad k\to\infty.$$

Зафиксируем $\varepsilon>0$. Найдется натуральное число K, при котором $a^{-k}(\partial^+\sigma)\cap\sigma\subset B(X,4^{-1}\varepsilon)$. По лемме 2 существуют $\gamma_0>1$, натуральное число L такие, что

$$h^k \subset (a^{-k}(\partial^+\sigma)\cap\sigma)+B(0,4^{-1}\varepsilon)\subset B(X,2^{-1}\varepsilon)$$

$$(h\in \mathfrak{A}(L,\gamma_0)).$$

Пусть $\{x_t: t=0,\dots,T\}$ – оптимальная траектория модели a, причем $\gamma_0^{-1}x^0\leq x_0\leq\gamma_0 x^0, L\leq t\leq T-k$. Тогда $x_t\in a^{-k}(\partial^+a^k(h))\cap h$, где $h=a^t(x_0)\in\mathfrak{A}(L,\gamma_0)$. Имеем $x_t\in h^k\subset B(X,2^{-1}\varepsilon)$. Так как ε – произвольное положительное число, то предложение I доказано.

СЛЕДСТВИЕ. Пусть Ω – конус, порожденный компактом, содержащимся в K, $\varepsilon>0$. Существуют натуральные числа L_1, L_2 такие, что для любой оптимальной траектории $\{x_t: t=0,\dots,T\}$, $x_0\in\Omega$ выполняется

$$\rho(x_t,X)\leq\varepsilon\;(L_1\leq t\leq T-L_2).$$

Из предложения I следует единственность бесконечной оптимальной траектории, выходящей из точки X, откуда в свою очередь вытекает

ЛЕММА 3. Пусть $\varepsilon>0, L\in\{1,2,\dots\}$. Тогда существуют $\delta>0$, целое число $T_0\geq L$ такие, что для любой оптимальной траектории $\{x_t: t=0,\dots,T\}$, где $T\geq T_0, x_0\in B(X,\delta)$, выполняется

$$\|\alpha(a)^{-t}x_t-X\|\leq\varepsilon\;(t=1,\dots,L).$$

Из предложения I и леммы 3 вытекает

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. Пусть $\varepsilon>0$. Тогда существуют $\delta>0$, натуральное число L такие, что для любой оптимальной траектории $\{x_t: t=0,\dots,T\}, x_0\in B(X,\delta)$ модели a выполняется

$$\|\alpha(a)^{-t}x_t-X\|\leq\varepsilon\;(0\leq t\leq T-L).$$

Заметим, что если последовательность $\{b_t\} \subset \mathfrak{A}$ сходится к $b \in \mathfrak{A}$, то $b_t' \to b'$ при $t \to \infty$.

3. ЛЕММА 4. Пусть компакт $Q \subset K, \varepsilon > 0$, T — натуральное число. Тогда существуют числа $\gamma > 1, \delta > 0$, при которых для всякой (T,γ)-оптимальной траектории $(x_t)_{t=0}^T, x_0 \in Q$ произвольной модели $\{a_t : t=0,\dots,T-1\} \subset W(\delta)$ найдется оптимальная траектория $\{y_t : t=0,\dots,T\}$, $y_0 \in Q$ модели a такая, что $\|y_t - x_t\| \le \varepsilon \ (t=0,\dots,T)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, что лемма неверна. Тогда для любого $s=1,2,\dots$ существует $(T, 1+s^{-1})$-оптимальная траектория $\{x_t^s : t=0,\dots,T\}, x_0^s \in Q$ модели

$$\{a_t^s : t=0,\dots,T-1\} \subset W(s^{-1})$$

такая, что для любой оптимальной траектории $\{y_t : t=0,\dots,T\}$, $y_0 \in Q$ модели a выполняется

$$\sup\{\|y_t - x_t^s\| : t=0,\dots,T\} \ge \varepsilon. \tag{3}$$

Для любого $s=1,2,\dots$ существует оптимальная траектория $\{y_t^s\}_{t=0}^T, y_0^s = x_0^s$ модели $\{a_t^s : t=0,\dots,T-1\}$, имеющая характеристику

$$\{f_t^s : t=0,\dots,T\}, (f_t^s, y_t^s) = 1 \ (t=0,\dots,T),$$

такая, что $y_T^s = \gamma^s x_T^s$, где $\gamma^s \in [1, 1+s^{-1}]$. Легко видеть, что множество

$$\{x_t^s, y_t^s, f_t^s : t=0,\dots,T, \ s=1,2,\dots\}$$

ограничено. Считаем, что последовательность наборов $\{x_0^s,\dots,x_T^s, y_0^s,\dots,y_T^s, f_0^s,\dots,f_T^s\}$ сходится к набору $\{x_0,\dots,x_T, y_0,\dots,y_T, f_0,\dots,f_T\}$. Очевидно, что $(x_t)_{t=0}^T, (y_t)_{t=0}^T$ — траектория модели a, $\{f_t : t=0,\dots,T\}$ — траектория модели a', $x_0 = y_0 \in Q, y_t = x_T$, $(f_t, y_t) = 1 \ (t=0,\dots,T)$, траектория $\{x_t : t=0,\dots,T\}$ оптимальна. Для достаточно больших s выполняется

$$\|x_t^s - x_t\| \le 2^{-1}\varepsilon \ (t=0,\dots,T),$$

что противоречит (3). Полученное противоречие доказывает лемму.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО теоремы I. Не ограничивая общности, считаем, что $B(X,\varepsilon) \subset K$. В силу предложений I,2 существуют $\delta_1 \in (0, 2^{-1}\varepsilon)$, числа $N_1, N_2 \in \{0,1,\dots\}$ такие, что выполняются следующие условия:

(а) $B(x^0, \delta_1) \subset K$, для любой оптимальной траектории $\{x_t : t=0,\dots,T\}$, $\|x_0 - x^0\| \le \delta_1$ модели $\mathfrak{a}$ выполняется

$$P(x_t, X) \le 2^{-1}\varepsilon \quad (N_1 \le t \le T-N_2); \tag{4}$$

(б) для любой оптимальной траектории $\{x_t : t=0,\dots,T\}$, $x_0 \in B(X,\delta_1)$ модели $\mathfrak{a}$ соотношение (4) выполняется при $t \in [0, T-N_2]$, причем $N_1 = 0$, если $x^0 = X$.

По следствию к предложению I найдутся натуральные числа N_3, N_4 такие, что для любой оптимальной траектории $\{x_t : t=0,\dots,T\}$, $x_0 \in B(X,\varepsilon)$ модели $\mathfrak{a}$ выполняется

$$P(x_t, X) \le 2^{-1}\delta_1 \; (N_3 \le t \le T-N_4).$$

Положим $\kappa = 2(N_1+N_2+N_3+N_4)$. По лемме 4 существуют числа $\gamma > 1$, $\delta_2 \in (0, 2^{-1}\delta_1)$ такие, что выполняется следующее условие:

(в) для любой (κ,γ) -оптимальной траектории $\{x_t : t=0,\dots,\kappa\}$, $x_0 \in B(X,\varepsilon)$ (соответственно $x_0 \in B(x^0, \delta_1)$, $x_0 \in B(X,\delta_1)$) произвольной модели

$$\{a_t : t=0,\dots,\kappa-1\} \subset W(\delta_2)$$

найдется оптимальная траектория $\{y_t : t=0,\dots,\kappa\}$, $y_0 \in B(X,\varepsilon)$ (соответственно $y_0 \in B(x^0,\delta_1)$, $y_0 \in B(X,\delta_1)$) модели $\mathfrak{a}$ такая, что

$$P(x_t, y_t) \le 4^{-1}\delta_1 \; (t=0,\dots,\kappa).$$

Рассмотрим (κ,γ)- оптимальную траекторию $\{x_t : t=0,\dots,T\}$, $x_0 \in B(x^0, \delta_2)$ модели

$$\{a_t : t=0,\dots,T-1\} \subset W(\delta_2).$$

Предположим, что существует t_1, при котором $N_1 \le t_1 \le T-\kappa$, $P(x_{t_1}, X) > \varepsilon$. Рассмотрим (κ,γ) -оптимальную траекторию $\{x_t : t=0,\dots,\kappa\}$. В силу условия (в) существует оптимальная траектория $\{y_t : t=0,\dots,\kappa\}$, $y_0 \in B(x^0,\delta_1)$ модели $\mathfrak{a}$ такая, что

$$P(y_t, x_t) \le 4^{-1}\delta_1 (t=0,\dots,\kappa).$$

Из условия (а) следует, что $P(x_t, X) \le 2^{-1}\varepsilon (N_1 \le t \le \kappa - N_2)$,

$$P(x_t, X) \le \varepsilon \; (N_1 \le t \le \kappa - N_2). \tag{5}$$

Следовательно, $t_1 > \kappa - N_2$. Рассмотрим (κ,γ) -оптимальную траекторию $\{\|x_{N_1}\|^{-1} x_t : t = N_1,\dots,N_1+\kappa\}$. В силу условия (в) существует оптимальная траектория $\{y_t\}_{t=0}^{\kappa}$, $y_0 \in B(X,\varepsilon)$

модели $\mathcal{a}$ такая, что

$$\rho(y_t, x_{t+N_1}) \le 4^{-1}\delta_1 \, (t=0,\dots,\kappa).$$

В силу выбора N_3, N_4 имеем $\rho(y_t, X) \le 2^{-1}\delta_1 \, (N_3 \le t \le \kappa - N_4)$,

$$\rho(x_t, X) \le \delta_1 \, (N_1 + N_3 \le t \le \kappa + N_1 - N_4). \qquad (6)$$

Положим $E = \{t : N_1 \le t \le t_1, \ \rho(x_t, X) \le \delta_1, \ \rho(x_\tau, X) \le \varepsilon \, (\tau = N_1, \dots, t)\}$. Из (5), (6) вытекает, что $N_1 + N_3 \in E$. Через t_2 обозначим наибольший элемент E. Рассмотрим (κ, γ)-оптимальную траекторию $(\|x_{t_2}\|^{-1} x_t : t = t_2, \dots, t_2 + \kappa)$. Условие (в) влечет существование оптимальной траектории $(y_t)_{t=0}^{\kappa}, y_0 \in B(X, \delta_1)$ модели $\mathcal{a}$ такой, что

$$\rho(y_t, x_{t_2+t}) \le 4^{-1}\delta_1 \, (t=0,\dots,\kappa).$$

Из условия (б) следует, что

$$\rho(y_t, X) \le 2^{-1}\varepsilon, \ \rho(x_t, X) \le \varepsilon \, (t = t_2, \dots, \kappa - N_2 + t_2). \qquad (7)$$

В силу выбора N_3, N_4 имеем при $t = N_3, \dots, \kappa - N_4$, что

$$\rho(y_t, X) \le 2^{-1}\delta_1, \ \rho(x_t, X) \le \delta_1 \, (t = N_3 + t_2, \dots, \kappa - N_4 + t_2).$$

Из соотношения (7) вытекает, что $t_2 + N_3 \in E$. Полученное противоречие доказывает теорему.

4. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО теоремы 2. Считаем, что $B(\lambda(x^0)X, \varepsilon) \subset K$. Положим $\lambda = \lambda(x^0)$. Выберем число $\theta > 1$ такое, что

$$\lambda \langle \theta^{-10} X, \theta^{10} X \rangle \subset B(\lambda X, \varepsilon).$$

По теореме I существуют $\delta_1 \in (0, \varepsilon)$, целое число $N_1 \ge 0$ такие, что

$$B(x^0, \delta_1) \subset K, \ B(\lambda X, \delta_1) \subset \lambda \langle \theta^{-1} X, \theta X \rangle, \qquad (8)$$

причем выполняются следующие условия:

(а) для любой оптимальной траектории $(x_t)_{t=0}^{T}, x_0 \in B(\lambda X, \delta_1)$ произвольной модели $\mathcal{b} \in W(\delta_1)$ выполняется

$$x_t \in \|x_t\| \langle \theta^{-1} X, \theta X \rangle \ (0 \le t \le T - N_1);$$

(б) для любого $\mathcal{b} \in W(\delta_1)$ выполняется соотношение

$$\{x \in R^n_+ : \|x\| = 1, \ \alpha(\mathcal{b}) x \in \mathcal{b}(x)\} \subset \langle \theta^{-1} X, \theta X \rangle.$$

В силу предложений I,2 найдутся $\delta_2 \in (0, 2^{-1}\delta_1)$, целые числа $N_2 \ge 0, N_3 \ge 1$ такие, что выполняется следующее условие:

(в) для любой оптимальной траектории $\{x_t : t = 0, \dots, T\}$,

$x_0\in B(x^0, \delta_2)$ модели a выполняется

$$\|\alpha(a)^{-t}x_t-\lambda X\|\le 2^{-1}\delta_1 \quad (N_2\le t\le T-N_3),$$

причем $N_2=0$, если $x^0=X$. Из леммы 4 и непрерывности функции α в точке a вытекает существование $\delta_3\in(0,\delta_2)$, при котором выполняется условие:

(г) для любой оптимальной траектории

$$\{x_t: t=0,\dots,N_2+N_3\},\ x_0\in B(x^0,\delta_2)$$

модели $b\in W(\delta_3)$ выполняется $\|\alpha(b)^{-N_2}x_{N_2}-\lambda X\|\le\delta_1$.

Рассмотрим оптимальную траекторию $\{x_t: t=0,\dots,T\}$, $x_0\in B(x^0,\delta_3)$ модели $b\in W(\delta_3)$. Пусть

$$Y\in R^n_+,\ \|y\|=1,\ \alpha(b)Y\in b(Y).$$

Условие (б) влечет $Y\in\langle\theta^{-1}X,\theta X\rangle$. Положим $N_4=2(N_1+N_2+N_3)$. Пусть $N_2\le t_0\le T-N_4$. Из условия (г) и соотношения (8) вытекает

$$\alpha(b)^{-N_2}x_{N_2}\in B(\lambda X,\delta_1)\subset\lambda\langle\theta^{-2}Y,\theta^2 Y\rangle. \tag{9}$$

Рассмотрим оптимальную траекторию $\{\alpha(b)^{-N_2}x_t: t=N_2,\dots,T\}$ модели b. Пусть $t_0>N_2$. Условие (а) влечет

$$x_t\in\|x_t\|\langle\theta^{-1}X,\theta X\rangle \quad (N_2\le t\le T-N_1). \tag{10}$$

В силу (9), (10) имеем

$$b^{t_0-N_2}(\theta^2\lambda Y)\supset b^{t_0-N_2}(\alpha(b)^{-N_2}x_{N_2})\supset\langle 0,\alpha(b)^{-N_2}x_{t_0}\rangle\ni$$

$$\ni\alpha(b)^{-N_2}\|x_{t_0}\|\theta^{-2}Y,\quad b^{t_0-N_2}(Y)\ni(\lambda\theta^4\alpha(b)^{N_2})^{-1}\|x_{t_0}\|\,Y,$$

$$(\lambda\theta^4\alpha(b)^{N_2})^{-1}\|x_{t_0}\|\le\alpha(b)^{t_0-N_2};\quad \|x_{t_0}\|\le\alpha(b)^{t_0}\lambda\theta^4. \tag{11}$$

Предположим, что $\|x_{t_0}\|\le\alpha(b)^{t_0}\lambda\theta^{-8}$. Тогда траектория $\{x_t: t=N_2,\dots,T\}$ оптимальна,

$$x_{t_0}\in b^{t_0-N_2}(x_{N_2}),$$

в силу соотношения (10)

$$x_{t_0}\le\|x_{t_0}\|\theta^2 Y\le\theta^{-6}\alpha(b)^{t_0}\lambda Y. \tag{12}$$

В то же время в силу (9) имеем

$$\alpha(b)^{t_0-N_2}\lambda Y\in b^{t_0-N_2}(\lambda Y)\subset b^{t_0-N_2}(\theta^2\alpha(b)^{-N_2}x_{N_2}),$$

$$b^{t_0-N_2}(x_{N_2})\ni\theta^{-2}\alpha(b)^{t_0}\lambda Y,$$

что вместе с соотношением (12) противоречит оптимальности траектории $\{x_t : t=0,\dots,T\}$. Полученное противоречие доказывает, что

$$\|x_{t_0}\|\geq\alpha(b)^{t_0}\lambda\theta^{-8}.$$

Обращаясь к (11), (10), получим

$$x_{t_0}\in\|x_{t_0}\|\langle\theta^{-1}X,\theta X\rangle\subset\lambda\alpha(b)^{t_0}\langle\theta^{-9}X,\theta^{9}X\rangle,$$

$$\alpha(b)^{-t_0}x_{t_0}\in\lambda\langle\theta^{-9}X,\theta^{9}X\rangle\subset B(\lambda X,\varepsilon).$$

Теорема доказана.

5. ЛЕММА 5. Пусть $x^0\in K$, $\mu>0$. Тогда существуют $\delta>0$, $c_3>0$ такие, что $B(x^0,\delta)\subset K$ при любых $b\in W(\delta)$, $x_0\in B(x^0,\delta)$, для траектории $(x_t)_{t=0}^T$, являющейся решением задачи (2), выполняется соотношение

$$\|\alpha(b)^{-t}x_t\|\geq c_3\quad(t=0,\dots,T).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Существует $\delta>0$, при котором для любого $b\in W(\delta)$ выполняется соотношение

$$\{x\in R_+^n : \|x\|=1,\ \alpha(b)x\in b(x)\}\subset\langle 2^{-1}X, 2X\rangle,$$

причем $B(x^0,\delta)\subset K$. Положим $c_3=8^{-1}\mu(\min_i X^i)$.

Пусть $b\in W(\delta)$, $x_0\in B(x^0,\delta)$, траектория $(x_t)_{t=0}^T$ является решением задачи (2). Предположим, что при некотором $t\in\{0,\dots,T\}$ выполняется $\|\alpha(b)^{-t}x_t\|\leq c_3$. Существует $Y\in\langle 2^{-1}X,2X\rangle$ такое, что $\alpha(b)Y\in b(Y)$. Имеем

$$\alpha(b)^{-t}x_t\leq c_3(\min_i X^i)^{-1}X\leq 4^{-1}\mu Y,\ \alpha(b)^T\mu X\in b^{T-t}(x_t)\subset$$
$$\subset b^{T-t}(\alpha(b)^t4^{-1}\mu Y)=4^{-1}\mu\alpha(b)^t b^{T-t}(Y)$$

$$\alpha(b)^{T-t}X\in 4^{-1}b^{T-t}(Y)\subset 2^{-1}b^{T-t}(X).$$

Полученное противоречие доказывает лемму.

ЛЕММА 6. Пусть $x^0 \in K$. Тогда существуют $\delta > 0$, $c_4 > 0$ такие, что $B(x^0, \delta) \subset K$, для любой траектории $\{x_t : t = 0, \ldots, T\}$, $x_0 \in B(x^0, \delta)$ произвольной модели $b \in W(\delta)$ выполняется соотношение

$$\|\alpha(b)^{-t} x_t\| \le c_4 \quad (t = 0, \ldots, T).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Зафиксируем произвольное число $\varepsilon \in (0, \lambda(x^0))$. По теореме 2 найдутся $\delta \in (0, \inf\{\|a\|, \|x^0\|\})$, числа $L_1, L_2 \in \{0, 1, \ldots\}$ такие, что

$$B(x^0, \delta) \subset K, \ \{\alpha(b) : b \in W(\delta)\} \subset (2^{-1}\alpha(a), 2\alpha(a)),$$

для любой оптимальной траектории $(x_t)_{t=0}^T$, $x_0 \in B(x^0, \delta)$ произвольной модели $b \in W(\delta)$ при $L_1 \le t \le T - L_2$ выполняется

$$\|\alpha(b)^{-t} x_t - \lambda(x^0) X\| \le \varepsilon, \quad \|\alpha(b)^{-t} x_t\| \le 2\lambda(x^0).$$

Легко видеть, что $\|b\| \le 2\|a\|$. Положим

$$c_5 = \sup\{\alpha(b)^{-t}\|y\| : y \in b^t(x), \ b \in W(\delta), \ x \in B(x^0, \delta), \ t = 0, \ldots, L_1 + L_2\} < \infty.$$

Рассмотрим оптимальную траекторию $\{x_t : t = 0, \ldots, T\}$, $x_0 \in B(x^0, \delta)$, $T \ge L_1 + L_2$ модели $b \in W(\delta)$. Для $t = 0, \ldots, -L_2 + T$ имеем

$$\|\alpha(b)^{-t} x_t\| \le \sup\{c_5, \lambda(x^0)\}.$$

Для $t = T - L_2 + i$ $(i = 0, \ldots, L_2)$ имеем

$$\|\alpha(b)^{-t} x_t\| \le (\alpha(b)^{-1}\|b\|)^i \alpha(b)^{-T+L_2} \|x_{T-L_2}\| \le (4\|a\|\alpha(a)^{-1})^i \, 2\lambda(x^0).$$

Таким образом, для всех $t = 0, \ldots, T$ выполняется

$$\|\alpha(b)^{-t} x_t\| \le \sup\{c_5, 2\lambda(x^0), 2\lambda(x^0)(4\|a\|\alpha(a)^{-1})^{L_2}\} = c_4,$$

т.е. для оптимальных траекторий требуемое соотношение доказано. Легко видеть, что оно будет иметь место и для произвольных траекторий моделей из $W(\delta)$. Лемма доказана.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО теоремы 3. В силу лемм 5,6 существуют числа $\delta > 0$, $c_3 > 0$, $c_4 > 0$ такие, что $B(x^0, \delta) \subset K$, и выполняется следующее условие:

(а) при любых $b \in W(\delta)$, $x_0 \in B(x^0, \delta)$ для решения $(x_t)_{t=0}^T$ задачи (2) имеет место соотношение $c_4 \ge \alpha(b)^{-t} x_t \ge c_3$ $(t = 0, \ldots, T)$.

По теореме I существуют $\delta_1 \in (0, \delta)$, $\gamma > 1$, целые числа $k \ge 1$, $L_i \ge 0$ $(i = 1, 2)$ такие, что выполняется условие:

(б) для всякой (k, γ)-оптимальной траектории $\{x_t : t =$

$= 0,\dots,T\}$, $x_0 \in B(x^0, \delta_1)$ произвольной модели $\ell \in W(\delta_1)$ выполняется $\rho(x_t, X) \le \varepsilon$ $(L_1 \le t \le T - L_2)$, причем $L_1 = 0$, если $x^0 = X$. Выберем натуральное число L_3, при котором $(\gamma - 1) L_3 c_3 c_2 > \kappa c_1 c_4$. Пусть $\ell \in W(\delta_1), x_0 \in B(x^0, \delta_1), \{x_t : t = 0,\dots,T\}$ – решение задачи (2), $T > L_3$. Покажем, что траектория $\{x_t : t = 0,\dots, T - L_3\}$ (κ, γ) – оптимальна. Предположим, что это не так. Тогда существует t такое, что $t, t+\kappa \in \{0,\dots,T-L_3\}$, $\gamma x_{t+\kappa} \in \ell^\kappa(x_t)$. Рассмотрим траекторию $\{y_t : t = 0,\dots,T\}$ модели ℓ такую, что

$$x_i = y_i \ (i = 0,\dots,t), \ y_i = \gamma x_i \ (i = t+\kappa,\dots,T).$$

Имеем

$$\sum_{i=0}^{T} \alpha(\ell)^{-i} \varphi_i(y_i) - \sum_{i=0}^{T} \alpha(\ell)^{-i} \varphi_i(x_i) \ge (\gamma - 1) \sum_{i=t+\kappa}^{T} \alpha(\ell)^{-i} \varphi_i(x_i) -$$

$$- \sum_{i=t}^{t+\kappa-1} \alpha(\ell)^{-i} \varphi_i(x_i) \ge (\gamma - 1) L_3 c_3 c_2 - \kappa c_1 c_4 > 0.$$

Это противоречит тому, что $\{x_t ; t = 0,\dots,T\}$ – решение задачи (2). Полученное противоречие доказывает, что траектория $\{x_t : t = 0,\dots,T - L_3\}$ (κ, γ) – оптимальна. Тогда из условия (6) следует, что

$$\rho(x_t, X) \le \varepsilon \ (L_1 \le t \le T - L_2 - L_3).$$

Теорема доказана.

Литература

1. Рубинов А.М. Суперлинейные многозначные отображения и их приложения к экономико-математическим задачам. – Л.: Наука, 1980.
2. Макаров В.Л., Рубинов А.М. Математическая теория экономической динамики и равновесия. – М.: Наука, 1973.
3. Ашманов С.А. Введение в математическую экономику. – М.: Наука, 1984.

Поступила в ред.-изд. отдел
27.06.1986 г.