Теория игр

УДК 519.83

ОБОБЩЕННЫЕ ПОКРЫТИЯ И ОЦЕНКИ ДЛЯ ДЕЛЕЖЕЙ ЯДРА И ВЕКТОРА ШЕПЛИ

О.Н.Бондарева

Рассмотрим кооперативную игру v в 0 -редуцированной форме с множеством игроков $\mathcal{J}=\{1,\dots,n\}$, множеством дележей $A=\{x\in R_n^+,\ x(\mathcal{J})=v(\mathcal{J})\}$, ядром $C=\{x\in A: x(S)\geqslant v(S),\ S\subset \mathcal{J}\}$ и вектором Шепли $\varphi=(\varphi_1,\dots,\varphi_n)$:

$$\varphi_i=\sum_{S\not\ni i}\frac{|S|!\,(n-|S|-1)!}{n!}\left(v(S\cup i)-v(S)\right).$$

Здесь и далее $|S|$ - число элементов в коалиции S , $x(S)=\sum_{i\in S}x_i$, а $v(S\cup i)=v(S\cup\{i\})$.

П о к р ы т и е м [1] называется такой набор $\{\lambda_S\geqslant 0\}_{S\subset\mathcal{J}}$, что $\sum \chi_S\lambda_S=\chi_{\mathcal{J}}$, где χ_S - вектор инциденций коалиции S . Покрытие называется приведенным, если система $\{\chi_S:\lambda_S>0\}$ состоит из линейно-независимых векторов. Множество покрытий обозначим Λ , приведенных - Λ^* . В [2] рассматривается обобщение понятия покрытия на случай произвольных λ_S .

Рассмотрим обобщенные покрытия специального вида.

Назовем набор $\{\bar\lambda_S^i\geqslant 0\}$ верхним i -покрытием, если

$$\sum\bar\lambda_S^i\chi_S-\mu\chi_{\mathcal{J}}=\chi_i\ (\chi_i=\chi_{\{i\}}), \tag{1}$$

и набор $\{\underline{\lambda}_S^i\geqslant 0\}$ нижним i -покрытием, если

$$\chi_{\mathcal{J}}-\sum\underline{\lambda}_S^i\chi_S=\chi_i. \tag{2}$$

Множества верхних и нижних i -покрытий обозначим соответственно $\bar{\Lambda}_i$ и $\underline{\Lambda}_i$. Это выпуклые множества с конечным числом крайних точек, которые мы назовем приведенными i -покрытиями; обозначим их множества соответственно $\bar{\Lambda}_i^*$ и $\underline{\Lambda}_i^*$.

Каждому $\bar{\lambda}^i \in \bar{\Lambda}_i$ ($\underline{\lambda}^i \in \underline{\Lambda}_i$) поставим в соответствие верхний нижний эксцесс $e(\bar{\lambda}^i)$ $(e(\underline{\lambda}^i))$:

$$e(\bar{\lambda}^i) = \sum \bar{\lambda}_S^i\, v(S) - \mu\, v(\mathcal{J}); \tag{3}$$

$$e(\underline{\lambda}^i) = v(\mathcal{J}) - \sum \underline{\lambda}_S^i\, v(S). \tag{4}$$

Положим

$$\bar{e}_i^* = \max_{\bar{\lambda}^i \in \bar{\Lambda}_i} e(\bar{\lambda}^i) = \max_{\bar{\lambda}^i \in \bar{\Lambda}_i^*} e(\bar{\lambda}^i),$$

$$\underline{e}_i^* = \min_{\underline{\lambda}^i \in \underline{\Lambda}_i} e(\underline{\lambda}^i) = \min_{\underline{\lambda}^i \in \underline{\Lambda}_i^*} e(\underline{\lambda}^i).$$

ЛЕММА. Если $C \neq \varnothing$, то $\bar{e}_i^* \leq \underline{e}_i^*$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По условиям (3) и (4) для любых $\bar{\lambda}^i \in \bar{\Lambda}_i, \underline{\lambda}^i \in \underline{\Lambda}_i$:

$$e(\bar{\lambda}^i) - e(\underline{\lambda}^i) = \sum \bar{\lambda}_S^i\, v(S) + \sum \underline{\lambda}_T^i\, v(T) - (\mu+1)\, v(\mathcal{J}).$$

Так как по условиям (I) и (2) $\sum \bar{\lambda}_S^i \chi_S - \mu \chi_{\mathcal{J}} = \chi_i$ и $\chi_{\mathcal{J}} - \sum \underline{\lambda}_T^i \chi_T = \chi_i$, то, вычитая из первого второе, получаем $\sum \bar{\lambda}_S^i \chi_S + \sum \underline{\lambda}_T^i \chi_T = (\mu+1)\chi_{\mathcal{J}}$ или

$$\sum \frac{\bar{\lambda}_S^i}{\mu+1} \chi_S + \sum \frac{\underline{\lambda}_T^i}{\mu+1} \chi_T = \chi_{\mathcal{J}}, \text{т.е.}\ \frac{1}{\mu+1}(\bar{\lambda} + \underline{\lambda}) \in \Lambda.$$

Ввиду непустоты ядра [T] имеем

$$\frac{1}{\mu+1} \sum \bar{\lambda}_S^i\, v(S) + \frac{1}{\mu+1} \sum \underline{\lambda}_T^i\, v(T) \leq v(\mathcal{J}),$$

откуда получаем $e(\bar{\lambda}^i) \leq e(\underline{\lambda}^i)$ для любых $\bar{\lambda}^i \in \bar{\Lambda}_i, \lambda_i \in \underline{\Lambda}_i$. Следовательно, $\bar{e}_i^* \leq \underline{e}_i^*$, и лемма доказана.

Обозначим $E^* = \{x \in R_n : \bar{e}_i^* \leq x_i \leq \underline{e}_i^*,\ i = 1, \dots, n\}$.

ТЕОРЕМА I. Всегда $C \subset E^*$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если $E^* = \varnothing$, то $C = \varnothing$ по лемме I. Покажем, что $C \subset E^*$, если $C \neq \varnothing$.

Любой $x \in C$ является решением системы

$$\begin{cases} x\chi_S \geqslant v(S); & (5)\\ x\chi_J = v(J). & (6)\end{cases}$$

Пусть $\bar{e}_i^*$ соответствует покрытие $\bar{\lambda}^{*i}$, а $\underline{e}_i^*$ – покрытие $\underline{\lambda}^{*i}$. Умножим каждое из неравенств (5) соответственно на $\bar{\lambda}_S^{*i}$ и сложим с равенством (6), умноженным на $-\mu$, получим

$$\sum \bar{\lambda}_S^{*i}\, x\chi_S - x\mu\chi_J \geqslant \sum \bar{\lambda}_S^{*i} v(S) - \mu\, v(J) = \bar{e}_i^*.$$

Ввиду условия (I) левая часть равна x_i, откуда $x_i \geqslant \bar{e}_i^*$. Аналогично показываем, что $x_i \leqslant \underline{e}_i^*$, и теорема доказана.

Так как нахождение всех i-покрытий процедура не простая, рассмотрим некоторые их специальные виды.

Назовем симметричным i-покрытием k-го порядка i-покрытие, полученное с помощью всех возможных k-элементных коалиций:

$$\chi_J - \alpha_k \sum_{|S|=k} \chi_S = \chi_i,\ i \notin S,\ \alpha_k = \frac{1}{C_{n-2}^{k-1}},\ k=1,\dots,n-1; \qquad (7)$$

$$\alpha_k \sum_{|S|=k-1} \chi_{S\cup i} - \frac{k-1}{n-k}\chi_J = \chi_i,\ i \notin S,\ k=1,\dots,n-1. \qquad (8)$$

Найдем соответствующие им эксцессы:

$$\underline{e}_i^k = v(J) - \alpha_k \sum_{|S|=k} v(S),\ i \notin S,\ k=1,\dots,n-1; \qquad (9)$$

$$\bar{e}_i^k = \alpha_k \sum_{|S|=k-1} v(S\cup i) - \frac{k-1}{n-k} v(J),\ i \notin S,\ k=1,\dots,n-1. \qquad (10)$$

Положим

$$\underline{e}_i = \min_{1\leqslant k\leqslant n-1} \underline{e}_i^k,\quad \bar{e}_i = \max_{1\leqslant k\leqslant n-1} \bar{e}_i^k;$$

$$E = \{x \in R_n,\ \bar{e}_i \leqslant x_i \leqslant \underline{e}_i,\ i=1,\dots,n\};$$

$$F = \{x \in R_n,\ \frac{1}{n-1}\sum_{k=1}^{n-1} \bar{e}_i^k \leqslant x_i \leqslant \frac{1}{n-1}\sum_{k=1}^{n-1} \underline{e}_i^k\};$$

$$\underline{g}_i^k = \min(\underline{e}_i^k,\ \bar{e}_i^k),\ k = 1, \ldots, n-1;$$

$$\bar{g}_i^k = \max(\underline{e}_i^k,\ \bar{e}_i^k),\ k = 1, \ldots, n-1;$$

$$G = \left\{ x \in R_n : \frac{1}{n-1} \sum_{k=1}^{n-1} \underline{g}_i^k \leq x_i \leq \frac{1}{n-1} \sum_{k=1}^{n-1} \bar{g}_i^k \right\}.$$

По лемме, если $C \neq \phi$, то $\bar{e}_i^k \leq \underline{e}_i^k$, и тогда $F = G$.

ТЕОРЕМА 2. Для любой игры

$$\varphi_i = \frac{1}{n-1} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{k\underline{e}_i^k + (n-k)\bar{e}_i^k}{n}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Преобразуем компоненты вектора Шепли, используя выражения для $\bar{e}_i^k$ и $\underline{e}_i^k$:

$$\varphi_i = \sum_{i \in S, |S|=k} \frac{k!(n-k-1)!}{n!} [v(S \cup i) - v(S)] =$$
$$= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{k!(n-k-1)!}{n!} \sum_{|S|=k} [v(S \cup i) - v(S)].$$

Из (10) и (9) получаем

$$\sum v(S \cup i) = \frac{1}{\alpha_{k+1}} \bar{e}_i^{k+1} + \frac{k}{(n-k-1)\alpha_{k+1}} v(J),$$

$$\sum v(S) = \frac{1}{\alpha_k} v(J) - \frac{1}{\alpha_k} \underline{e}_i^k.$$

Откуда

$$\sum (v(S \cup i) - v(S)) = \frac{1}{\alpha_{k+1}} \bar{e}_i^{k+1} + \frac{1}{\alpha_k} \underline{e}_i^k + v(J)\left(\frac{k}{(n-k-1)\alpha_{k+1}} - \frac{1}{\alpha_k}\right).$$

Так как

$$\alpha_k = \frac{(n-k-1)\alpha_{k+1}}{k},$$

то

$$\sum_{|S|=k} (v(S\cup i)-v(S))=\frac{1}{\alpha_k}\left[\frac{n-k-1}{k}\bar{e}_i^{k+1}+\underline{e}_i^k\right],\ 1\le k\le n-2,$$

и

$$\varphi_i=\frac{1}{n}v(i)+\frac{1}{n(n-1)}\sum_{k=1}^{n-2}\left[(n-k-1)\bar{e}_i^{k+1}+k\underline{e}_i^k\right]+\frac{1}{n}(v(J)-v(J-i)).$$

Ввиду того, что $v(i)=\bar{e}_i^1$, а $v(J)-v(J-i)=\underline{e}_i^{n-1}$, получаем

$$\varphi_i=\frac{1}{n-1}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{k\underline{e}_i^k+(n-k)\bar{e}_i^k}{n}$$

и теорема доказана.

СЛЕДСТВИЕ I. Для любой игры $\varphi\in G$ и, следовательно, $G\cap A\neq\phi$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как $\underline{g}_i^k\le\underline{e}_i^k\le\bar{g}_i^k$ и $\underline{g}_i^k\le\bar{e}_i^k\le\bar{g}_i^k$, то $\frac{1}{n-1}\sum_{k=1}^{n-1}\underline{g}_i^k\le\varphi_i\le\frac{1}{n-1}\sum_{k=1}^{n-1}\bar{g}_i^k$. Так как φ существует для любой игры и $\varphi\in A$, то $G\cap A\neq\phi$.

СЛЕДСТВИЕ 2. Если $C\neq\phi$, то $\varphi\in F$.

Следует из того, что в этом случае $F=G$.

Таким образом, величины $\bar{e}_i^k$ и $\underline{e}_i^k$, которые легко вычисляются, позволяют не только найти вектор Шепли, но и оценить элементы ядра или установить его пустоту проверкой условия $\bar{e}_i^k\le\underline{e}_i^m$.

Перепишем условие $\bar{e}_i^k\le\underline{e}_i^k$, используя (9) и (I0):

$$\alpha_k\sum_{|S|=k-1}v(S\cup i)-\frac{k}{n-k-1}v(J)-\alpha_k\sum_{|S|=k}v(S)$$

или

$$\alpha_k\sum_{|S|=k-1}v(S\cup i)+\alpha_k\sum_{|S|=k}v(S)\le\frac{n-1}{n-k-1}v(J),$$

окончательно

$$\frac{(k-1)!\,(n-k)!}{(n-1)!}\sum_{|S|=k}v(S)\le v(J). \tag{II}$$

Условие (II) соответствует покрытию

$$\frac{1}{C_{n-1}^{k-1}}\sum_{|S|=k}\chi_S=\chi_J. \tag{I2}$$

Назовем игры, удовлетворяющие условию (II) для любого покрытия типа (12), симметрично уравновешенными.

ТЕОРЕМА 4. Для того чтобы $A \cap E \neq \phi$, необходимо, а для того чтобы $A \cap F \neq \phi$, и достаточно, чтобы игра была симметрично уравновешена.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Первая часть следует из приведенного выше рассуждения, а вторая из того, что если $\bar{e}_i^k \leq \underline{e}_i^k$, то $G = F$ и из следствия I теоремы 3.

ТЕОРЕМА 5. Для того, чтобы $C \neq \phi$, необходимо, а для симметричной игры и достаточно, чтобы $\bar{e}_i^k \leq \underline{e}_i^k$, $k = 1, \ldots, n$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Необходимость следует из леммы.

Докажем достаточность. Пусть $\bar{e}_i^k \leq \underline{e}_i^k$, перепишем (II):

$$\frac{(k-1)!\,(n-k)!}{(n-1)!} \sum_{|S|=k} v(S) \leq v(\mathcal{I}) \tag{13}$$

ввиду симметричности игры $v(S) = v(k)$ и $\sum\limits_{|S|=k} v(S) = C_n^k\, v(k)$.

В сочетании с (13) получаем $\frac{n}{k} v(S) \leq v(\mathcal{I})$ или $v(k) \leq \frac{k}{n} v(\mathcal{I})$, что, как известно (см. [I]), является достаточным условием непустоты ядра, и теорема доказана.

Проанализируем теперь с точки зрения изложенного выше оценки для элементов ядра, приведенные в статье [3].

Там получены оценки $a_i \leq x_i \leq b_i$, $i = 1, \ldots, n$, где

$$a_i = \max_{S \ni i} \Big[v(S) - \sum_{k \in S-i} b_k \Big], \quad b_i = v(\mathcal{I}) - v(\mathcal{I}-i) = \underline{e}_i^{n-1}.$$

Подставляя в a_i выражения для b_k, получаем

$$a_i = \max_{S \ni i} \Big[v(S) + \sum_{k \in S-i} v(\mathcal{I}-k) - (|S|-1)\, v(\mathcal{I}) \Big].$$

Очевидно, что a_i – это максимальный эксцесс по множеству верхних i-покрытий вида

$$\chi_S + \sum_{k \in S-i} \chi_{\mathcal{I}-k} - (|S|-1)\, \chi_{\mathcal{I}} = \chi_i . \tag{14}$$

Заметим, что покрытия (14) в отличие от симметричных i-покрытий являются приведенными. Можно было бы рассматривать и приведенные i-покрытия, состоящие из k-элементных множеств, но таких, во-первых, очень много, во-вторых, мы не получили бы столь простого выражения для вектора Шепли.

Ясно, что всегда $b_i \leq \underline{e}_i$, соотношение между оценками снизу a_i и $\bar{e}_i$ может быть любым.

ПРИМЕР. Рассмотрим симметричную игру четырех лиц. Пусть $J=\{1,2,3,4\}$, $v(J)=1$, $v(3)=\varepsilon$, $v(2)=\delta$, $0\leq\delta\leq\varepsilon\leq 1$, $v(i)=0$, $i=1,2,3,4$. Для нахождения величин $\underline{e}_i^k$ и $\bar{e}_i^k$ преобразуем для случая симметричной игры формулы (9) и (10):

$$\underline{e}_i^k = v(J) - \frac{(k-1)!(n-k-1)!}{(n-2)!} C_{n-1}^k v(k) = v(J) - \frac{n-1}{k} v(k),$$

$$\bar{e}_i^k = \frac{(k-1)!(n-k-1)!}{(n-2)!} C_{n-1}^{k-1} v(k) - \frac{k-1}{n-1} v(J) = \frac{n-1}{n-k} v(k) - \frac{k-1}{n-k} v(J).$$

Так как для $n=4$ имеем $\underline{e}_i^1=1$, $\underline{e}_i^2=1-\frac{3}{2}\delta$, $\underline{e}_i^3=1-\varepsilon$, $\bar{e}_i^1=0$, $\bar{e}_i^2=\frac{3}{2}\delta-\frac{1}{2}$, $\bar{e}_i^3=3\varepsilon-2$, $i=1,2,3,4.$

Далее $\bar{e}=\bar{e}_i=\max\limits_{1\leq k\leq 3} \bar{e}_i^k = \max(\frac{3}{2}\delta-\frac{1}{2}, 3\varepsilon-2, 0)$ и поэтому

$$\bar{e} = \begin{cases} 3\varepsilon-2 & \text{, если } 2\varepsilon-\delta\geq 1,\ \varepsilon\geq\frac{2}{3}, \\ \frac{3}{2}\delta-\frac{1}{2} & \text{, если } 2\varepsilon-\delta\leq 1,\ \delta\geq\frac{1}{3}, \\ 0 & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Для верхней оценки $\underline{e}=\underline{e}_i=\min\limits_{1\leq k\leq 3}\underline{e}_i^k$ получаем:

$$\underline{e} = \begin{cases} 1-\frac{3}{2}\delta & \text{, если } \varepsilon\leq\frac{3}{2}\delta, \\ 1-\varepsilon & \text{, если } \varepsilon\geq\frac{3}{2}\delta. \end{cases}$$

Получим теперь оценки a_i и b_i. Так как $b_i=\underline{e}_i^{n-1}$, то $b=b_i=1-\varepsilon$, $i=1,2,3,4$. Преобразуем для симметричной игры выражение $a_i=\max\limits_{S\ni i}[v(S)-\sum\limits_{k\in S-i} b_k]$; полагая $|S|=k$ и $v(S)=v(k)$, получим $a=a_i=\max\limits_{1\leq k\leq n}[v(k)-(k-1)b]=\max\limits_{1\leq k\leq n}[v(k)-(k-1)(v(n)-v(n-1))]$.

Вычислим $a=\max(0;\ \delta+\varepsilon-1,\ 3\varepsilon-2;\ 3\varepsilon-2)$:

$$a=\begin{cases} \delta+\varepsilon-1 & \text{, если } 2\varepsilon-\delta\le 1 \text{ и } \delta+\varepsilon\geqslant 1, \\ 3\varepsilon-2 & \text{, если } 2\varepsilon-\delta\geqslant 1 \text{ и } \varepsilon>\frac{2}{3}, \\ 0 & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Сравним b с $\underline{e}$ и a с $\bar{e}$ соответственно.

Очевидно, что если $\varepsilon<\frac{3}{2}\delta$, то верхняя оценка в нашем случае лучше, чем в [3].

Рассмотрим нижние оценки. Они одинаковы, если $2\varepsilon-\delta\geqslant 1$ и $\varepsilon\geqslant\frac{2}{3}$. Остается случай $2\varepsilon-\delta<1$ или $\varepsilon<\frac{2}{3}$. В первом случае $a>\bar{e}$ может быть, лишь если $a=\delta+\varepsilon-1>0$, а $\bar{e}=\frac{3}{2}\delta+\frac{1}{2}$, либо $\bar{e}=0\geqslant\frac{3}{2}\delta+\frac{1}{2}$. Следовательно, $a>\bar{e}$ влечет $\delta+\varepsilon-1>\frac{3}{2}\delta+\frac{1}{2}$ или $2\varepsilon-\delta>1$, что невозможно. Остается случай $\varepsilon<\frac{2}{3}$, $2\varepsilon-\delta\geqslant 1$, но тогда $\delta<\frac{1}{3}$ и $\bar{e}=a=0$.

Таким образом, наши оценки оказались лучше, чем полученные в [3], по-видимому, это верно и для любой симметричной игры.

ЛИТЕРАТУРА

I. Бондарева О.Н. Некоторые применения линейного программирования к теории кооперативных игр // Проблемы кибернетики. – I963. – Вып. I0. – С.II9–I39.

2. Бондарева О.Н. Обобщенные покрытия и некоторые необходимые условия существования решений у кооперативной игры// Вестник ЛГУ. – I983. – № I9. – С.5–I2.

3. Tijs S.H. Bounds for the core and τ -value // Game theory and Mathematical Economics. – I98I. – P.I23–I32.

Поступила в ред.-изд. отдел
I3.I0.I987 г.