Выпуск 43(60) ОПТИМИЗАЦИЯ 1988 г.

Выпуклый анализ и смежные вопросы

УДК 517.98

ТЕОРЕМА РИССА ДЛЯ МАЖОРИРУЕМЫХ ОПЕРАТОРОВ

К.Т.Тибилов

В работах [1,2] Л.В.Канторович ввел понятие интеграла Стилтьеса со значениями в K-пространстве и установил вариант теоремы Рисса для порядково-ограниченных операторов. В настоящей заметке указанный результат переносится на случай линейных мажорируемых операторов. Все необходимые сведения о решеточно-нормированных пространствах (РНП) и пространствах Банаха – Канторовича (ПБК), а также операторах в этих пространствах приводятся в [3-5].

1. Пусть (X, ρ, E) – произвольное РНП. Рассмотрим вектор-функцию $f:[0,1]\to X$. Возьмем произвольное разбиение π отрезка $[0,1]$ на части точками $0=t_0<t_1<\ldots<t_{n-1}<t_n=1$ и составим сумму

$$V_\pi(f)=\sum_{i=0}^{n-1}\rho[f(t_{i+1})-f(t_i)].$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Говорят, что вектор-функция f имеет ограниченную вариацию, если существует такой элемент $\ell\in E$, что для любого разбиения π отрезка $[0,1]$ выполняется неравенство $V_\pi(f)\le \ell$. В этом случае элемент $\sup\limits_\pi V_\pi(f)\in E$, где точная верхняя граница берется по всем разбиениям π отрезка $[0,t]$, называется полной вариацией вектор-функции f на отрезке $[0,t]$ и обозначается $\overset{t}{\underset{0}{V}}(f)$, т.е. $\overset{t}{\underset{0}{V}}(f):= \sup\limits_\pi V_\pi(f)$. Отображение $t\longrightarrow \overset{t}{\underset{0}{V}}(f)$ называется вариацией f и обозначается символом $|f|$. Вектор-функция f непрерывна (непрерывна справа) в точке t_0, если $(o)\text{-}\lim\limits_{t\to t_0}\rho[f(t)-f(t_0)]=0$

(соответственно $(0)-\lim_{t\to t_0+0}\rho[f(t)-f(t_0)]=0$).

Обозначим множество всех вектор-функций ограниченной вариации из $[0,1]$ в X через $V'(0,1;X)$. Для вектор-функций из $V'(0,1;X)$ выполняются все основные свойства числовых функций ограниченной вариации. Отметим, например, следующее свойство, которое понадобится ниже: если $f\in V'(0,1;X)$ и f непрерывна (непрерывна справа) в точке $t\in[0,1)$, то в этой точке непрерывна (непрерывна справа) вектор-функция $|f|$.

Пусть $V(0,1;X)\subset V'(0,1;X)$, $f\in V(0,1;X)$, если $f(0)=0$ и f непрерывна справа в каждой точке $t\in[0,1)$.

Из определения $|f|$ следует, что если $f\in V'(0,1;X)$, то $|f|$ является вектор-функцией ограниченной вариации со значениями в K-пространстве E. Введем в $V(0,1;E)$ частичное упорядочение. Именно, для $\varphi_1,\varphi_2\in V(0,1;E)$ положим $\varphi_1\leq\varphi_2$, если $\Delta\varphi_1=\varphi_1(t+\Delta t)-\varphi_1(t)\leq\Delta\varphi_2=\varphi_2(t+\Delta t)-\varphi_2(t)$, где $t,t+\Delta t\in[0,1]$, $\Delta t\geq 0$. Тогда $V(0,1;E)$ становится K-пространством. Легко видеть, что вариация $|f|: V(0,1;X)\to V(0,1;E)$ удовлетворяет всем условиям решеточной нормы, т.е. $(V(0,1;X),|\cdot|, V(0,1;E))$ является РНП. Ниже будет показано, что это РНП является ПБК, если (X,ρ,E) – ПБК.

2. В дальнейшем (X,ρ,E) – произвольное ПБК, $V'(0,1;X)$ – множество всех вектор-функций ограниченной вариации со значениями в ПБК. Пусть $f\in C[0,1]$, $g\in V'(0,1;E)$. Возьмем произвольное разбиение π отрезка $[0,1]$ на части $0=t_0<t_1<\ldots$ $\ldots<t_{n-1}<t_n=1$, произвольные числа $\xi_i\in[t_i,t_{i+1}]$ и составим сумму

$$\Sigma_\pi=\sum_{i=0}^{n-1}f(\xi_i)[g(t_{i+1})-g(t_i)].$$

Очевидно, $\Sigma_\pi\in X$. Обозначим $\lambda_\pi=\max_i(t_{i+1}-t_i)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Если существует элемент $s\in X$ такой, что $\rho(\Sigma_\pi-s)\xrightarrow{(0)}0$ при $\lambda_\pi\to 0$, то s называют интегралом Стилтьеса от функции f по вектор-функции g.

Обозначение:

$$s=\int_0^1 f\,dg,$$

т.е.

$$s=\int_0^1 f\,dg:=(0)-\lim\Sigma_\pi \quad \text{при } \lambda_\pi\to 0.$$

Существование интеграла $\int\limits_0^1 f\,dg$ в случае, когда $f \in C[0,1]$, $g \in V'(0,1;X)$, доказывается так же, как и в случае $X = R$. Введенный интеграл обладает основными свойствами обычных интегралов Стилтьеса. Отметим два свойства, которые понадобятся при доказательстве теоремы Рисса:

1) $\rho\left(\int\limits_0^1 f\,dg\right) \le \max\limits_{0 \le t \le 1} |f| \cdot \bigvee\limits_0^1 (g) = \|f\| \cdot \bigvee\limits_0^1 (g)$;

2) $\rho\left(\int\limits_0^1 f\,dg\right) \le \int\limits_0^1 |f|\,d|g|$.

3. Пусть (X, ρ, E) – произвольное ПБК, $T: C[0,1] \to X$ – линейный мажорируемый оператор, $M(C[0,1], X)$ – множество всех мажорируемых операторов из $C[0,1]$ в X. Обозначим через $C^{\uparrow}[0,1]$ множество всех ограниченных функций, которые представимы в виде поточечного предела неубывающей последовательности непрерывных функций, определенных на $[0,1]$. Положим $\mathcal{L} := C^{\uparrow}[0,1] - C^{\uparrow}[0,1]$, т.е. каждая функция $x \in \mathcal{L}$ представима в виде $x = x_1 - x_2$, где $x_1, x_2 \in C^{\uparrow}[0,1]$. Очевидно, что $\mathcal{L}$ – векторная решетка $C[0,1] \subset \mathcal{L}$. Введем в $\mathcal{L}$ норму $\|\cdot\|_{\mathcal{L}} = \sup\limits_{0 \le t \le 1} |\cdot|$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ. Для каждого оператора $T \in M(C[0,1], X)$ существует единственный секвенциально (о)-непрерывный мажорируемый оператор $\tilde{T}: \mathcal{L} \to X$ такой, что $\forall f \in C[0,1]$ верно $Tf = \tilde{T}f$. При этом $|T| = |\tilde{T}|\|_{C}$, где $|T|, |\tilde{T}|$ – наименьшие мажоранты операторов T и $\tilde{T}$ соответственно.

□ Пусть $U \in \mathcal{L}_r^+(C[0,1], E)$ – мажоранта оператора T. Для $f \in \mathcal{L}$ положим

$$\tilde{U}f := \sup_{g_n \le g} \{U g_n\},$$

$$\tilde{T}f := (o)\text{-}\lim \{T g_n\},$$

где $g_n \uparrow f$, $\{g_n\} \subset C[0,1]$. Оператор $\tilde{T}$ определен корректно ввиду (о)-полноты (X, ρ, E). Кроме того, можно показать, что $\tilde{U}$ (с)-непрерывен. Так как $\forall g_n \in C[0,1]$ справедливо $\rho(Tg_n) \le U(|g_n|)$, то при $n \to \infty$ из последнего неравенства следует $\rho(\tilde{T}f) \le \tilde{U}(|f|)$, что и требовалось. ■

ЗАМЕЧАНИЕ. Общая теорема о продолжении линейного оператора со значениями в K-пространстве принадлежит Дж.Райту (см. [6]).

4. ТЕОРЕМА. Каждый мажорируемый оператор $T: C[0,1] \to X$ можно единственным способом представить в виде интеграла Стилтьеса

$$Tf = \int_0^1 f\,dg \quad (f \in C[0,1]),$$

где $g \in V(0,1;X)$. При этом наименьшая мажоранта $|T|$ оператора T действует по формуле

$$|T|f = \int_0^1 f\,d\hat{g} \quad (f \in C[0,1]).$$

□ Доказательство проведем в четыре этапа.

А) Рассмотрим ступенчатые функции

$$u_0(\xi) \equiv 0, \qquad u_t(\xi) = \begin{cases} 1 & \text{при } 0 \leq \xi < t, \\ 0 & \text{при } t \leq \xi \leq 1; \end{cases}$$

принадлежащие $\mathcal{L}$. Положим $g(t) := \tilde{T}[u_t(\xi)]$, очевидно, $g(0) = 0$. Покажем, что $g \in V'(0,1;X)$. Пусть π – произвольное разбиение отрезка $[0,1]$ на части $0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_{n-1} < t_n = 1$. Составим сумму

$$V_\pi(g) = \sum_{i=0}^{n-1} \rho[g(t_{i+1}) - g(t_i)].$$

Тогда

$$V_\pi(g) = \sum_{i=0}^{n-1} \rho[\tilde{T}(u_{t_{i+1}}) - \tilde{T}(u_{t_i})] =$$
$$= \sum_{i=0}^{n-1} \rho[\tilde{T}(u_{t_{i+1}} - u_{t_i})] \leq \sum_{i=0}^{n-1} \tilde{\mathcal{U}}(|u_{t_{i+1}} - u_{t_i}|) =$$
$$= \tilde{\mathcal{U}}\left(\sum_{i=0}^{n-1} |u_{t_{i+1}} - u_{t_i}|\right) = \tilde{\mathcal{U}}(1),$$

т.е.

$$V_\pi(g) \leq \tilde{\mathcal{U}}(1), \quad g \in V'(0,1;X).$$

Возьмем произвольную $f \in C[0,1]$ и построим ступенчатую функцию

$$x_n(t)=\sum_{k=1}^{n} f(\tfrac{k}{n})[U_{k/n}(t)-U_{(k-1)/n}(t)]\in L.$$

При $n\to\infty$ тогда $\|x_n-f\|_L \longrightarrow 0$ и

$$\tilde{T}(x_n)=\sum_{k=1}^{n} f(\tfrac{k}{n})[g(\tfrac{k}{n})-g(\tfrac{k-1}{n})] \xrightarrow{(0)} \int_0^1 f\,dg.$$

Существование последнего интеграла обеспечено, так как $f\in C[0,1], g\in V'(0,1;X)$. Но $\tilde{T}$ - мажорируемый оператор, поэтому

$$\tilde{T}x_n \xrightarrow{(0)} \tilde{T}f,$$

т.е.

$$\tilde{T}f=\int_0^1 f\,dg.$$

Для $f\in C[0,1]$ верно $\tilde{T}f=Tf$, следовательно,

$$Tf=\int_0^1 f\,dg.$$

Б) Докажем равенство

$$(\tilde{T}|\chi[a,b)=|g|(b)-|g|(a),$$

где $[a,b)\subset[0,1]$, $\chi[a,b)$ - характеристическая функция $[a,b)$. В дальнейшем $[f_i]$ - произвольный конечный набор элементов. Из предложения 4.I (см. [5, с.I44]) и свойства 2) интеграла Стилтьеса следует

$$|\tilde{T}|\chi[a,b)=\sup\{\sum_i \rho(\tilde{T}f_i):[f_i]\subset L,\sum_i|f_i|=\chi[a,b)\}=$$
$$=\sup\{\sum_i\rho(\int_a^b f_i\,dg):[f_i]\subset L,\sum_i|f_i|=\chi[a,b)\}\le$$
$$\le\sup\{\sum_i\int_a^b|f_i|\,d|g|:[f_i]\subset L,\sum_i|f_i|=\chi[a,b)\}=$$
$$=\sup\{\int_a^b\sum_i|f_i|\,d|g|:[f_i]\subset L,\sum_i|f_i|=\chi[a,b)\}=$$
$$=\int_a^b d|g|=|g|(b)-|g|(a).$$

Докажем обратное неравенство. Пусть $[a,b)=\bigcup_{i=1}^{n}[a_i,b_i)$, $[a_i,b_i)\cap[a_j,b_j)=\emptyset$ при $i\ne j$, $\chi_i:=\chi[a_i,b_i)$. Расположим все $[a_i,b_i)$ в "порядке возрастания" $[c_i,c_{i+1})$, где

$a=c_0<c_1<\ldots<c_{n-1}<c_n=b$. Тогда

$$\tilde{T}\chi[a_i,b_i)=g(b_i)-g(a_i)$$

и получим

$$|\tilde{T}|\chi[a,b)=\sup\Big\{\sum_i \rho(\tilde{T}f_i):[f_i]\subset L,$$

$$\sum_i|f_i|=\chi[a,b)\Big\}\geq\sup\Big\{\sum_i\rho(\tilde{T}f_i):f_i=\chi_i\ ,$$

$$i=1,\ldots,n,\ \sum_i|\chi_i|=\chi[a,b)\Big\}=$$

$$=\sup\Big\{\sum_i\rho[g(b_i)-g(a_i)]=$$

$$=\sup\Big\{\sum_i\rho[g(c_{i+1})-g(c_i)]=\bigvee_a^b(g)=$$

$$=|g|(b)-|g|(a).$$

Таким образом,

$$|\tilde{T}|\chi[a,b)=|g|(b)-|g|(a).$$

В) Докажем, что $|T|f=\int_0^1 f\,d|g|$. Возьмем произвольную функцию $f\in C[0,1]$. Тогда $\forall\varepsilon>0$ существует ступенчатая функция

$$\varphi(t)=\sum_{i=0}^{n-1}\alpha_i\chi[t_i,t_{i+1})+\alpha_{n-1}\chi[t_{n-1},t_n]\in L$$

такая, что $\|\varphi-f\|_L<\varepsilon$. Здесь $0=t_0<t_1<\ldots<t_{n-1}<t_n=1$ – разбиение отрезка $[0,1]$. Из последнего неравенства последовательно получим

$$-\varepsilon\cdot 1<\varphi-f<\varepsilon\cdot 1,$$

$$-\varepsilon\cdot|\tilde{T}|1<|\tilde{T}|\varphi-|\tilde{T}|f<\varepsilon\cdot|\tilde{T}|-1,$$

$$\big||\tilde{T}|\varphi-|\tilde{T}|f\big|<\varepsilon\cdot|\tilde{T}|1.$$

С другой стороны, по доказанному,

$$|\tilde{T}|\varphi=\sum_{i=0}^{n-1}\alpha_i[|g|(t_{i+1})-|g|(t_i)]\ ,$$

поэтому

$$\||\tilde{T}|\varphi-\int_0^1 f\,d|g|\|=\|\int_0^1(\varphi-f)\,d|g|\|\le$$
$$\le\|\varphi-f\|_L\cdot|g|(1)<\varepsilon\cdot|g|(1).$$

Сопоставляя два последних неравенства, получим

$$\||\tilde{T}|f-\int_0^1 f\,d|g|\|<\varepsilon[|\tilde{T}|1+|g|(1)]=\varepsilon\cdot H,\quad H=|\tilde{T}|1+|g|(1).$$

Таким образом,

$$|\tilde{T}|f=\int_0^1 f\,d|g|.$$

Но для $f\in C[0,1]$ верно $|\tilde{T}|f=|T|f$, поэтому

$$|T|f=\int_0^1 f\,d|g|.$$

Г) Рассмотрим вопрос об единственности представления $Tf=\int_0^1 f\,dg$. Допустим, что $g\in V(0,1;X)$ и $\int_0^1 f\,dg=0$ для всех $f\in C[0,1]$. Возьмем в качестве f непрерывную функцию, равную I в интервале $[0,t)$, равную 0 в интервале $(t+\tau,1]$ и линейную между t и $t+\tau$. Получим

$$\int_0^1 f\,dg=\int_0^t dg+\int_t^{t+\tau} f\,dg=g(t)+\int_t^{t+\tau} f\,dg.$$

Последний интеграл можно оценить следующим образом:

$$\rho\Big(\int_t^{t+\tau} f\,dg\Big)\le\int_t^{t+\tau}|f|\,d|g|<\int_t^{t+\tau}d|g|=|g|(t+\tau)-|g|(t)\xrightarrow{(0)}0$$

при $\tau\to 0$ ввиду непрерывности $|g|(t)$ справа. Отсюда вытекает, что $g(t)=0$ для всех $t\in[0,1]$, следовательно, представление оператора $T\in M(C[0,1],X)$ в указанном виде единственно. Теорема доказана. ■

СЛЕДСТВИЯ. I) РНП $M(C[0,1],X)$ и $V(0,1;X)$ изоморфны и изометричны.

2) РНП $(V(0,1;X),|\cdot|,V(0,1;E))$ является ПБК, если (X,ρ,E) – ПБК (см. [5]).

3) Если $X=E$ – K-пространство, то из доказанного следует теорема Канторовича (см. [I-3]).

4) Если X — банахово пространство, то мажорируемость $T: C[0,1] \longrightarrow X$ означает, что существует $g \in V(0,1;R)$, для которой $\|Tf\|_X \leq \int_0^1 |f| dg$ $(f \in C[0,1])$. По теореме Пича (см. [8,9]) отсюда вытекает, что $M(C[0,1], X)$ совпадает с классом абсолютно суммирующих операторов из $C[0,1]$ в X.

Автор приносит благодарность С.А.Малюгину за внимание к работе.

Литература

1. Канторович Л.В. Основы теории функций вещественного переменного со значениями, принадлежащими полуупорядоченному линейному пространству// Докл. АН СССР. - 1936. - Т.2, № 9. - С.359-364.
2. Канторович Л.В. Линейные операции в полуупорядоченных пространствах// Мат. сб.- 1940. - Т.7, № 49. - С.209-284.
3. Канторович Л.В., Вулих Б.З., Пинскер А.Г. Функциональный анализ в полуупорядоченных пространствах. - М.-Л.: Гостехиздат, 1950.
4. Вулих Б.З. Введение в теорию полуупорядоченных пространств.- М.: ГИФМЛ, 1961.
5. Кусраев А.Г., Стрижевский В.З. Решеточно нормированные пространства и мажорированные операторы// Исследования по геометрии и анализу. - Новосибирск: Наука, 1987. - С.132-158.
6. Wright J.D.M. Measures with values in a partially ordered vector space // Proc. London Math. Soc. - 1972.- V.25, N 3.- P.675-688.
7. Ginculeanu N. Vector measures. - Berlin: VEB Deutscher Verlag der Wissenchaften, 1966.
8. Diestel J., Uhl J.J. Vector measures.- Providence: Amer. Math. Soc., 1977 (Mathematical survey, v.15).
9. Левин В.Л. Выпуклый анализ в пространствах измеримых функций и его применения в математической экономике. - М.: Наука, 1985.

Поступила 07.04.1988 г.