Выпук 43(60) ОПТИМИЗАЦИЯ 1988 г.

Выпуклый анализ и смежные вопросы

УДК 517.98

ОБ ОСКОЛКАХ МАЖОРИРОВАННОГО ОПЕРАТОРА

Е.В.Колесников

В последнее время существенное развитие получила предложенная Л.В.Канторовичем теория мажорированных операторов на абстрактно нормированных пространствах (см. [1-3]). В [3] был поставлен вопрос о вычислении порядковых проекций таких операторов. В данной заметке приводится ряд формул для вычисления проекции на компоненту мажорированного оператора.

Рассмотрим вещественное векторное пространство X, архимедову векторную решетку E и E-значную абстрактную норму ρ, определенную на X. Тройку (X,ρ,E) назовем решеточно нормированным пространством (РНП). При этом, говоря о РНП, всегда будем считать, что норма разложима по Канторовичу (см. [1]): для любого $x \in X$ и $e \in E^+$ такого, что $e \leq \rho(x)$, найдется $y \in X$, для которого $\rho(y)=e$, $\rho(x-y)=\rho(x)-e$.

Пространством Банаха - Канторовича (ПБК) назовем o-полное РНП.

Рассмотрим РНП (X,ρ,E) и ПБК (Y,q,F). Предполагаем, что $\{q(Y)\}^{dd}=F$. Несложно проверить, что F - K-пространство и, следовательно, регулярные операторы из E в F также образуют K-пространство $\mathcal{L}_r := \mathcal{L}_r(E,F)$. В пространстве мажорированных операторов $M := M(X,Y)$ введем абстрактную норму, сопоставляя каждому оператору $T \in M$ наименьшую из его мажорант $\|T\| \in \mathcal{L}_r$. При этом оказывается, что $(M,\|\ \|,\mathcal{L}_r)$ есть ПБК и, в частности, норма $\|\ \|$ разложима.

Обозначим через $\mathfrak{Pr}(\mathcal{L}_r)$ алгебру порядковых проекторов в K-пространстве $\mathcal{L}_r$. Из разложимости нормы $\|\ \|$ следует, что каждый проектор $\pi \in \mathfrak{Pr}$ индуцирует операцию проектирования в пространстве M: для любого $T \in M$ найдется единственный оператор $\pi T \in M$ такой, что $\|\pi T\| = \pi \|T\|$ и $\|T-\pi T\|=\|T\|-\pi\|T\|$. Таким образом на M определена алгебра $\mathfrak{Rr}(M)$ порядковых проекторов, изоморфная порождающей ее алгебре $\mathfrak{Rr}(\mathcal{L}_r)$.

Для произвольных операторов $\varphi \in \mathcal{L}_r$ и $T \in M$ рассмотрим множества

$$\mathcal{E}(\varphi)=\{\pi\varphi:\pi\in \mathfrak{Rr}(\mathcal{L}_r)\}=\{S\in\mathcal{L}_r:|S|\wedge|\varphi-S|=0\};$$

$$\mathcal{E}(T)=\{\pi T:\pi\in\mathfrak{Rr}(M)\}=\{S\in M:\|S\|\wedge\|T-S\|=0\}$$

осколков операторов φ и T соответственно.

Пусть $\varphi\in\mathcal{L}_r^+$. Напомним некоторые сведения о структуре множества $\mathcal{E}(\varphi)$.

В работе [4] были введены проекторы $\pi_e\in\mathfrak{Rr}(\mathcal{L}_r)$, где $e\in E^+$ и

$$\pi_e\varphi z=\sup_n\varphi(z\wedge ne)\quad(z\geqslant 0).$$

Рассмотрим множество $A\subset\mathfrak{Rr}(\mathcal{L}_r)$ проекторов вида $o\text{-}\sum\rho_\alpha\cdot\pi_{e_\alpha}$, где $(e_\alpha)\subset E^+$, $(\rho_\alpha)\subset\mathfrak{Rr}(F)$ – разбиение единичного проектора $1\in\mathfrak{Rr}(F)$, т.е. $\sup\rho_\alpha=1$, $\rho_\alpha\wedge\rho_\beta=0$ $(\alpha\neq\beta)$. Обозначим через $A(\varphi)^\downarrow$ множество точных нижних граней направленных подмножеств $A(\varphi)=\{\pi\varphi:\pi\in A\}$, $A(\varphi)^{\downarrow\uparrow}$ – множество точных верхних граней направленных подмножеств $A(\varphi)^\downarrow$. Известно, что $\mathcal{E}(\varphi)=A(\varphi)^{\downarrow\uparrow}$.

В множестве A введем порядок $\gg$, полагая $o\text{-}\sum\rho_\alpha\times\pi_{e_\alpha}\gg o\text{-}\sum\rho_\beta\cdot\pi_{e_\beta}$, если для любого β найдется α такое, что $\rho_\beta\leqslant\rho_\alpha$ и $e_\beta\leqslant e_\alpha$.

1. Для произвольного оператора $S\in\mathcal{L}_r^+$ символом σ_S обозначим проектор в $\mathcal{L}_r$ на компоненту $\{S\}^{dd}$. Из структуры $\mathcal{E}(\varphi)$ следует справедливость следующей формулы (ср. [2]):

$$(\varphi-\sigma_S\varphi)e=\sup\{\inf_n\pi_n\varphi e:\pi_n\in A,\ \pi_n\gg\pi_{n+1},\ n\in N,\ \pi_nSe\leqslant\tfrac{1}{n}Se\}\quad(e\in E^+).$$

2. Пусть $e\in E^+$ и $T\in M$, для каждого $x\in X$ положим

$$\pi_eTx=o\text{-}\lim\{Tx_n:\rho(x-x_n)=\rho(x)-\rho(x_n),$$

$$\rho(x_n) = \|T\|(\rho(x) \wedge ne)\}.$$

Несложно проверить, что $\pi_e T$ – корректно определенный осколок оператора T и $\|\pi_e T\| = \pi_e \|T\|$.

Если теперь $\pi = o\text{-}\sum \rho_\alpha \cdot \pi_{e_\alpha} \in A$, то ясно, что соотношение $\pi T x = o\text{-}\sum \rho_\alpha \cdot \pi_{e_\alpha} T x$ определяет соответствующий осколок оператора T. Всюду в приводимых формулах o-пределы в ПБК существуют.

3. Справедливо следующее утверждение: пусть $T \in M$, $(T_\alpha) \subset \mathcal{E}(T)$ и $\|T_\alpha\| \xrightarrow{o} \varphi$. Тогда найдутся $S = o\text{-}\lim T_\alpha \in \mathcal{E}(T)$ и $\|S\| = \varphi$.

Действительно, для произвольного $x \in X$ имеем

$$q(T_\alpha x - T_\beta x) \le \|T_\alpha - T_\beta\| \rho(x) \le \varphi \wedge (\|T - T_\alpha\| +$$

$$+ \|T - T_\beta\|)\rho(x) + (\|T\| - \varphi) \wedge (\|T_\alpha\| + \|T_\beta\|)\rho(x) \xrightarrow{o} 0.$$

Следовательно, направление $T_\alpha x$ o-фундаментально и существует $S = o\text{-}\lim T_\alpha$. Очевидно, что $\|S\| = \varphi$ и $S \in \mathcal{E}(T)$.

4. Из пп.I и 3 получаем, что для произвольных операторов $T, S \in M$ и $x \in X$ справедливо равенство

$$(T - \sigma_{\|S\|} T)x = o\text{-}\lim\{r\text{-}\lim_n Tx : \pi_n \in A,$$

$$\pi_n \gg \pi_{n+1},\ n \in N,\ \pi_n \|S\| \rho(x) \le \frac{1}{n} \|S\| \rho(x)\}.$$

В частности, если F – пространство вещественных чисел, т.е. Y – банахово пространство, то мажоранты операторов являются функционалами и формула принимает вид

$$(T - \sigma_{\|S\|} T)x = o\text{-}\lim\{r\text{-}\lim_n \pi_n Tx :$$

$$(e_n) \subset E^+,\ e_n \downarrow,\ \pi_{e_n} \|S\| \rho(x) \le \frac{1}{n}\}.$$

Кроме того, справедлива формула

$$(T - \sigma_{\|S\|} T)x = o\text{-}\lim\{o\text{-}\lim_m r\text{-}\lim_n \pi_{(e_n - \frac{1}{m}\rho(x))^+} Tx :$$

$$0 \le (e_n) \le \rho(x),\ e_n \downarrow,\ \|S\| e_n \le \frac{1}{n}\},$$

имеющая аналогичный вид и в операторном случае.

5. Исходя из п.3, можно вычислить также порядково непрерывную составляющую мажорированного оператора (ср. [3]).

Пусть $\mathcal{J}d(E)$ - множество порядково плотных идеалов (= фундаментов) решетки E. В [4] было показано, что для каждого $\varphi \in L_{r}^{+}$ непрерывную составляющую $\varphi_n \in L_n$ оператора φ можно вычислить по формуле

$$\varphi_n e = \inf\{\sup_{q} \pi_q \varphi e : q \in Q^+, Q \in \mathcal{J}d(E)\} \quad (e \in E^+).$$

Следовательно, для каждого оператора $T \in M$ имеет место разложение $T = T_n + T_s$, где $\|T_n\| = \|T\|_n$ и $\|T - T_n\| = \|T\| - \|T\|_n$. При этом

$$T_n x = o\text{-}\lim\{o\text{-}\lim_{q} \pi_q T x : q \in Q^+, Q \in \mathcal{J}d(E)\}.$$

6. Оператор $S \in M$ называют o-непрерывным, если $qSx_\alpha \xrightarrow{o} 0$, как только $px_\alpha \xrightarrow{o} 0$. Множество всех o-непрерывных операторов обозначим через $\mathcal{L}_0$. Множество операторов, имеющих o-непрерывную мажоранту, - через M_n.

Верно следующее равенство (ср. [2]):

$$M_n = \mathcal{L}_0 \cap M.$$

Оператор $S \in M$ называют сингулярным, если для любого $T \in \mathcal{L}_0$ такого, что $\|T\| \leq \|S\|$, следует $T = 0$. Как следствие указанного равенства можно получить такое утверждение: в разложении $T = T_n + T_s$ мажорированного оператора $T \in M$ оператор T_n o-непрерывен, T_s - сингулярен.

Автор благодарит А.Г.Кусраева за интерес к работе.

Литература

1. Канторович Л.В., Вулих Б.З., Пинскер А.Г. Функциональный анализ в полуупорядоченных пространствах. - М.-Л.: Гостехиздат, 1950.
2. Кусраев А.Г., Стрижевский В.З. Решеточно нормированные пространства и мажорированные операторы // Исследования по геометрии и анализу. - Новосибирск: Наука, 1986. - С.56-102.
3. Кусраев А.Г., Малюгин С.А. О порядково непрерывной составляющей мажорированного оператора // Сиб. мат. журн. - 1987. - Т.28, №4. - С.127-139.
4. Колесников Е.В. Осколки положительного оператора // Оптимизация. - 1987. - Вып.40(57). - С.141-146.

Поступила в ред.-изд. отдел
15.03.1988 г.