Выпуск 43(60) ОПТИМИЗАЦИЯ 1988 г.

Численные методы

УДК 519.853

МЕТОДЫ ВОЗМОЖНЫХ НАПРАВЛЕНИЙ ДЛЯ ЭКСТРЕМАЛЬНЫХ ЗАДАЧ ПОЛУБЕСКОНЕЧНОГО ТИПА, I

Р.Тихачке, Б.Шварц

В первой части работы метод возможных направлений исследуется применительно к задачам негладкой выпуклой оптимизации. Установлены достаточные условия сходимости итерационного процесса, используемые далее (во второй части) для обоснования алгоритмов решения задач полубесконечного типа. В предлагаемых алгоритмах поиск направления осуществляется с помощью вспомогательных полубесконечных задач линейного программирования, для решения которых исследуются подходы. основанные на априорной и адаптивной дискретизации.

1. Введение

Статья посвящена применению метода возможных направлений к оптимизационным задачам полубесконечного типа. Такие методы для специальных классов задач изучались в [1,2].

Метод возможных направлений основательно исследован для "обычных" задач математического программирования вида

$$\min\{f(x) : x\in R^n, g_i(x)\le 0,\ i=1(1)m\}$$

(см. [3-5] и др.) с гладкими функциями f, g_i. Однако в полученных при этом результатах существенно используется конечность ограничений и гладкость функций.

В первой части статьи осуществлена некоторая модификация метода возможных направлений, позволяющая распространить его на широкий класс негладких задач. В этом плане существенно обобщены результаты, полученные ранее в работах [3, 5-7].

2. Методы возможных направлений для негладких задач

В качестве исходной рассматривается задача

$$\min\{f(x): x\in R^n\} \qquad (2.1)$$

при следующих условиях.

ПРЕДПОЛОЖЕНИЕ 2.1. Функция $f: R^n \to \bar{R} \equiv R\cup\{+\infty\}$ выпукла и полунепрерывна снизу (п.н.сн.).

ПРЕДПОЛОЖЕНИЕ 2.2. Для некоторой точки x_0 множество $X_0=\{x: f(x)\le f(x_0)\}$ компактно.

Следующая общая схема порождает класс методов возможных направлений для решения задачи (2.1).

Пусть $x_0\in \operatorname{dom} f$ и в результате k-й итерации найдена точка $x_k\in \operatorname{dom} f$. Точка x_{k+1} определяется следующим образом:

1) находим направление z_k такое, что $f'(x_k, z_k)<0$ ($f'(x,z)$ - производная функции f в точке x по направлению z);

2) определяем λ_k из условия

$$f(x_k+\lambda_k z_k)=\min\{f(x_k+\lambda z_k): \lambda\ge 0\}$$

и полагаем $x_{k+1}=x_k+\lambda_k z_k$.

Сходимость методов возможных направлений зависит от процедуры выбора направлений z_k. Если, например, определять из условия

$$z_k=\arg\min\{f'(x_k,z): \|z\|\le 1\},$$

то сходимость $f(x_k)$ к $\min\{f(x)|x\in R^n\}$, вообще говоря, не имеет места (см. примеры в [4, 7]): возникает эффект так называемого "зигзагообразного движения". Для его преодоления будем действовать следующим образом.

Пусть $\{\varepsilon_i\}$ - фиксированная убывающая последовательность положительных чисел с пределом в 0, $R_i(x,\varepsilon_i)$ - некоторое подходящим образом выделенное подмножество множества

$$R(x)=\{z: f'(x,z)<0\}.$$

Конкретизируя в дальнейшем выбор $R_i(x,\varepsilon_i)$, рассмотрим следующий основной метод - метод возможных направлений (МВН):

1^0. Пусть $x_0 \in dom f$, $k:=0$, $\ell:=0$.

2^0. а) Если $R_\ell(x_k,\varepsilon_\ell)=\varnothing$, переходим на шаг 5^0;

б) если $R_\ell(x_k,\varepsilon_\ell)\neq\varnothing$, выбираем $r_k\in R_\ell(x_k,\varepsilon_\ell)$ и переходим на шаг 3^0.

3^0. Определяем $x_{k+1}=x_k+\lambda_k r_k$, как описано выше.

4^0. $k:=k+1$, переходим на шаг 2^0.

5^0. $\ell:=\ell+1$, переходим на шаг 2^0.

Выделение множеств $R_\ell(x,\varepsilon_\ell)$ осуществляется следующим образом. Пусть $B=\{y\in R^n:\|y\|\leq 1\}$, $\|\cdot\|$ – фиксированная норма вектора. Для множества X определим конус возможных направлений в точке $x\in X$:

$K(x,X)=\{r:\exists\bar\lambda=\bar\lambda(r)>0$, при котором $x+\lambda r\in X\ \forall\lambda\in[0,\bar\lambda]\}$.

ПРЕДПОЛОЖЕНИЕ 2.3. Функция $h:R^n\times B\to\bar R$ удовлетворяет следующим условиям:

а) $h(x,r)\geq f'(x,r)$ для всех $(x,r)\in dom f\times B$;

б) для всех $x\in dom f$ функции $h(x,\cdot)$ п.н.сн. на B;

в) существует непрерывная функция φ, определенная на замыкании $cl N$ множества $N=\{(x,r):x\in dom f, r\in K(x,dom f)\cap B\}$, такая, что $f'(x,r)\leq\varphi(x,r)\leq h(x,r)$ для $(x,r)\in cl N$.

С использованием последовательности функций $\{h_\ell\}$, удовлетворяющих предположению 2.3, определим $R_\ell(x,\varepsilon_\ell)=\{r\in B:h_\ell(x,r)<-\varepsilon_\ell\}$. В дальнейшем МВН рассматривается при указанном способе задания $R_\ell(x,\varepsilon_\ell)$.

Естественно, что при фактической реализации МВН внутренний цикл 2^0–4^0 должен выполняться за конечное число шагов.

Используя обозначения

$$X(h_\ell,\varepsilon_\ell)=\{x:h_\ell(x,r)\geq-\varepsilon_\ell\quad\forall r\in B\},$$

$$X(f',0)=\{x:f'(x,r)\geq 0\quad\forall r\in B\},$$

можно сформулировать следующие условия, гарантирующие сходимость МВН:

1. Для каждого ℓ МВН определяет элемент множества $X(h_\ell,\varepsilon_\ell)$ за конечное число шагов.

2. Последовательность $\{h_\ell\}$ должна быть выбрана таким образом, чтобы

$$\liminf_{\ell\to\infty} X(h_\ell,\varepsilon_\ell) \subset X(f',0)$$

$$(\liminf_{\ell\to\infty} M_\ell = \{y : \limsup_{\ell\to\infty} d(y,M_\ell) = 0\},$$

где d – функция расстояния от точки до множества).

ТЕОРЕМА 2.4. Пусть последовательность $\{h_\ell\}$ удовлетворяет предположению 2.3 при всех ℓ. Тогда либо последовательность $\{x_k\}$ оказывается конечной и определяется точка x_{k_0} такая, что $x_{k_0} \in X(h_\ell,\varepsilon_\ell)$ при достаточно больших ℓ, либо $\{x_k\}$ бесконечна и

I) $f(x_{k+1}) < f(x_k)$ для всех k;

2) для каждого ℓ существует индекс k_ℓ такой, что $x_{k_\ell} \in X(h_\ell,\varepsilon_\ell)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. а) Если последовательность $\{x_k\}$ конечная, то процесс останавливается в точке x_{k_0}, в которой при достаточно больших ℓ имеет место $R_\ell(x_{k_0},\varepsilon_\ell) = \emptyset$ и, значит, $x_{k_0} \in X(h_\ell,\varepsilon_\ell)$.

б) Пусть $\{x_k\}$ – бесконечная последовательность. Из предположения 2.3а) в случае 2°б) МВН имеем $0 > h_\ell(x_k,z_k) \geq f'(x_k,z_k)$, так что $\inf\{f(x_k+\lambda z_k) : \lambda \geq 0\} < f(x_k)$, а предположения 2.I и 2.2 гарантируют существование $\lambda_k > 0$, при котором

$$f(x_k+\lambda_k z_k) = \inf\{f(x_k+\lambda z_k) : \lambda \geq 0\}.$$

в) Предположим, что последовательность $\{x_k\}$ бесконечная и, вопреки утверждению теоремы, существует номер ℓ_0 такой, что $x_k \notin X(h_{\ell_0},\varepsilon_{\ell_0})$ при всех k. Тогда должно быть

$$h_{\ell_0}(x_k,z_k) < -\varepsilon_{\ell_0} \quad \text{при всех } k. \tag{2.2}$$

Используя предположение 2.3 (функция φ_{ℓ_0} определена условием 2.3в), имеем

$$f'(x_k,z_k) \leq \varphi_{\ell_0}(x_k,z_k) \leq h_{\ell_0}(x_k,z_k) \leq -\varepsilon_{\ell_0} \tag{2.3}$$

и, значит, $(x_k, z_k) \in N$.

С учетом выбора λ_k на шаге 3° МВН можно утверждать, что при $0 < \lambda < \lambda_k$ имеет место $(x_k+\lambda z_k, z_k) \in N$ и тем самым

$$(x_k+\lambda_k z_k, z_k) \in cl\, N. \tag{2.4}$$

Следовательно, неравенство

$$0 \le f'(x_k+\lambda_k r_k, r_k) \le \varphi_{\ell_0}(x_k+\lambda_k r_k, r_k) \tag{2.5}$$

справедливо при всех k .

Так как функция φ непрерывна на множестве $cl\,N$, можно указать такое t_k , что

$$0 < t_k < \lambda_k , \tag{2.6}$$

$$\varphi_{\ell_0}(x_k+t_k r_k, r_k) = -\frac{1}{2}\varepsilon_{\ell_0} , \tag{2.7}$$

откуда с использованием (2.3), (2.5) имеем

$$f(x_k+\lambda_k r_k)-f(x_k) \le f(x_k+t_k r_k)-f(x_k) \le$$

$$\le t_k f'(x_k+t_k r_k, r_k) \le -\frac{1}{2}\varepsilon_{\ell_0} t_k . \tag{2.8}$$

В силу предположений 2.I и 2.2 последовательность $\{f(x_k)\}$ ограничена снизу и на основании (2.8) имеем

$$0 = \lim_{k\to\infty}[f(x_k+\lambda_k r_k)-f(x_k)] \le -\frac{1}{2}\varepsilon_{\ell_0}\lim_{k\to\infty} t_k ,$$

а значит,

$$\lim_{k\to\infty} t_k = 0 .$$

Учитывая, что последовательности $\{x_k\}$ и $\{r_k\}$ ограничены, не умаляя общности, можем считать, что $x_k \to \bar{x}$, $r_k \to \bar{r}$ и тем самым $x_k+t_k r_k \to \bar{x}$. Окончательно, с учетом непрерывности φ_{ℓ_0} на $cl\,N$ из (2.3), (2.7) получаем противоречие:

$$-\varepsilon_{\ell_0} \ge \lim_{k\to\infty}\varphi_{\ell_0}(x_k, r_k) = \varphi_{\ell_0}(\bar{x},\bar{r}),$$

$$-\frac{1}{2}\varepsilon_{\ell_0} = \lim_{k\to\infty}\varphi_{\ell_0}(x_k+t_k r_k, r_k) = \varphi_{\ell_0}(\bar{x},\bar{r}) ,$$

завершающее доказательство теоремы. ■

Отметим, что приведенное доказательство может быть распространено и на случай, когда минимизация по направлению осуществляется неточно, на основе обычно используемых способов (см. [4]).

В дальнейшем на последовательность $\{h_\ell\}$ накладываются новые условия, гарантирующие, что

$$\lim_{\ell\to\infty}\inf X(h_\ell,\varepsilon_\ell) \subset X(f',0).$$

ПРЕДПОЛОЖЕНИЕ 2.5. Существует последовательность функций $\{\bar h_\ell\}$ такая, что при всех ℓ :

а) $h_\ell(x,\tau) \le \bar h_\ell(x,\tau)$, $\bar h_{\ell+1}(x,\tau) \le \bar h_\ell(x,\tau)$ для любых $(x,\tau) \in dom f \times B$;

б) $\lim_{\ell\to\infty} \sup \bar h_\ell(x,\tau) = f'(x,\tau)$, если (x,τ) удовлетворяют условиям $f'(x,\tau) \le 0$, $\tau \in B$;

в) $\bar h_\ell(\cdot,\tau)$ полунепрерывна сверху (п.н.св.) на множестве $\{x : f'(x,\tau) \le 0\}$ при любом фиксированном $\tau \in B$.

ТЕОРЕМА 2.6. Пусть $\{\varepsilon_\ell\}$ — последовательность положительных чисел с $\lim_{\ell\to\infty} \varepsilon_\ell = 0$, для последовательности функций $\{h_\ell\}$ выполнено предположение 2.5. Тогда

$$\lim_{\ell\to\infty} \inf X(h_\ell,\varepsilon_\ell) \subset X(f',0).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $x_\ell \in X(h_\ell,\varepsilon_\ell)$ для всех ℓ и $\lim_{\ell\to\infty} x_\ell = x_\infty$. Предположим, что $x_\infty \notin X(f',0)$. Тогда существует $\bar\tau \in B$, при котором $f'(x_\infty,\bar\tau) < 0$. Но на основании предположения 2.5б) справедливо

$$0 > f'(x_\infty,\bar\tau) = \lim_{\ell\to\infty} \sup \bar h_\ell(x_\infty,\bar\tau).$$

Тем самым, начиная с некоторого ℓ_0, имеем $\bar h_\ell(x_\infty,\bar\tau) < 0$. Но на основании 2.5а) и 2.5в) имеем противоположное неравенство:

$$\bar h_\ell(x_\infty,\bar\tau) \ge \lim_{i\to\infty} \sup \bar h_\ell(x_i,\bar\tau) \ge \lim_{i\to\infty} \sup \bar h_i(x_i,\bar\tau) \ge$$
$$\ge \lim_{i\to\infty} \sup h_i(x_i,\bar\tau) \ge \lim_{i\to\infty}(-\varepsilon_i) = 0. \quad ▨$$

На основании теорем 2.4 и 2.6 справедлив следующий вывод.

ТЕОРЕМА 2.7. Пусть $\varepsilon_\ell > 0$, $\lim_{\ell\to\infty} \varepsilon_\ell = 0$ и для последовательности функций $\{h_\ell\}$ справедливы предположения 2.3 и 2.5. Тогда последовательность $\{x_k\}$ построенная по МВН, обладает следующими свойствами:

1) $f(x_{k+1}) < f(x_k)$ для всех k ;

2) либо последовательность $\{x_k\}$ конечная и ее последняя точка принадлежит $X(f',0)$, либо $\{x_k\}$ ограничена и каждая ее предельная точка принадлежит $X(f',0)$.

Конкретизируем выбор последовательности $\{h_\ell\}$, используя связь между производной по направлению f' и субдифференциалом выпуклой функции. Рассмотрим функцию

$$h(x,r) = \sup\{\langle r,y\rangle : y \in P(x)\},$$

где точечно-множественное отображение P таково, что $\partial f(x) \subset \subset P(x)$ при любом x . Нас интересует, при каких условиях относительно семейства отображений $\{P_\ell\}$ определенные таким образом функции h_ℓ удовлетворяют предположениям 2.3 и 2.5.

В дальнейшем, не оговаривая особо, мы используем обозначения и терминологию, принятые в [6,8,9] относительно точечно-множественных отображений и в [10] - относительно выпуклых функций.

ТЕОРЕМА 2.8. Пусть X - многогранное выпуклое множество; $\bar{f}$ - конечнозначная выпуклая функция, заданная на открытом множестве, содержащем X; $f(x) = \bar{f}(x) + \delta(x|X)$. Предположим, что точечно-множественное отображение P обладает следующими свойствами:

а) существует такое п.н.сн. точечно-множественное отображение $\bar{P}: X \to 2^{R^n}$, что

$$\partial f(x) \subset \bar{P}(x) \subset P(x) \quad \text{для всех } x \in X;$$

б) $P(x)$ - замкнутое выпуклое множество при любом $x \in X$.

Тогда функция $h(x,r) = \sup\{\langle r,y\rangle : y \in P(x)\}$ удовлетворяет предположению 2.3.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО 1°. На основании определения функции f справедливо

$$f'(x,r) = \begin{cases} \bar{f}'(x,r) & \text{, если } r \in K(x,X), \\ +\infty - \text{в противном случае} \end{cases}$$

и $\partial f(x) = \partial \bar{f}(x) + \partial \delta(x|X)$. Более того, функция $\bar{f}'$ п.н.св. для $(x,r) \in int(dom\, \bar{f}) \times R^n$ (см. [10]). Так как X – многогранное множество, то конус $K(x,X)$ является замкнутым. Отсюда немедленно следует, что $\bar{f}'$ п.н.св. на $X \times R^n$ и также на $cl\, N$. Следовательно, для всех $x \in X$ справедливо

$$f'(x,r) = sup\{\langle r,y_1\rangle : y_1 \in \partial \bar{f}(x)\} +$$

$$+ sup\{\langle r,y_2\rangle : y_2 \in \partial \delta(x|X)\} = sup\{\langle r,y\rangle : y \in \partial f(\bar{x})\}. \qquad (2.9)$$

2°. Учитывая определение функции h и $P(x) \supset \partial f(x)$, имеем для $(x,r) \in X \times B$

$$f'(x,r) \leq h(x,r),$$

причем h п.н.сн. по r как опорная функция. Следовательно, h удовлетворяет предположениям 2.3а) и 2.3б).

3°. Покажем теперь, что существует непрерывная на $cl\, N$ функция φ, удовлетворяющая при $(x,r) \in X \times B$ соотношению

$$f'(x,r) \leq \varphi(x,r) \leq h(x,r).$$

Положим $\bar{h}(x,r) = sup\{\langle r,y\rangle : y \in \bar{P}(x)\}$. Так как $\bar{P}$ п.н.сн. на X, то $\bar{h}$ является п.н.сн. на $X \times B$ (см. [8]). Более того, $\partial f(x) \subset \bar{P}(x)$ влечет

$$f'(x,r) \leq \bar{h}(x,r) \qquad (2.10)$$

при всех $(x,r) \in X \times B$. Функции $g_1(x,r) = arctg\, f'(x,r)$, $g_2(x,r) = arctg\, \bar{h}(x,r)$ являются соответственно п.н.св. и п.н.сн. на $cl\, N$, откуда в свою очередь следует полунепрерывность снизу (на $cl\, N$) точечно-множественного отображения $Q(x,r) = \{z : g_1(x,r) \leq z \leq g_2(x,r)\}$. При каждом (x,r) множество $Q(x,r)$ непустое, выпуклое и замкнутое. Непосредственно из теоремы Майкла (*Michaels*) о селекторе следует существование непрерывной на $cl\, N$ функции g_3 такой, что

$$g_3(x,r) \in Q(x,r) \quad \text{для } (x,r) \in cl\, N. \qquad (2.11)$$

Определяя $\varphi(x,r) = tg\, g_3(x,r)$, имеем на $cl\, N$

$$f'(x,r) \leq \varphi(x,r) \leq \bar{h}(x,r) \leq h(x,r),$$

т.е. предположение 2.3в) также выполнено. ▨

Если X не является многогранным множеством, расширение $P(x)$ множества $\partial f(x)$ должно удовлетворять некоторым дополнительным свойствам.

ТЕОРЕМА 2.9. *Пусть X – выпуклое замкнутое множество, $\operatorname{int} X \neq \emptyset$; $\bar{f}$ – конечнозначная выпуклая функция, заданная на содержащем X открытом множестве; $f(x) = \bar{f}(x) + \delta(x|X)$. Предположим также, что точечно-множественное отображение P обладает следующими свойствами:*

а) Существует п.н.сн. точечно-множественное отображение $\bar{P}: X \to 2^{R^n}$ такое, что

$$\partial f(x) \subset \bar{P}(x) \subset P(x) \quad \text{для } x \in X.$$

б) Нормальный конус к множеству X в точке x содержится во внутренности конуса рецессивных направлений множества $\bar{P}(x)$, т.е.

$$K_x(X) \subset \operatorname{int} 0^+ \bar{P}(x) \cup \{0\},$$

где $K_x(X) = \{y \in R^n : \langle y, z - x \rangle \leq 0$ для всех $z \in X\}$.

в) $P(x)$ выпукло и замкнуто при $x \in X$. Тогда функция h удовлетворяет предположению 2.3.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположения 2.3а) и 2.3б) проверяются так же, как при доказательстве теоремы 2.9. Чтобы показать справедливость 2.3в), положим

$$\underline{h}(x,z) = \begin{cases} \bar{f}'(x,z) & \text{для } z \in [0^+ \bar{P}(x)]^0, \\ +\infty - \text{в противном случае} \end{cases}$$

и $\bar{h}(x,z) = \sup\{\langle z, y \rangle : y \in \bar{P}(x)\}$.

Функция $\bar{f}$ п.н.св. на $X \times R^n$, так как $X \subset \operatorname{int} \operatorname{dom} \bar{f}$ и поляра $[0^+ \bar{P}(x)]^0$ является замкнутой. Следовательно, $\underline{h}$ также п.н.св. на $X \times R^n$. Полунепрерывность снизу функции $\bar{h}$ на $X \times R^n$ имеет место, так как $\bar{P}$ п.н.сн. на X. На основании условия б) теоремы справедливо

$$[0^+\bar P(x)]^0 \in \operatorname{int} K(x,X) \cup \{0\}. \qquad (2.12)$$

Отсюда при $r \in [0^+\bar P(x)]^0$ получаем

$$\underline{h}(x,r) = \bar f'(x,r) = f'(x,r) = \sup\{\langle r,y\rangle : y \in \partial f(x)\} \le$$
$$\le \sup\{\langle r,y\rangle : y \in \bar P(x)\} = \bar h(x,r).$$

Если же $r \notin [0^+\bar P(x)]^0$, то

$$f'(x,r) \le \underline{h}(x,r) = +\infty = \bar h(x,r),$$

и, объединяя последние два соотношения, имеем

$$f'(x,r) \le \underline{h}(x,r) \le \bar h(x,r) \quad \text{для} \quad (x,r) \in X \times R^n.$$

Теперь, как и при доказательстве теоремы 2.8, устанавливается существование непрерывной функции $\varphi : X \times R^n \to \bar R$ такой, что

$$\underline{h}(x,r) \le \varphi(x,r) \le \bar h(x,r) \qquad \text{при } (x,r) \in X \times R^n,$$

откуда ввиду $cl\, N \subset X \times R^n$ следует

$$f'(x,r) \le \underline{h}(x,r) \le \varphi(x,r) \le \bar h(x,r) \qquad (2.13)$$

на $cl\, N$. Наконец, с учетом включения $\bar P(x) \subset P(x)$ для $x \in X$ выполняется $\bar h(x,r) \le h(x,r)$, что вместе с (2.13) обеспечивает справедливость предположения 2.3в). ▨

Выбирая в качестве h_ℓ функции

$$h_\ell(x,r) = \sup\{\langle r,y\rangle : y \in P_\ell(x)\}, \qquad (2.14)$$

можно показать включение

$$\lim_{\ell\to\infty} \inf X(h_\ell, \varepsilon_\ell) \subset X(f',0) \qquad (2.15)$$

при более слабых условиях относительно P_ℓ, чем это требуется для справедливости предположения 2.5.

ТЕОРЕМА 2.10. *Пусть $\{\varepsilon_\ell\}$ – последовательность положительных чисел, $\lim \varepsilon_\ell = 0$; функции h_ℓ определены соотношением (2.14). Пусть также существует последовательность замкнутых выпуклых точечно-множественных отображений $\{\tilde P_\ell\}$, $\tilde P_\ell : X \to 2^{R^n}$, со следующими свойствами:*

а) $P_\ell(x) \subset \tilde P_\ell(x)$, $\tilde P_{\ell+1}(x) \subset \tilde P_\ell(x)$ для $x \in X$ и любого ℓ;

в) $\bigcap\limits_{i=1}^{\infty} \widetilde{P}_\ell(x) = \partial f(x)$ для $x \in X$.

Тогда справедливо включение (2.15).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $x_\ell \in X(h_\ell, \varepsilon_\ell)$ для всех ℓ и $x_\ell \to x_\infty$. При фиксированном K и любом $\tau \in B$ в силу условия а) имеем

$$0 = \lim_{\ell\to\infty}(-\varepsilon_\ell) \le \overline{\lim_{\ell\to\infty}} \min_{\|\tau\|\le 1} h_\ell(x_\ell, \tau) =$$

$$= \overline{\lim_{\ell\to\infty}} \min_{\|\tau\|\le 1} \left(\sup\{\langle\tau, y\rangle : y \in P_\ell(x_\ell)\}\right) \le$$

$$\le \overline{\lim_{\ell\to\infty}} \min_{\|\tau\|\le 1} \left(\sup\{\langle\tau, y\rangle : y \in \widetilde{P}_\ell(x_\ell)\}\right) \le$$

$$\le \overline{\lim_{\ell\to\infty}} \min_{\|\tau\|\le 1} \left(\sup\{\langle\tau, y\rangle : y \in \widetilde{P}_K(x_\ell)\}\right) =$$

$$= \overline{\lim_{\ell\to\infty}} \sup_{y\in\widetilde{P}_K(x_\ell)} \left(\min\{\langle\tau, y\rangle : \|\tau\| \le 1\}\right).$$

Отсюда ввиду эквивалентности норм в R^n справедливо

$$\min\{\langle\tau, y\rangle : \|\tau\|\le 1\} \le -c\|y\| \quad (c > 0)$$

и далее следует

$$0 = \lim_{\ell\to\infty}(-\varepsilon_\ell) \le \lim_{\ell\to\infty} \sup\{-c\|y\| : y \in \widetilde{P}_K(x_\ell)\} =$$

$$= \lim_{\ell\to\infty}\left[-\inf\{c\|y\| : y \subset \widetilde{P}_K(x_\ell)\}\right].$$

По условию теоремы $\widetilde{P}_K(x_\ell)$ выпукло и замкнуто, так что минимальный по норме элемент $y_\ell \in \widetilde{P}_K(x_\ell)$ существует. Ясно, что

$$\lim_{\ell\to\infty} y_\ell = 0. \tag{2.16}$$

Так как $\widetilde{P}_K$ замкнуто и $x_\ell \to x_\infty$, то из (2.16) следует, что включение

$$0 \in \widetilde{P}_K(x_\infty) \tag{2.17}$$

имеет место для всех K. Отсюда на основании (2.17) и условия б) справедливо $0 \in \partial f(x_\infty)$, т.е. $x_\infty \in X(f, 0)$. ▨

Литература

1. Blatt H.P. Steltigkeitseigenschaften von Optimierungsaufgaben und lineare Chebyshev-Approximation // Approximation Theory. - Warshawa, 1975.
2. Blum E., Oettli W. The principle of feasible directions for nonlinear approximants and infinitely many constraints. -
3. Großmann Ch., Kleinmichel.P. Verfahren der nichtlinearen Optimierung. - Leipzig, 1976.
4. Schwarz.B. Untersuchungen zur Konvergenz der Verfahren zulässiger Richtungen fur Optimierungsaufgaben in endlichdimensionalen Räumen/Doctoral Thesis.- Karl-Marx-Stadt: TU, 1980.
5. Зойтендейк Г. Методы возможных направлений /Пер. с англ. - М.: ИЛ. 1963.
6. Huard P. Optimization algorithms and point-to-set maps // Math. Progr. - 1975., - N8.
7. Luenberger D.G. Introduction to linear and nonlinear programming. - London: Addison-Wesley, 1973.
8. Hogan W.W. Point-to-set in mathematical programming // SIAM Review. - 1973. - N 15.
9. Holmes R.B. Geometric functional analysis and its applications. - Berlin - Heidelberg - New York, 1975.
10. Рокафеллар Р.Т. Выпуклый анализ / Пер. с англ. - М.: ИЛ, 1970.

Поступила в ред.-изд. отдел
28.09.1987 г.