Выпуск 43(60) ОПТИМИЗАЦИЯ 1988 г.

Численные методы

УДК 519.95

ПОСТРОЕНИЕ ОБОБЩЕННОГО РЕШЕНИЯ ЛИНЕЙНОЙ СИСТЕМЫ НЕРАВЕНСТВ

А.В.Зыкина

1. Постановка задачи. Обобщенным решением [1] линейной системы неравенств (в общем случае несовместной)

$$Hy+g \leq 0 \qquad (1)$$

называется вектор y, для которого решение $x=x(y)$ линейной задачи с условиями дополнительности

$$Px \geq Hy+g,\ x \geq 0,\ x'Px = x'(Hy+g) \qquad (2)$$

удовлетворяет условию $H'x=0$. Здесь H – матрица размерности $m \times n$, y – вектор размерности n, x и g – векторы размерности m, P – положительно определенная матрица соответствующей размерности.

Известно [1], что задача (2) имеет единственное решение $x=x(y) \geq 0$ при любом векторе y и для любой системы (1) существует обобщенное решение.

В [2] автором исследовано поведение идеальной траектории метода последовательных приближений, получаемой как решение соответствующей дифференциальной системы $\dot{y}=-H'x(y)$. Для поиска обобщенного решения предложен алгоритм A градиентного типа, который является развитием метода последовательных приближений, состоящего в следующем [1]. Выберем произвольную начальную точку y_0. Последовательность $\{y_k\}$ строится в результате описываемых ниже шагов.

Для уже полученной точки y_k находим x_k как решение задачи с условиями дополнительности

$$Px_k \geqslant Hy_k + g,\ x_k \geqslant 0,\ x_k' P x_k = x_k'(Hy_k + g). \qquad (3)$$

Если окажется, что $H'x_k = 0$, то будет получено обобщенное решение. В противном случае, выбрав некоторую длину шага $\alpha_k > 0$, полагаем

$$y_{k+1} = y_k - \alpha_k H' x_k \qquad (4)$$

и переходим к следующей итерации.

В настоящей работе рассматривается прием преодоления вырожденности, возможной при работе алгоритма A . Вводится понятие $\mathcal{E}$-вырожденности, на основе которого разрабатывается алгоритм отыскания обобщенного решения.

2. Вырожденность. При нахождении для текущей точки y_k единственного решения x_k линейной задачи с условиями дополнительности (3) возможна неоднозначность в определении базиса. Эта неоднозначность возникает в тех случаях, когда точка x_k является вырожденной.

Решение x_k задачи (3) называется вырожденным, если существуют номера j такие, что выполняются равенства

$$(x_k)_j = 0,\ (Px_k)_j = (Hy_k + g)_j .$$

Такие номера j назовем вырожденными номерами точки x_k .

Номера компонент точки x_k , для которых выполняются соотношения

$$(x_k)_j > 0,\ (Px_k)_j = (Hy_k + g)_j ,$$

назовем базисными номерами, а номера , для которых выполняются соотношения

$$(x_k)_j = 0,\ (Px_k)_j > (Hy_k + g)_j$$

– небазисными номерами точки x_k .

Траектории $x(\alpha) = x(y(\alpha))$ и $y(\alpha)$ для рассмотренной в работе [2] дифференциальной системы, конечно, не зависят от выбора базиса в вырожденных точках. Однако при численном нахождении этих траекторий вопрос о выборе базиса оказывается существенным, так как точки вырождения служат, вообще говоря, точками разрыва производной у траектории $x(\alpha)$ и соответственно – разрыва второй производной для $y(\alpha)$. Поэтому возникает вопрос о нахождении в вырожденной точке x_k направления ξ_k для траектории $x(\alpha)$. Очевидно, ξ_k необходимо выбирать так, чтобы, во-первых, обеспечить возможность некоторого шага $\alpha_k > 0$

в направлении ξ_k и, во-вторых, сохранить базисные и небазисные номера точки x_k неизменными, возможно пополнив их за счет вырожденных номеров. Это означает, что при $\eta_k = -H'x_k$ для всех $0<\alpha<\alpha_k$ необходимо требовать выполнения соотношений

$$P(x_k+\alpha\xi_k) \geq H(y_k+\alpha\eta_k)+g, \quad x_k+\alpha\xi_k \geq 0, \tag{5}$$

$$(x_k+\alpha\xi_k)'P(x_k+\alpha\xi_k) = (x_k+\alpha\xi_k)'[H(y_k+\alpha\eta_k)+g], \tag{6}$$

причем базисные и небазисные компоненты точки x_k должны сохраниться и для точки $x_k+\alpha\xi_k$. Относительно же вырожденных компонент вопрос включения их в базис решается особо.

Разобьем векторы x_k, ξ_k, g и матрицы P и H согласно разбиению компонент точки x_k на базисные, вырожденные и небазисные:

$$x_k = \begin{pmatrix} x_{k1} \\ x_{k2} \\ x_{k3} \end{pmatrix} \quad \xi_k = \begin{pmatrix} \xi_{k1} \\ \xi_{k2} \\ \xi_{k3} \end{pmatrix} \quad g = \begin{pmatrix} g_1 \\ g_2 \\ g_3 \end{pmatrix} \quad P = \begin{pmatrix} P_{11} & P_{12} & P_{13} \\ P_{21} & P_{22} & P_{23} \\ P_{31} & P_{32} & P_{33} \end{pmatrix} \quad H = \begin{pmatrix} H_1 \\ H_2 \\ H_3 \end{pmatrix}$$

Тогда справедливы следующие соотношения.

Для базисных компонент:

$$x_{k1} > 0, \quad P_{11}x_{k1} + P_{12}x_{k2} = H_1 y_k + g_1 \tag{7}$$

или, в других обозначениях, $[x_k]_1 > 0$, $[Px_k]_1 = [Hy_k+g]_1$.

Для вырожденных компонент:

$$x_{k2} = 0, \quad P_{21}x_{k1} + P_{22}x_{k2} = H_2 y_k + g_2, \tag{8}$$

или, в других обозначениях, $[x_k]_2 = 0$, $[Px_k]_2 = [Hy_k+g]_2$.

Для небазисных компонент:

$$x_{k3} = 0, \quad P_{31}x_{k1} + P_{32}x_{k2} > H_3 y_k + g_3 \tag{9}$$

или, в других обозначениях; $[x_k]_3 = 0$, $[Px_k]_3 > [Hy_k+g]_3$.

При $\alpha \leq \alpha_k$ для невырожденных компонент соотношения (7) и (9) должны сохраниться и в точке $x_k+\alpha\xi_k$. Это означает, что будут выполняться соответственно (7) и (9) следующие условия:

$$P_{11}\xi_{k1} + P_{12}\xi_{k2} = H_1\eta_k, \quad \xi_{k3} = 0. \tag{10}$$

Для вырожденных же номеров нужно потребовать выполнения соответствующих соотношений в (5):

$$x_{k2}+\alpha\xi_{k2}\geqslant 0,\ [P(x_k+\alpha\xi_k)]_2\geqslant[H(y_k+\alpha\eta_k)+g]_2.$$

При этом, учитывая (8), получим условия на вырожденные компоненты:

$$\xi_{k2}\geqslant 0,\ P_{21}\xi_{k1}+P_{22}\xi_{k2}\geqslant H_2\eta_k. \qquad (11)$$

Теперь остается обеспечить выполнение условий дополнительности (6):

$$x_k'Px_k+\alpha[x_k'P\xi_k+\xi_k'Px_k]+\alpha^2\xi_k'P\xi_k=$$
$$=x_k'(Hy_k+g)+\alpha[x_k'H\eta_k+\xi_k'Hy_k+\xi_k'g]+\alpha^2\xi_k'H\eta_k.$$

Так как в точке x_k выполняются условия дополнительности $x_k'Px_k=x_k'(Hy_k+g)$, то для выполнения (6) достаточно приравнять коэффициенты при α и α^2:

$$x_k'P\xi_k+\xi_k'Px_k=x_k'H\eta_k+\xi_k'(Hy_k+g),\ \xi_k'P\xi_k=\xi_k'H\eta_k.$$

перегруппировав слагаемые в первом равенстве, получим равенство

$$x_k'[H\eta_k-P\xi_k]=\xi_k'[Px_k-(Hy_k+g)],$$

которое справедливо автоматически, ввиду (7)-(10). Из второго равенства, учитывая равенство $\xi_{k3}=0$, получим условие

$$\begin{pmatrix}\xi_{k1}\\ \xi_{k2}\end{pmatrix}'\begin{pmatrix}P_{11} & P_{12}\\ P_{21} & P_{22}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\xi_{k1}\\ \xi_{k2}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\xi_{k1}\\ \xi_{k2}\end{pmatrix}'\begin{pmatrix}H_1\eta_k\\ H_2\eta_k\end{pmatrix} \qquad (12)$$

которое является условием дополнительности для системы

$$\begin{aligned}&P_{11}\xi_{k1}+P_{12}\xi_{k2}=H_1\eta_k,\\ &P_{21}\xi_{k1}+P_{22}\xi_{k2}\geqslant H_2\eta_k,\ \xi_{k2}\geqslant 0,\end{aligned} \qquad (13)$$

объединяющей полученные ранее условия (10) и (11).

Учитывая, что ξ_{k1} – любого знака, можем выразить ξ_{k1} через ξ_{k2}:

$$\xi_{k1}=P_{11}^{-1}[H_1\eta_k-P_{12}\xi_{k2}] \qquad (14)$$

и подставить в (12) и (13). В результате получим следующую задачу с условиями дополнительности:

$$\begin{aligned}&[P_{22}-P_{21}P_{11}^{-1}P_{12}]\xi_{k2}\geqslant[H_2-P_{21}P_{11}^{-1}H_1]\eta_k;\ \xi_{k2}\geqslant 0,\\ &\xi_{k2}'[P_{22}-P_{21}P_{11}^{-1}P_{12}]\xi_{k2}=\xi_{k2}'[H_2-P_{21}P_{11}^{-1}H_1]\eta_k.\end{aligned} \qquad (15)$$

Матрица $P_{22}-P_{21}P_{11}^{-1}P_{12}$ в задаче (15) является положительно определеной в силу положительной определенности матрицы P. Действительно, для всякого вектора $z\neq 0$ надлежащей размерности, полагая

$$x=\begin{pmatrix}-P_{11}^{-1}P_{12}z\\ z\\ 0\end{pmatrix}$$

получим $z'(P_{22}-P_{21}P_{11}^{-1}P_{12})z=x'Px>0$.

Таким образом, задача (15) всегда имеет единственное решение. Это решение,в свою очередь, может быть вырожденным, и для решения вопроса, как поведет себя точная траектория, тогда придется строить по тому же принципу вариации более высоких порядков. Для наших же целей это не нужно, так как найденное направление ξ_k однозначно и в сочетании с направлением $\eta_k=-H'x_k$ обеспечивает сохранение соотношений (5)-(6) при достаточно малых положительных α. При этом базис в точке x_k будем составлять из номеров положительных компонент вектора $x_k+\alpha\xi_k$ при малых положительных α.

Важным для реализации алгоритма отыскания обобщенного решения является факт сохранения в задаче (15) специфики исходной задачи (3) при выборе матрицы P треугольной или диагональной.

3. $\mathcal{E}$-в ы р о ж д е н н о с т ь. Если в методе последовательных приближений (4) шаг α_k ограничивать условием сохранения в точке $x(y_{k+1})$ базиса $\mathcal{B}$, действующего в точках $x(y_k-\alpha H'x_k)$, $0<\alpha<\alpha_k$, то возможны итерации, на которых шаг α_k будет слишком мал. Это произойдет, если в малой окрестности текущей точки x_k существует точка $\tilde{x}_k$ с базисом $\mathcal{B}_1$, отличным от базиса $\mathcal{B}$.

Напрашивается следующий вывод: направление движения в точке y_k (и соответственно $x_k=x(y_k)$) необходимо определять с учетом почти вырожденных компонент в (7) и (9). Это приводит к антизигзаговой политике и понятию $\mathcal{E}$-вырожденности, вполне аналогичных тем, которые рассматриваются для задач математического программирования.

Решение x_k задачи (3) называется $\mathcal{E}$-вырожденным, если существуют номера j, для которых

$$0\leq (x_k)_j\leq \mathcal{E},\quad 0\leq (Px_k-Hy_k-g)_j\leq \mathcal{E}.$$

Такие компоненты в решении x_k будем называть $\mathcal{E}$-вырожденными.

Учет ε-выровденности можно интерпретировать как некоторое эквивалентное изменение правой части g в задачах (2) и (3). Действительно, если обозначить через $J_k(\varepsilon)$ номера ε-вырожденных компонент, через e^j – j-й стандартный орт и положить

$$a=\sum_{j\in J_k(\varepsilon)}(x_k)_j e^j,\quad b=\sum_{j\in J_k(\varepsilon)}(Px_k-Hy_k-g)_j e^j,$$

$$\tilde{x}_k=x_k-a,\quad \tilde{g}=g+b-Pa,$$

то вектор $\tilde{x}_k$ будет удовлетворять соотношениям

$$P\tilde{x}_k\geqslant Hy_k+\tilde{g},\ \tilde{x}_k\geqslant 0,\ \tilde{x}_k'P\tilde{x}_k=\tilde{x}_k'(Hy_k+\tilde{g}), \tag{I6}$$

т.е. решать задачу вида (3), но с измененным свободным членом. При этом относительно задачи (I6) компоненты с номерами из $J_k(\varepsilon)$ будут вырожденными в строгом смысле. Кроме того, справедливы оценки

$$\|g-\tilde{g}\|\leqslant\varepsilon(1+\|P\|)\sqrt{m}, \tag{I7}$$

$$\|x_k-\tilde{x}_k\|\leqslant\varepsilon\sqrt{m}. \tag{I8}$$

Поскольку свободный член $\tilde{g}$ не участвует в задаче (I5), то для определения направления ξ_k при учете ε-вырожденности следует использовать ту же задачу (I4)-(I5), взяв в качестве η_k вектор $-H'x_k$.

4.А л г о р и т м AI. Идея предлагаемого алгоритма состоит в том, что на каждой итерации будем оперировать не с базисом $\mathcal{B}$, который соответствует текущей точке x_k, а с базисом $\mathcal{B}_1$, определенным при учете ε-вырожденности точки x_k. Не исключено, что точка x_k не является ε-вырожденной, тогда базис $\mathcal{B}_1$ будет совпадать с базисом $\mathcal{B}$. В общем случае будем считать, что совпадения нет.

Обозначим через $\eta_k=-H'x_k$ направление изменения y на k-м шаге, через $\tilde{y}(\alpha)=y_k+\alpha\eta_k$ – приближенную траекторию на k-м шаге, через $\tilde{S}(\alpha)=S(\tilde{y}(\alpha))$ – потенциальную функцию $S(y)=\|H'x(y)\|$ вдоль приближения $\tilde{y}(\alpha)$, через $x(\tilde{y}(\alpha))$ – траекторию параметрической линейной задачи с условиями дополнительности

$$Px\geqslant H\tilde{y}(\alpha)+g,\ x\geqslant 0,\ x'Px=x'(H\tilde{y}(\alpha)+g), \tag{I9}$$

соотвествующей задаче (3), через $\widetilde{x}(\widetilde{y}(\alpha))$ - траекторию параметрической линейной задачи с условиями дополнительности

$$P\widetilde{x} \geq H\widetilde{y}(\alpha)+\widetilde{g},\ \widetilde{x} \geq 0,\ \widetilde{x}'P\widetilde{x}=\widetilde{x}'(H\widetilde{y}(\alpha)+\widetilde{g}), \qquad (20)$$

соответствующей задаче (I6). Напомним, что номера ε -вырожденных компонент задачи (3) соответствуют номерам вырожденных в строгом смысле компонент задачи (I6). При этом для g и $\widetilde{g}$ и для $x_k = x(\widetilde{y}(0))$ и $\widetilde{x}_k = \widetilde{x}(\widetilde{y}(0))$ выполняются соотношения (I7) и (I8). Более того, соотношения для невырожденных компонент задачи (3) сохраняются и для задачи (I6), т.е.

$$\widetilde{x}_{k1} = x_{k1},\ [P\widetilde{x}_k]_3 - [Hy_k+\widetilde{g}]_3 = [Px_k]_3 - [Hy_k+g]_3. \qquad (2I)$$

Направление движения ξ_k в ε-вырожденном случае, как следует из предыдущего пункта, находим, решая задачу (I4)-(I5) с $\eta_k = -H'x_k$ так, как если бы ε-вырожденные компоненты точки x_k были вырожденными. Такой выбор направления (как будет показано) обеспечивает некоторый гарантированный шаг $\bar{\alpha}$ с сохранением в точках $x_k + \alpha\xi_k$, $0 \leq \alpha \leq \bar{\alpha}$, соотношений

$$x_k + \alpha\xi_k \geq 0,\ P(x_k+\alpha\xi_k) \geq H(y_k+\alpha\eta_k)+g. \qquad (22)$$

Кроме того, ξ_k является направлением траектории $\widetilde{x}(\widetilde{y}(\alpha))$ задачи (20) в точке $\widetilde{x}_k$, т.е. $\widetilde{x}(\widetilde{y}(\alpha)) = \widetilde{x}_k + \alpha\xi_k$ при малых положительных α и

$$\xi_k = \begin{pmatrix} -P_{\mathcal{B}_1}^{-1} H_{\mathcal{B}_1} H'x_k \\ 0 \end{pmatrix} \qquad (23)$$

где $\mathcal{B}_1$ - базис в точке $\widetilde{x}_k$, состоящий из номеров положительных компонент вектора $\widetilde{x}_k + \alpha\xi_k$ при малых положительных α. При этом граница $\alpha_{\mathcal{B}}$ для параметра α, до которой базис остается неизменным вдоль траектории $\widetilde{x}(\widetilde{y}(\alpha))$ задачи (20), определяется так же, как и для траектории $x(\widetilde{y}(\alpha))$ задачи (I9). А именно, в качестве $\alpha_{\mathcal{B}}$ выбирается максимальное α, при котором сохраняются соотношения

$$\widetilde{x}_k + \alpha\xi_k \geq 0,\ P(\widetilde{x}_k+\alpha\xi_k) \geq H(y_k+\alpha\eta_k)+\widetilde{g}.$$

Назовем траекторию $\hat{x}(\alpha) = x_k + \alpha\xi_k$ ε - траекторией. Будем говорить, что вдоль ε-траектории $\hat{x}(\alpha)$, $0 \leq \alpha \leq \hat{\alpha}$, не меняется базис, если при $\alpha \in [0, \hat{\alpha}]$ выполняются соотношения (22).

ЛЕММА I. Существует $\mathcal{D}>0$, при котором для любого $\Delta>0$ найдется такое $\alpha(\Delta)\geqslant\mathcal{D}\Delta$, что при $\mathcal{E}=\|H'x_k\|\cdot\Delta$ вдоль $\mathcal{E}$-траектории $\hat{x}(\alpha), 0\leq\alpha\leq\alpha(\Delta)$, и вдоль траектории $\tilde{x}(\tilde{y}(\alpha)), 0\leq\alpha\leq\alpha(\Delta)$, задачи (20) базисы не меняются.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\mathcal{B}_1$ – базис, в точке $\tilde{x}_k$ состоящий из номеров положительных компонент вектора $\tilde{x}_k+\alpha\xi_k$ при малых положительных α. Тогда ξ_k определяется по (23).

Из определения следует, что базис $\mathcal{B}_1$ вдоль траектории $\tilde{x}(\tilde{y}(\alpha))$ изменится, когда одна из компонент $(\tilde{x}_k+\alpha\xi_k)_i$ достигнет нуля при некотором $\alpha>0$ или когда при некотором $\alpha>0$ выйдет на равенство одно из неравенств:

$$(P(\tilde{x}_k+\alpha\xi_k))_j>(H(y_k+\alpha\eta_k)+\tilde{q})_j\,.$$

Поэтому максимальный шаг $\tilde{\alpha}$, при котором вдоль траектории $\tilde{x}(\tilde{y}(\alpha))$ базис не меняется, будет следующим:

$$\tilde{\alpha}=\min\left\{\min_{(\xi_k)_i<0}\frac{(\tilde{x}_k)_i}{-(\xi_k)_i},\ \min_{(P\xi_k-H\eta_k)_j<0}\frac{(P\tilde{x}_k-(Hy_k+\tilde{q}))_j}{(H\eta_k-P\xi_k)_j}\right\}.$$

Аналогично, в силу определения, максимальное $\hat{\alpha}$, при котором вдоль $\mathcal{E}$-траектории выполняются соотношения (22) (а значит, максимальный шаг $\hat{\alpha}>0$, при котором вдоль $\mathcal{E}$-траектории не меняется базис), будет следующим:

$$\hat{\alpha}=\min\left\{\min_{(\xi_k)_i<0}\frac{(x_k)_i}{-(\xi_k)_i},\ \min_{(P\xi_k-H\eta_k)_j<0}\frac{(Px_k-(Hy_k+q))_j}{(H\eta_k-P\xi_k)_j}\right\}.$$

Так как в силу формирования задачи (I4)-(I5) неравенство $(\xi_k)_i<0$ возможно только для базисных компонент i, а неравенство $(P\xi_k-H\eta_k)_j<0$ возможно только для небазисных компонент j, то в силу равенств (2I) выполняется равенство $\hat{\alpha}=\tilde{\alpha}=\alpha(\Delta)$.

Так как для любых i и для любых j справедливы соотношения

$$|(\xi_k)_i|\leq\|\xi_k\|=\|P^{-1}_{\mathcal{B}_1}H_{\mathcal{B}_1}H'x_k\|\leq\|P^{-1}_{\mathcal{B}_1}\|\,\|H_{\mathcal{B}_1}\|\,\|H'x_k\|\leq$$

$$\leq \max_{\mathcal{B}_1}\left\{\|P_{\mathcal{B}_1}^{-1}\|\,\|H_{\mathcal{B}_1}\|\right\}\|H'x_k\| = \mathcal{D}_0\|H'x_k\|,$$

$$|(H\eta_k - P\xi_k)_j| \leq \|H\eta_k - P\xi_k\| \leq$$

$$\leq \|H\|\,\|\eta_k\| + \|P\|\,\|\xi_k\| \leq (\|H\| + \mathcal{D}_0\,\|P\|)\cdot\|H'x_k\|$$

и так как по определению $\mathcal{E}$-вырожденности для небазисных компонент выполняются неравенства $(x_k)_i > \mathcal{E}$ и $(Px_k-(Hy_k+g))_j > \mathcal{E}$, то

$$\alpha(\Delta) > \min\left\{\frac{\mathcal{E}}{\mathcal{D}_0\|H'x_k\|},\ \frac{\mathcal{E}}{(\|H\|+\mathcal{D}_0\|P\|)\,\|H'x_k\|}\right\} =$$

$$= \min\left\{\frac{\|H'x_k\|\,\Delta}{\mathcal{D}_0\|H'x_k\|},\ \frac{\|H'x_k\|\,\Delta}{(\|H\|+\mathcal{D}_0\|P\|)\,\|H'x_k\|}\right\} =$$

$$= \min\left\{\frac{1}{\mathcal{D}_0},\ \frac{1}{\|H\|+\mathcal{D}_0\|P\|}\right\}\Delta = \mathcal{D}\cdot\Delta.$$

Лемма доказана.

Практически для определения величины шага α_k вдоль приближения $\widehat{y}(\alpha) = y + \alpha\eta_k$ и для обеспечения при этом сходимости алгоритма поступим следующим образом. Рассмотрим функцию $\hat{S}(\alpha) = \|H\hat{x}(\alpha)\|$ и сравним поведение этой функции с поведением потенциальной функции $S(y)$ вдоль траектории $\widehat{y}(\alpha)$ на промежутке $[0, \alpha_{\mathcal{B}}]$, где $\alpha_{\mathcal{B}} = \alpha(\Delta)$ определяется согласно лемме I.

ЛЕММА 2. Оценка отклонения потенциальной функции $\widetilde{S}(\alpha)$ от функции $\hat{S}(\alpha)$ при $\alpha \leq \alpha_{\mathcal{B}}$ имеет вид

$$|\hat{S}(\alpha) - \widetilde{S}(\alpha)| \leq C_S\cdot\mathcal{E},$$

где константа $C_S > 0$ зависит только от матриц P и H.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим траектории $x(\widetilde{y}(\alpha))$ и $\widehat{x}(\widetilde{y}(\alpha))$ задач (I9) и (20) соответственно. В силу оценки

$$\|x(\widetilde{y}(\alpha)) - \widehat{x}(\widetilde{y}(\alpha))\| \leq \frac{1}{\beta}\|g - \widetilde{g}\|,$$

полученной в работе [2], и в силу неравенства (I7) для любого $\alpha \geq 0$ имеет место оценка

$$\|x(\tilde{y}(\alpha))-\tilde{x}(\tilde{y}(\alpha))\| \le \frac{1}{\beta}\|g-\tilde{g}\| \le \frac{1}{\beta}(1+\|P\|)\sqrt{m}\cdot\varepsilon.$$

Так как при $\alpha \le \alpha_{\beta}$ вдоль траектории $\tilde{x}(\tilde{y}(\alpha))$ базис не меняется, то в силу (18) при $\alpha \le \alpha_{\beta}$ справедлива оценка

$$\|\hat{x}(\alpha)-\tilde{x}(\tilde{y}(\alpha))\| = \|x_k+\alpha\xi_k-\tilde{x}_k-\alpha\xi_k\| = \|x_k-\tilde{x}_k\| \le \sqrt{m}\cdot\varepsilon.$$

Объединяя полученные оценки, имеем

$$\|x(\tilde{y}(\alpha))-\hat{x}(\alpha)\| \le \|x(\tilde{y}(\alpha))-\tilde{x}(\tilde{y}(\alpha))\| +$$

$$+\|\tilde{x}(\tilde{y}(\alpha))-\hat{x}(\alpha)\| \le \left[\frac{1+\|P\|}{\beta}\right]\sqrt{m}\cdot\varepsilon.$$

В итоге получаем оценку отклонения функции S вдоль траекторий $\hat{x}(\alpha)$ и $\tilde{x}(\tilde{y}(\alpha))$ при $\alpha \le \alpha_{\beta}$:

$$|\hat{S}(\alpha)-\tilde{S}(\alpha)| = \left|\,\|H'\hat{x}(\alpha)\| - \|H'x(\tilde{y}(\alpha))\|\,\right| \le$$

$$\le \|H'\hat{x}(\alpha)-H'x(\tilde{y}(\alpha))\| \le \|H\|\left[\frac{1+\|P\|}{\beta}+1\right]\sqrt{m}\cdot\varepsilon = C_S\cdot\varepsilon.$$

Лемма доказана.

Если теперь будем знать оценку убывания функции $\hat{S}(\alpha)$ вдоль ε-траектории, то, используя лемму 2, получим оценку убывания потенциальной функции $S(y)$ вдоль приближения $\tilde{y}(\alpha)$.

Исследуем функцию $\hat{S}(\alpha)$. Квадрат этой функции и его производная имеют вид

$$[\hat{S}(\alpha)]^2 = (x_k+\alpha\xi_k)'HH'(x_k+\alpha\xi_k) =$$

$$= x_k'HH'x_k + 2\alpha x_k'HH'\xi_k + \alpha^2\xi_k'HH'\xi_k,$$

$$\frac{d}{d\alpha}\left[\hat{S}(\alpha)\right]^2 = 2x_k'HH'\xi_k + 2\alpha\xi_k'HH'\xi_k.$$

Так как согласно (23)

$$\xi_k = \begin{pmatrix} -P^{-1}_{\mathcal{B}_1}H_{\mathcal{B}_1}H'x_k \\ 0 \end{pmatrix}$$

то

$$[\hat S(\alpha)]^2 = [\hat S(0)]^2 = 2\alpha x_k' H G_{\mathcal{B}_1} H' x_k + \alpha^2 x_k' H G_{\mathcal{B}_1}' G_{\mathcal{B}_1} H' x_k =$$
$$= [\hat S(0)]^2 - 2\alpha b_k + \alpha^2 a_k, \quad \frac{d}{d\alpha}[\hat S(\alpha)]^2 = 2\alpha a_k - 2 b_k,$$

где $G_{\mathcal{B}_1} = H_{\mathcal{B}_1}' P_{\mathcal{B}_1}^{-1} H_{\mathcal{B}_1}$. Оценим величины a_k и b_k. Оценка для a_k имеет вид

$$a_k = x_k' H G_{\mathcal{B}_1}' G_{\mathcal{B}_1} H' x_k = \| G_{\mathcal{B}_1} H' x_k \|^2 \le \Gamma^2 [\hat S(0)]^2, \tag{24}$$

где $\Gamma = \max\limits_{\mathcal{B}_1} \{\| G_{\mathcal{B}_1} \|\}$. Для оценки величины b_k заметим, что $b_k = (x_{\mathcal{B}_1}^k)' U_{\mathcal{B}_1} P_{\mathcal{B}_1}^{-1} U_{\mathcal{B}_1} x_{\mathcal{B}_1}^k$, где $U_{\mathcal{B}_1} = H_{\mathcal{B}_1} H_{\mathcal{B}_1}'$. Так как из положительной определенности матрицы P следует положительная определенность матрицы $P_{\mathcal{B}_1}^{-1}$ и так как матрица $U_{\mathcal{B}_1}$ симметрична и положительно полуопределена, то выполняется оценка

$$b_k \ge \mu_{\mathcal{B}_1} \| U_{\mathcal{B}_1} x_{\mathcal{B}_1}^k \|^2 \ge \mu_{\mathcal{B}_1} \nu_{\mathcal{B}_1} (x_{\mathcal{B}_1}^k)' U_{\mathcal{B}_1} x_{\mathcal{B}_1}^k =$$
$$= \mu_{\mathcal{B}_1} \nu_{\mathcal{B}_1} \| H' x_k \|^2 = \mu_{\mathcal{B}_1} \nu_{\mathcal{B}_1} [\hat S(0)]^2 \ge \gamma [\hat S(0)]^2, \tag{25}$$

где $\mu_{\mathcal{B}_1} > 0$ – постоянная, найденная из условия положительной определенности матрицы $P_{\mathcal{B}_1}^{-1}$, $\nu_{\mathcal{B}_1}$ – наименьшее из строго положительных собственных чисел матрицы $U_{\mathcal{B}_1}$, а $\gamma = \min\limits_{\mathcal{B}_1} \{\mu_{\mathcal{B}_1} \nu_{\mathcal{B}_1}\}$. Поэтому в силу того, что $H' x_k \ne 0$ (иначе y_k – уже обобщенное решение), имеем $b_k > 0$. Поэтому функция $\hat S(\alpha)$ убывает и достигает минимума в точке α_k^0, в которой производная $\frac{d}{d\alpha}[\hat S(0)]^2$ равна нулю:

$$\alpha_k^0 = \frac{b_k}{a_k} = \frac{x_k' H G_{\mathcal{B}_1} H' x_k}{x_k' H G_{\mathcal{B}_1}' G_{\mathcal{B}_1} H' x_k} = -\frac{x_k' H H' x_k}{\xi_k' H H' \xi_k}. \tag{26}$$

Если $\alpha = \alpha_k^0$, то

$$[\hat S(\alpha_k^0)]^2 = [\hat S(0)]^2 - \frac{[x_k' H G_{\mathcal{B}_1} H' x_k]^2}{x_k' H G_{\mathcal{B}_1}' G_{\mathcal{B}_1} H' x_k},$$

и согласно проведенным оценкам (24), (25) получаем

$$[\hat S(\alpha_k^0)]^2 \le [\hat S(0)]^2 \left(1 - \frac{\gamma^2}{\Gamma^2}\right),$$

т.е. оценка максимального убывания функции $\hat S(\alpha)$ вдоль ε-траектории $\hat x(\alpha)$ будет следующей:

$$\hat{S}(\alpha_k^0) \leqslant \hat{S}(0)\sqrt{1-\frac{\gamma^2}{\Gamma^2}}\,. \tag{27}$$

Таким образом, шаг α_k можно выбирать из условия сохранения базиса ($\alpha_k = \alpha_\mathcal{B} = \alpha(\Delta)$) или, если $\alpha_\mathcal{B} > \alpha_k^0$, из условия достижения минимума функции $\hat{S}(\alpha)$ ($\alpha_k = \alpha_k^0$).

ТЕОРЕМА I. Для любых заданных параметров алгоритма $d>0$ и $\sigma>0$ существует $\Delta>0$, не зависящее от номера итерации k, такое, что оценка скорости сходимости потенциальной функции $S(y)=\|H'x(y)\|$ вдоль приближения $\tilde{y}(\alpha)=y_k+\alpha\eta_k$, $\eta_k=-H'x_k$ при шаге $\alpha_k=\min\{\alpha_k^0,\alpha_\mathcal{B}\}$ имеет вид

$$\tilde{S}(\alpha_k) \leqslant \tilde{S}(0)(1-d\Delta^{1+\sigma})\,. \tag{28}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть Γ определяется согласно (24), γ - согласно (25), $\mathcal{D}$ - согласно лемме I, C_s - согласно лемме 2, а d и σ - заданные параметры алгоритма.

Оценку (28) будем получать на основе оценки убывания функции $\hat{S}(\alpha)$ вдоль $\mathcal{E}$-траектории, где $\mathcal{E}=\tilde{S}(0)\cdot\Delta$. Рассмотрим три возможные ситуации, возникающие при выборе шага α_k.

Пусть $\alpha_k \hat{=} \alpha_k^0$. Тогда $\alpha_k^0 \leqslant \alpha_\mathcal{B}$, поэтому для убывания функции $\hat{S}(\alpha)$ справедлива оценка (27), и так как $\hat{S}(0) = \tilde{S}(0)$, то в силу леммы 2 выполняются соотношения

$$\tilde{S}(\alpha_k^0) = [\tilde{S}(\alpha_k^0) - \hat{S}(\alpha_k^0)] + \hat{S}(\alpha_k^0) \leqslant$$

$$\leqslant C_s\mathcal{E} + \tilde{S}(0)\sqrt{1-\frac{\gamma^2}{\Gamma^2}} \leqslant \tilde{S}(0)\left[C_s\Delta + \sqrt{1-\frac{\gamma^2}{\Gamma^2}}\right].$$

Таким образом, оценка изменения функции $\hat{S}(\alpha)$ будет следующей:

$$\tilde{S}(\alpha_k^0) \leqslant \tilde{S}(0)\left[C_s\Delta + \sqrt{1-\frac{\gamma^2}{\Gamma^2}}\right].$$

Каковы бы ни были числа $C_s>0$, $\gamma>0$ и $\Gamma>\gamma$, при достаточно малых $\Delta>0$ выполняется неравенство

$$C_s\Delta + \sqrt{1-\frac{\gamma^2}{\Gamma^2}} \leqslant 1-d\Delta^{1+\sigma}\,. \tag{29}$$

Еще две ситуации возникают при выборе шага $\alpha_\kappa = \alpha_\mathcal{B}$. Заметим, что при этом $\alpha_\mathcal{B} < \alpha_\kappa^0$. В [2] показано, что существует константа $C > 0$ такая, что при любом шаге $\alpha = \alpha_\mathcal{B}$ справедлива оценка

$$\widetilde{S}(0) - \widetilde{S}(\alpha_\mathcal{B}) \geq \widetilde{S}(0)(\gamma\alpha_\mathcal{B} - C\alpha_\mathcal{B}^2). \qquad (30)$$

Пусть α_m - максимальное значение параметра α , при котором для заданных γ , C , $\mathcal{D}$, d и σ справедливо неравенство

$$\gamma\alpha - C\alpha^2 \geq \frac{d}{\mathcal{D}^{1+\sigma}}\alpha^{1+\sigma}. \qquad (31)$$

Предположим, что выполняется неравенство $\alpha_\mathcal{B} > \alpha_m$. Оценим в этой ситуации убывание функции $\widetilde{S}(\alpha)$ при шаге $\alpha = \alpha_\mathcal{B}$. Из (26) имеем равенство $b_\kappa = a_\kappa \alpha_\kappa^0$ и, учитывая неравенство $\alpha_\mathcal{B} < \alpha_\kappa^0$ и оценку (25), получим соотношения

$$2\alpha_\mathcal{B} b_\kappa - \alpha_\mathcal{B}^2 a_\kappa = 2\alpha_\mathcal{B} a_\kappa \alpha_\kappa^0 - \alpha_\mathcal{B}^2 a_\kappa =$$
$$= \alpha_\mathcal{B} a_\kappa [2\alpha_\kappa^0 - \alpha_\mathcal{B}] \geq \alpha_m a_\kappa \alpha_\kappa^0 =$$
$$= \alpha_m a_\kappa \frac{b_\kappa}{a_\kappa} = \alpha_m b_\kappa \geq \alpha_m \gamma [\hat{S}(0)]^2.$$

Поэтому

$$[\hat{S}(\alpha_\mathcal{B})]^2 = [\hat{S}(0)]^2 - (2\alpha_\mathcal{B} b_\kappa - \alpha_\mathcal{B}^2 a_\kappa) \leq$$
$$\leq [\hat{S}(0)]^2 - \alpha_m \gamma [\hat{S}(0)]^2 = [\hat{S}(0)]^2 (1 - \alpha_m \gamma)$$

и

$$\hat{S}(\alpha_m) \leq \hat{S}(0)\sqrt{1 - \alpha_m \gamma}.$$

Теперь в силу леммы 2 получим оценку отклонения функции при шаге $\alpha_\mathcal{B}$

$$\widetilde{S}(\alpha_\mathcal{B}) = [\widetilde{S}(\alpha_\mathcal{B}) - \hat{S}(\alpha_\mathcal{B})] + \hat{S}(\alpha_\mathcal{B}) \leq$$
$$\leq C_S \varepsilon + \widetilde{S}(0)\sqrt{1 - \alpha_m \gamma} =$$
$$= \widetilde{S}(0)[C_S \Delta + \sqrt{1 - \alpha_m \gamma}].$$

Так как при заданных $d, \sigma, C_S, \alpha_m, \gamma$ найдется достаточно малое $\Delta > 0$ такое, что выполняется неравенство

$$C_S \Delta + \sqrt{1 - \gamma\alpha_m} \leq 1 - d\Delta^{1+\sigma}, \qquad (32)$$

то при шаге $\alpha_\kappa = \alpha_{\mathcal{B}} > \alpha_m$ оценка (28) справедлива.

Пусть теперь $\alpha_{\mathcal{B}} \le \alpha_m$, тогда для $\alpha = \alpha_{\mathcal{B}}$ выполняется неравенство (3I), и так как в силу леммы I $\alpha_{\mathcal{B}} \ge \mathcal{D}\cdot\Delta$, то из (30) получаем оценку

$$\tilde{S}(0) - \tilde{S}(\alpha_{\mathcal{B}}) \ge \tilde{S}(0)(\gamma\alpha_{\mathcal{B}} - C\alpha_{\mathcal{B}}^2) \ge \tilde{S}(0)\frac{d}{\mathcal{D}^{1+\sigma}}\alpha_{\mathcal{B}}^{1+\sigma} \ge$$
$$\ge \tilde{S}(0)\, d\, \Delta^{1+\sigma},$$

которая доказывает справедливость (28) и в этой ситуации. Теорема доказана.

СЛЕДСТВИЕ. Если величину шага α_κ ограничить некоторой произвольно заданной константой $T > 0$, т.е. выбирать $\alpha_\kappa = \min\{\alpha_\kappa^0, \alpha_{\mathcal{B}}, T\}$, то оценка скорости сходимости (28) сохранится.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Выберем некоторое $T > 0$. Для заданного согласно лемме I $\mathcal{D} > 0$ при достаточно малых $\Delta > 0$ выполняется неравенство

$$T \ge \mathcal{D}\Delta . \tag{33}$$

Так как при выборе $\alpha_\kappa = T$ выполняются неравенства $\alpha_\kappa \le \alpha_{\mathcal{B}}$ и $\alpha_\kappa \le \alpha_\kappa^0$, то мы попадаем в ситуацию, аналогичную ситуации теоремы при выборе шага $\alpha_\kappa = \alpha_{\mathcal{B}}$. Следствие доказано.

Перейдем теперь к изложению алгоритма.

Пусть заданы некоторые $T > 0$, $\Delta > 0$, $d > 0$ и $\sigma > 0$, произвольная начальная точка y_0 и соответствующая ей точка $x_0 = x(y_0)$ - решение линейной задачи с условиями дополнительности (2) при $y = y_0$. Одна итерация состоит из следующих шагов.

ШАГ I. Если точка x_κ ε-вырождена (где $\varepsilon = \|H'x_\kappa\|\Delta$), то решаем вспомогательную задачу

$$[P_{22} - P_{21}P_{11}^{-1}P_{12}]\xi_{\kappa 2} \ge [P_{21}P_{11}^{-1}H_1 - H_2]H'x_\kappa, \quad \xi_{\kappa 2} \ge 0,$$
$$\xi_{\kappa 2}'[P_{22} - P_{21}P_{11}^{-1}P_{12}]\xi_{\kappa 2} = \xi_{\kappa 2}'[P_{21}P_{11}^{-1}H_1 - H_2]H'x_\kappa,$$

где разбиение вектора ξ_κ и матриц P и H сделано согласно разбиению точки x_κ на базисные, ε-вырожденные и небазисные компоненты, и определяем направление

$$\xi_k = - \begin{pmatrix} P_{11}^{-1}(H_1 H' x_k + P_{12}\xi_{k2}) \\ \xi_{k2} \\ 0 \end{pmatrix}$$

Если $\mathcal{E}$-вырожденности нет, то

$$\xi_k = - \begin{pmatrix} P_{11}^{-1} H_1 H' x_k \\ 0 \end{pmatrix}$$

ШАГ 2. Определяем максимальное значение параметра α, равное $\alpha_{\mathcal{B}}$, при котором выполняются неравенства

$$x_k + \alpha \xi_k \geq 0, \quad P(x_k + \alpha \xi_k) \geq H(y_k - \alpha H' x_k) + g.$$

ШАГ 3. Вычисляем шаг

$$\alpha_k^0 = - \frac{x_k' H H' x_k}{\xi_k' H H' \xi_k}.$$

ШАГ 4. Полагаем

$$\alpha_k = \min\{T, \alpha_{\mathcal{B}}, \alpha_k^0\}, \quad y_{k+1} = y_k - \alpha_k H' x_k$$

и для полученной точки y_{k+1} находим точку x_{k+1}, являющуюся решением линейной задачи с условиями дополнительности

$$P x_{k+1} \geq H y_{k+1} + g, \; x_{k+1} \geq 0, \; x_{k+1}' P x_{k+1} = x_{k+1}'(H y_{k+1} + g).$$

ШАГ 5. Если окажется, что $H' x_{k+1} = 0$, то точка y_{k+1} является обобщенным решением системы (I). Работа алгоритма закончена.

В противном случае проверяем, есть ли гарантированное теоремой I убывание функции $S = \|H' x(y)\|$. Если $\|H' x_{k+1}\| > \|H' x_k\|(1 - d\Delta^{1+\sigma})$, то дробим Δ и идем на шаг I. Если $\|H' x_{k+1}\| \leq \|H' x_k\|(1 - d\Delta^{1+\sigma})$, то переходим к следующей итерации, полагая $k = k + 1$.

ЗАМЕЧАНИЕ. Поскольку при достаточно малых $\Delta > 0$ выполняются неравенства (29), (32) и (33), то дроблений параметра Δ потребуется конечное число, поэтому, остановившись на некотором $\bar{\Delta} > 0$, получим оценку скорости сходимости

$$S(y_{k+1}) \leq S(y_k)(1 - d\bar{\Delta}^{1+\sigma}). \tag{34}$$

ТЕОРЕМА 2. Последовательность $\{y_k\}$, построенная по алгоритму AI, сходится к некоторому обобщенному решению y_*.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу того, что $\theta = 1 - d\bar{\Delta}^{1+\sigma} < y$, оценка (34) обеспечивает гарантированное убывание функции S вдоль последовательности $\{y_k\}$, а значит,

$$\lim_{k \to +\infty} S(y_k) = 0.$$

Так как $y_{k+1} = y_k - \alpha_k H' x_k$, то $\| y_{k+1} - y_k \| \leq T S(y_k)$. Поэтому

$$\sum_{k=i}^{\infty} \| y_{k+1} - y_k \| \leq T \sum_{k=i}^{\infty} S(y_0) \theta^k = T S(y_0) \frac{\theta^i}{1-\theta}.$$

Таким образом, при $j > i$

$$\| y_j - y_i \| = \| \sum_{k=i}^{j} (y_{k+1} - y_k) \| \leq \sum_{k=i}^{j} \| y_{k+1} - y_k \| \leq T S(y_0) \frac{\theta}{1-\theta}.$$

Так как $0 < \theta < 1$, то для каждого $\mathcal{E} > 0$ найдется такой номер $\mathcal{K}(\mathcal{E})$, что при $i > \mathcal{K}(\mathcal{E})$ и $j > \mathcal{K}(\mathcal{E})$ выполняется неравенство $\| y_j - y_i \| < \mathcal{E}$. Следовательно, последовательность $\{y_k\}$ является последовательностью Коши, и ввиду полноты пространства $(y_k \in R^n)$ у нее существует предел y_*. Из соотношений $S(y_*) = \lim_{k \to +\infty} S(y_k) = 0$ получаем, что y_* - обобщенное решение. Теорема доказана.

Заметим, что в случае ограниченности множества обобщенных решений в алгоритме AI на шаге 4 достаточно выбирать

$$\alpha_k = \min \{ \alpha_k^0, \alpha_B \}.$$

Литература

I. Булавский В.А. Методы релаксации для систем неравенств: Учебное пособие. - Новосибирск: изд. НГУ, I983.

2. Кулинич А.В. Отыскание компромиссной точки при наличии ограничений/ Ин-т математики. - Новосибирск, I986. - Деп. в ВИНИТИ 3.I0.86 № 6992-В86.

Поступила в ред.-изд. отдел
I6.II.I987 г.