Выпуск 42(59) ОПТИМИЗАЦИЯ 1988 г.

Выпуклый анализ и смежные вопросы

УДК 517.98

ОБ ОДНОМ КЛАССЕ МАЖОРИРОВАННЫХ ОПЕРАТОРОВ

В.Б.Чердак

В настоящей работе изучаются сохраняющие дизъюнктность квазиобратимые мажорированные операторы в решеточно нормированных пространствах. Показано, что такие операторы могут быть разложены в прямую сумму строго периодической и апериодической составляющих.

1. Введем необходимые нам в дальнейшем определения. (Подробности см. в [1-6].) Пусть E – K-пространство, X – комплексное векторное пространство, $p: X \to E$ – норма Канторовича [1], т.е. p удовлетворяет условиям:

а) $p(x) \geqslant 0 \quad (x \in X)$, $p(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$;

б) $p(x_1 + x_2) \leqslant p(x_1) + p(x_2) \quad (x_1, x_2 \in X)$;

в) $p(\lambda x) = |\lambda| p(x) \quad (x \in X,\ \lambda \in \mathbb{C})$;

г) для любых $x \in X$ и $e_1, e_2 \in E$ из $p(x) = e_1 + e_2$, $e_1 d e_2$ следует существование представления $x = x_1 + x_2$, где $x_1, x_2 \in X$ и $p(x_i) = e_i$, $i = 1, 2$.

Векторное пространство X, снабженное нормой Канторовича p, будем называть решеточно нормированным пространством (НРП) и обозначать (X, p). РНП (X, p) называется пространством Банаха – Канторовича, если для любой сети $(x_\alpha) \subset X$ из $p(x_\alpha - x_\beta) \xrightarrow{o} 0$ следует существование такого $x \in X$, что $p(x - x_\alpha) \xrightarrow{o} 0$ [1,2].

Говорят, что элементы $x, y \in X$ дизъюнктны и пишут $x \, d \, y$, если дизъюнктны их нормы, т.е. если $p(x) \wedge p(y) = 0$. Если A – подмножество в X, то дизъюнктным дополнением к A в X называется множество $A^d = \{y \in X : y \, d \, x \ \forall x (x \in A)\}$. Подпространство $J \subset X$ будем называть идеалом в X, если из $x \in J$, $y \in X$ и $p(y) \leq p(x)$ следует $y \in J$. Идеал $\Phi \subset X$ будем называть фундаментом, если $\Phi^d = \{0\}$. Подпространство $B \subset X$ называется компонентой в X, если $B^{dd} = B$.

Через $M(X)$ обозначим пространство всех линейных мажорированных операторов в X. Иными словами, линейный оператор $T: X \to X$ входит в $M(X)$ в том и только том случае, если существует положительный линейный оператор $\tilde{T}: E \to E$, называемый мажорантой T, такой, что

$$p(Tx) \leq \tilde{T} p(x) \qquad (\forall x \in X).$$

Для каждого оператора $T \in M(X)$ существует наименьшая мажоранта [4], которую мы будем обозначать $|T|$.

Оператор $T \in M(X)$ будем называть сохраняющим дизъюнктность (d-гомоморфизмом), если для любых $x, y \in X$ из $x \, d \, y$ следует $Tx \, d \, Ty$.

В [3] доказано, что мажорированный оператор T является d-гомоморфизмом тогда и только тогда, когда $|T|$ – решеточный гомоморфизм на E. В [2] установлены следующие оценки для операторной нормы:

а) если $T \in M(X)$, то для наименьшей мажоранты оператора T верно соотношение

$$|T|e = \sup\left\{\sum_i p(Tx_i) : [x_i] \subset X, \sum p(x_i) \leq e\right\} \qquad (1)$$

для любого $0 \leq e \in E$;

б) если оператор T допускает какой-нибудь решеточный гомоморфизм в качестве мажоранты, то

$$|T|e = \sup\{p(Tx) : p(x) \leq e\} \quad (0 \leq e \in E_+) \qquad (2)$$

Оператор $T \in M(X)$ будем называть ортоморфизмом на X, если для любых $x, y \in X$ из $x \, d \, y$ следует $Tx \, d \, y$. Множество всех ортоморфизмов на X обозначим $Orth(X)$.

1.1. ПРЕДЛОЖЕНИЕ. Оператор $T \in M(X)$ принадлежит $Orth(X)$ тогда и только тогда, когда его мажоранта принадлежит $Orth(E)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $T \in Orth(X)$, т.е. $p(Tx) \wedge p(y) = 0$, когда $x \, d \, y$. Возьмем элементы $e, u \in E_+$, $e \, d u$ и покажем, что для любого $x \in X$ $p(x) \leq e$ влечет $p(Tx) \, d \, u$.

Действительно, $u \wedge p(x) \leq u \wedge e = 0$. Следовательно, $p(x)\, d\, u$, а так как T — ортоморфизм, то $p(Tx)\, d\, u$. Используя формулу (I), имеем

$$|T|e = \sup\{\sum_i p(Tx_i) : [x_i] \subset X, \sum_i p(x_i) \leq e\},$$

тогда

$$u \wedge |T|e = u \wedge \sup\{\sum_i p(Tx_i) : \sum_i p(x_i) \leq e\} =$$

$$= \sup\{\sum_i u \wedge p(Tx_i) : \sum_i p(x_i) \leq e\} = 0.$$

Наоборот, допустим, что $|T| \in Orth(E)$. Тогда $p(Tx) \wedge \wedge p(y) = (|T|e) \wedge u = 0$, где $x, y \in X$, $x\, d\, y$ и $p(x) = e$, $p(y) = u$. ▷

2. Пусть (X, p) — ПБК, нормированное посредством K-пространства E.

2.1. ОПРЕДЕЛЕНИЕ. d-гомоморфизм $T \in M(X)$ назовем квазиобратимым, если T инъективен и образ T — фундамент в X.

2.2. ПРИМЕР. Пусть E — фундамент в $C_\infty(Q)$, где Q — экстремально несвязный компакт. В [7] установлено, что каждый (о)-непрерывный d-гомоморфизм T на E имеет мультипликативное представление в виде $(Tf)(t) = h(t) \cdot f \circ \varphi(t)$ $(f \in E)$, где $h \in C_\infty(Q)$, φ — непрерывное отображение компакта Q в себя. Класс квазиобратимых d-гомоморфизмов на K-пространстве E состоит в точности из операторов $T: E \to E$, представимых в указанном виде, где φ — сюръективный гомеоморфизм компакта Q, а $h \in C_\infty(Q)$ — функция, не равная нулю всюду, кроме, быть может, тощего множества.

ЗАМЕЧАНИЕ. В случае, когда $X = E$ — (о)-полная банахова решетка, квазиобратимые операторы изучались в [8].

2.3. ПРЕДЛОЖЕНИЕ. а) Если $T \in M(X)$ квазиобратим, то его наименьшая мажоранта квазиобратима.

б) Если $T \in M(X)$ для любого $x \in X$, $|Tx| = |T||x|$, $|T|$ — квазиобратимый оператор на E, сохраняющий интервалы, то и T квазиобратим.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. а) Из того, что $T \in M(X)$ — d-гомоморфизм, следует, что $|T|$ — решеточный гомоморфизм на E, т.е. положительный d-гомоморфизм [3].

Покажем инъективность $|T|$. Действительно, пусть T

инъективен, тогда $Ker\, T=\{0\}$. Покажем, что $Ker\,|T|=\{0\}$. Пусть $0\leq e\in Ker\,|T|$, тогда существует x ($p(x)=e$) такой, что $p(Tx)\leq |T|e=0$. Следовательно, $Tx=0$, но тогда $x=0$, и поэтому $e=0$. Таким образом, $Ker\,|T|$ не может содержать положительных элементов. Пусть e - произвольный элемент E, $e\in Ker\,|T|$. Так как $|T|$ сохраняет дизъюнктность, то и $\{e\}^{dd}\subset Ker\,|T|$, но $|e|\in\{e\}^{dd}$. Следовательно, $Ker\,|T|=\{0\}$.

Пусть $\{T[X]\}^d=\{0\}$, покажем, что $\{|T|[E]\}^d=\{0\}$. Действительно, пусть $y\, d\, \{|T|[E]\}$. Для любого $e\in E$ $y\, d\, |T|e$, но тогда $p^{-1}(y)\, d\, T[X]$. Следовательно, $p^{-1}(y)=0$, что влечет $y=0$.

б) Пусть T - d-гомоморфизм. Нам необходимо показать, что образ T будет фундаментом в X. Действительно, пусть x дизъюнктен $T[X]$. Это означает, что $p(x)\wedge p(Ty)=0$ для любого $y\in X$. Покажем, что $p(x)\wedge |T|p(y)=0$. Воспользовавшись (2), имеем

$$p(x)\wedge |T|p(y)=p(x)\wedge \sup\{p(Tz):p(z)\leq p(y)\}=$$

$$=\sup\{(p(Tz)\wedge p(x)):p(z)\leq p(y)\}=0.$$

Таким образом, $p(x)\in\{|T|[E]\}^d$, следовательно, $p(x)=0$.

2.4. ПРИМЕР. Пусть X, Y - банаховы пространства, E - K-пространство, реализованное как фундамент $C_\infty(Q)$ над экстремальным компактом Q. Рассмотрим пространство $E(X)$ (классов эквивалентности) непрерывных банаховозначных функций, определенных на котощих множествах в Q [1,2]. На $E(X)$ определим E-значную норму $|f|$ по формуле $|f|(\cdot)=\|f(\cdot)\|$ для любого $f\in E(X)$. Пространство $(E(X),|\cdot|)$ - ПБК [2]. Рассмотрим оператор $T:E(X)\longrightarrow E(Y)$, определенный формулой: $(Tf)(\cdot)=K(h(\cdot)\cdot f\circ\varphi(\cdot))$, где $h\in C_\infty(Q)$ - функция, не равная нулю всюду, кроме, может быть, тощего множества, φ - гомеоморфизм на Q, $f\in E(X)$, K - биективный оператор из $\mathcal{L}(X,Y)$. Тогда норма $|T|:|f|\mapsto$ $\mapsto\|K\|(h(\cdot)|f|\circ\varphi(\cdot))$ будет квазиобратимым оператором на E. Очевидно, что оператор T инъективен, а следовательно, по предложению 2.3 он будет квазиобратимым.

2.5. ОПРЕДЕЛЕНИЕ. а) d-гомоморфизм $T\in M(X)$ называется имеющим строгий период n, если $T^n\in Orth(X)$ и для любой ненулевой компоненты $B \subset X$ найдется ненулевая компонента $A \subset B$ такая, что $A, TA, \ldots, T^{n-1}A$ попарно дизъюнктны;

б) d-гомоморфизм $T \in M(X)$ называется апериодическим, если для любого натурального n найдется ненулевая компонента $B \subset X$ такая, что для любой ненулевой компоненты $A \subset B$ $A, TA, \ldots, T^n A$ попарно дизъюнктны.

2.6. ПРЕДЛОЖЕНИЕ. Пусть $T \in M(X)$ - квазиобратимый оператор. Если T имеет строгий период n, то $|T|$ также имеет строгий период n.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из определения мажоранты имеем $p(T^n x) \leq |T^n| p(x) \leq |T|^n p(x)$. Пусть $x, y \in X$, $x \, d \, y$, тогда $p(T^n x) \wedge p(y) \leq |T|^n p(x) \wedge p(y)$, т.е. $T^n \in Orth(X)$.

Соответствующие компоненты попарно дизъюнктны:
$p(T^j A) \wedge p(T^i A) \leq |T|^j [p(A)]^{dd} \wedge |T|^i [p(A)]^{dd} = 0$,
где $i \neq j$, $i, j \leq n$. $\triangleright$

2.7. СЛЕДСТВИЕ. Пусть $T \in M(X)$ квазиобратимый оператор. Если $|T|$ апериодичен, то и T апериодичен.

2.8. ТЕОРЕМА. Для любого квазиобратимого оператора $T \in M(X)$ существует единственная последовательность компонент X_n $(n \in N \cup \{\infty\})$, которая удовлетворяет условиям:

а) $X = \oplus_{n \in N \cup \{\infty\}} X_n$;

б) $T|_{X_n}$ имеет строгий период n, $T|_{X_\infty}$ апериодичен.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Квазиобратимый оператор $T \in M(X)$ имеет квазиобратимую мажоранту $|T|$, это следует из 2.2а). Для $|T|$ существует разложение пространства E в прямую сумму дизъюнктных компонент $E = \oplus_{n \in N \cup \{\infty\}} E_n$ (см. [8]). Введем $X_n := p^{-1}(E_n)$, тогда X_n - компоненты в X, и $X = \oplus_{n \in N \cup \{\infty\}} X_n$. На каждой компоненте X_n оператор $T|_{X_n}$ имеет строгий период n в силу предложения 2.6 и $T|_{X_\infty}$ апериодичен из-за 2.7.

ЗАМЕЧАНИЕ. В предположении, что (X, p) - комплексная (o)-полная банахова решетка, теорема 2.8 установлена в [8].

3. Для иллюстрации рассмотрим свойства спектров одного класса мажорированных операторов на конкретном ПБК.

Обозначим через $X := E(Y \xrightarrow{\mathfrak{S}} Q)$ пространство почти глобальных сечений банахова расслоения $Y \xrightarrow{\mathfrak{S}} Q$, где E – фундамент в $C_\infty(Q)$ (Q – экстремальный компакт). $(X, |\cdot|, E)$ – пространство Банаха – Канторовича [2, 5.4]. Рассмотрим класс операторов $T: X \to X$ (обозначим его G) вида $(Ts)(t) = h(t)\cdot s\circ\varphi(t)$, где $t \in Q$, s – почти глобальное сечение банахова расслоения $Y \xrightarrow{\mathfrak{S}} Q$, $h \in C_\infty(Q)$– функция, отличная от нуля всюду, кроме, может быть, тощего множества, φ – гомеоморфизм компакта Q.

Пусть E – комплексная (о) -полная банахова решетка [5,6]. Если $X = E$, то G совпадает с классом квазиобратимых операторов, рассмотренных в [8].

3.I. ПРЕДЛОЖЕНИЕ. Каждый оператор $T \in G$ мажорированный.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $(Ts)(t) = h(t)\, s(\varphi(t))$, $|s| = f$, тогда $|Ts|(\cdot) = |h(\cdot)||s(\varphi(\cdot))| = |h(\cdot)|\cdot|s(\varphi(\cdot))| = |h(\cdot)|\cdot f\circ\varphi(\cdot)$. Обозначим $|T|f := |h(\cdot)|\cdot f\circ\varphi(\cdot)$. Оператор $|T|$ положителен и является мажорантой для T. Кроме того, очевидно, что $|T|$ – наименьшая мажоранта.

Из строения операторов T и $|T|$ непосредственно следуют следующие утверждения.

3.2. ПРЕДЛОЖЕНИЕ. Пусть $T \in G$. а) Оператор $T \in \mathrm{Orth}(X)$ тогда и только тогда, когда φ – тождественный гомеоморфизм на Q.

б) Оператор T имеет строгий период n тогда и только тогда, когда $|T|$ имеет строгий период n.

в) Оператор T обратим тогда и только тогда, когда обратим оператор $|T|$.

г) Спектр оператора T совпадает со спектром оператора $\overline{T}$, где $\overline{T} := |T| + i|T|$.

Предложение 3.2г) дает возможность переноса спектральной теории для d-гомоморфизмов на E [8] на более широкий класс G. В частности, если T имеет строгий период n, то его спектр инвариантен относительно поворота на корень n-й степени из единицы. Так как $T \in G$ – квазиобратимый оператор, то он может быть разложен на составляющие со строгим периодом и апериодическую часть (2.8). Тогда $\sigma(T) = \bigcup_{n=1}^{\infty} \sigma(T|_{X_n}) \cup R$, где $R := \bigcap_{n=1}^{\infty} (\sigma(T|_{\{X_1 + \ldots + X_n\}^d}))$.

Автор глубоко признателен А.Г.Кусраеву за постановку задачи и руководство работой.

ЛИТЕРАТУРА

1. Кусраев А.Г. Векторная двойственность и ее приложения. – Новосибирск: Наука, 1985.
2. Кусраев А.Г., Стрижевский В.З. Решеточно нормированные пространства и мажорированные операторы // Исследования по геометрии и математическому анализу. – Новосибирск, 1987. – С.132–158.
3. Кусраев А.Г. Линейные операторы в решеточно нормированных пространствах // Исследования по геометрии "в целом" и математическому анализу. – Новосибирск, 1987. – С.81–122.
4. Канторович Л.В., Вулих Б.З., Пинскер А.Г. Функциональный анализ в полуупорядоченных пространствах. – М.: ГИТТЛ,1950.
5. Канторович Л.В., Акилов Г.П. Функциональный анализ. – М.: Наука, 1984.
6. Schaefer H.H. Banach lattices and positive operators.– N. Y.: Sp.-Verlag, 1974.
7. Abramovich Yu. A. Multiplicative representation of disjointness preserving operators // Indag. Math.-1983.-V.45,N3.-P.267-279.
8. Arendt W., Hart D.R. The spectrum of quasi-invertible disjointness preserving operators // J.Functional Analysis.-1986.-V.68.-P.149-167.

Поступила в ред.-изд. отдел
06.05.1987 г.