УДК 519.865.3

ОБ ОТЫСКАНИИ РАВНОВЕСИЯ В ЛИНЕЙНОЙ МОДЕЛИ ОБМЕНА С ОГРАНИЧЕНИЯМИ СВЕРХУ НА ПЕРЕМЕННЫЕ

В.И.Шмырев

В работах автора [1,2] был предложен эффективный конечный алгоритм для нахождения состояния равновесия в линейной экономической модели обмена. В [3] этот подход был распространен на иной вариант модели, условно названный моделью кооперации и отличающийся от исходной модели обмена тем, что максимизация линейных целевых функций участников заменена их минимизацией (с сохранением требования положительности коэффициентов целевых функций).

В настоящей работе рассматривается модель, являющаяся в определенном смысле объединяющей для ранее рассматривавшихся. Речь идет об исходной модели обмена, но на интенсивности x_j^i, характеризующие количество j-го товара, требуемого i-м участником, налагаются дополнительные ограничения сверху: $x_j^i \leq b_j^i$. При такой постановке в задаче i-го участника можно простой заменой переменных $\bar{x}_j^i = b_j^i - x_j^i$ перейти от максимизации целевой функции к ее минимизации.

§ 1. Описание модели

Имеются два конечных множества $I=\{1,2,\dots,m\}$ и $J=\{1,2,\dots,n\}$. Первое из них представляет собой множество номеров участников, а второе – множество номеров продуктов модели. Для каждого $i \in I$ заданы n-мерные векторы b^i, c^i, d^i. Компонента d_j^i вектора d^i указывает количество j-го товара, которым располагает для обмена i-й участник, а компонента c_j^i характеризует полезность для него единицы этого товара. Предполагается, что полезность линейно зависит от количества товаров, т.е. полезность набора товаров в количествах x_j, $j\in J$, для i-го участника характеризуется величиной $\sum_{j\in J} c_j^i x_j$. Компонента b_j^i указывает верхнюю границу для количества j-го товара, характеризующего спрос i-го участника.

Обмен осуществляется по неотрицательным ценам p_j, образующим вектор цен $p\in R_+^n$. Состояние равновесия по определению представляет собой вектор цен p и совокупность векторов $\hat{x}^i\in R^n$ таких, что:

1) при каждом $i\in I$ вектор $\hat{x}^i$ решает задачу

$$(c^i, x^i) - max!$$

при условиях

$$(p, x^i)\leq (p, d^i),$$

$$0\leq x^i\leq b^i;$$

2) выполняется условие баланса

$$\sum_{i\in I}\tilde{x}^i=\sum_{i\in I} d^i. \qquad (\mathrm{I})$$

При этом вектор p именуется равновесным вектором цен.

Ясно, что относительно вектора цен p можно предполагать выполненным какое-либо условие нормировки. Будем считать, что p принадлежит симплексу $\sigma=\{p=(p_1,\dots,p_n)\,|\,p\geq 0,$ $\sum_{j=1}^{n} p_j=1\}$. Относительно d^i естественно предполагать $\sum_{i\in I} d^i>0$. Для простоты будем считать $\sum_{i\in I} d_j^i=1,\ \forall j\in J$. Ограничимся рассмотрением случая, когда все векторы c^i строго положительны, а b^i и d^i связаны условиями:

$$d^i\leq b^i,\ d^i\neq b^i (\forall i\in I);\ \sum_{i\in I} d^i<\sum_{i\in I} b^i. \qquad (2)$$

Из последнего условия следует, что равновесный вектор цен положителен. Действительно, если $p_j=0$, то в оптимальном решении каждой из задач участников будет $x_j^i=b_j^i$, а значит, $\sum_i x_j^i=\sum_i b_j^i>\sum_i d_j^i$, и нарушается (I). Поэтому нас будут интересовать лишь точки p из относительной внутренности σ° симплекса σ.

Условие $d^i\neq b^i$ не является обременительным, ибо если для некоторого i выполнялось бы $d^i = b^i$, то при любом $p \in \sigma^\circ$ решением задачи i-го участника являлось бы $x^i = d^i$, и такого участника можно было бы исключить из рассмотрения.

Ясно также, что при сделанных предположениях в состоянии равновесия бюджетное ограничение $(p, x^i) \leq (p, d^i)$ выполняется как равенство.

§ 2. Транспортная задача модели и базисные структуры

Свяжем с рассматриваемой моделью параметрическую транспортную задачу, в которой роль параметров играют компоненты вектора цен p. Эта задача, именуемая в дальнейшем транспортной задачей модели, имеет вид

$$\sum_{i,j} z_{ij} \ln c_j^i \quad - \max! \tag{3}$$

$$\sum_j z_{ij} = (p, d^i), \quad i \in I; \tag{4}$$

$$\sum_i z_{ij} = p_j, \quad j \in J; \tag{5}$$

$$0 \leq z_{ij} \leq p_j b_j^i, \quad (i,j) \in I \times J. \tag{6}$$

Будем предполагать, что для этой задачи выполняется условие двойственной невырожденности: при любых u_i, $i \in I$, и v_j, $j \in J$, среди величин $-u_i + v_j$, $(i,j) \in I \times J$, найдется не более $m+n-1$ равных соответствующим величинам $\ln c_j^i$. У этой задачи, ввиду (2), при любом $p \in \sigma$ имеется допустимое решение $z_{ij} = p_j d_j^i$. Ввиду очевидной ограниченности множества допустимых решений, существует, следовательно, и оптимальное решение, которое благодаря условию двойственной невырожденности будет единственным (при каждом $p \in \sigma$).

Как известно, реализация алгоритмов последовательного улучшения для задач с ограничениями сверху на переменные приводит к тому, что в текущем базисном множестве выделяется "малое" базисное множество $\mathcal{B}$ для основных ограничений задачи. Таким образом, решив задачу (3)-(6) при некотором $p \in \sigma^\circ$, получим в результате оптимальное решение $z_{ij}(p)$ и множество $U \supset \{(i,j) \in I \times J \mid z_{ij}(p) > 0\}$, в котором выделено подмножество $\mathcal{B}$, являющееся базисным для системы ограничений (4)-(5) и такое, что для $W = U \setminus \mathcal{B}$ выполняется

$$\mathcal{W} \subset \{(i,j)\in U \mid x_{ij}(\rho)=\rho_j b_j^i\}.$$

При этом с точностью до постоянного слагаемого определяются двойственные переменные u_i, $i\in I$, и v_j, $j\in J$, удовлетворяющие условиям

$$\begin{aligned} -u_i+v_j &= \ln c_j^i,\ (i,j)\in\mathcal{B};\\ -u_i+v_j &\le \ln c_j^i,\ (i,j)\in\mathcal{W};\\ -u_i+v_j &\ge \ln c_j^i,\ (i,j)\notin U.\end{aligned} \tag{7}$$

(При выполнении условия двойственной невырожденности все неравенства здесь выполняются как строгие.)

Такое множество U с разбиением его на подмножества $\mathcal{B}$ и $\mathcal{W}$ будем именовать *оптимальной базисной структурой*, записывая кратко U в виде пары множеств $U=(\mathcal{B},\mathcal{W})$.

Для произвольных пар множеств $(\mathcal{B},\mathcal{W})$ можно ввести отношение частичного порядка, говоря, что пара $U'=(\mathcal{B}',\mathcal{W}')$ подчинена паре $U=(\mathcal{B},\mathcal{W})$, если

$$(\mathcal{B}'\cup\mathcal{W}')\subset(\mathcal{B}\cup\mathcal{W}),\ \mathcal{B}'\neq\mathcal{B},\ \mathcal{B}'\subset\mathcal{B},\ \mathcal{W}'\supset\mathcal{W},$$

т.е. U' получается из U сокращением множества $\mathcal{B}$ и возможным пополнением за счет этого множества $\mathcal{W}$. Будем писать в этом случае $U'\prec U$.

Для оптимальной базисной структуры $U=(\mathcal{B},\mathcal{W})$ будем говорить о подчиненной ей структуре $U'=(\mathcal{B}',\mathcal{W}')$ (подструктуре), если $U'\prec U$ в указанном выше смысле.

Обозначим через $\mathcal{L}$ совокупность получающихся при различных $\rho\in\sigma^\circ$ оптимальных базисных структур и всевозможных им подчиненных подструктур.

По структуре $(\mathcal{B},\mathcal{W})=U\in\mathcal{L}$ можно однозначно получить функции $x_{ij}=x_{ij}^U(\rho)$, решая систему уравнений (4)-(5) при условиях:

$$x_{ij}=0,\qquad (i,j)\notin U; \tag{8}$$

$$x_{ij}=\rho_j b_j^i,\ (i,j)\in\mathcal{W}. \tag{9}$$

При этом на ρ нужно наложить дополнительные условия, обеспечивающие совместность возникающей системы линейных уравнений.

Таким образом, можно ввести множество $\Omega(U)$ как множество тех $\rho\in\sigma^\circ$, при которых совместна система линейных уравнений (4)-(5), (8)-(9) и выполняются неравенства

$$0 \le z_{ij}^{v}(p) \le p_j b_j^i, \quad (i,j) \in \mathcal{B}. \tag{10}$$

С другой стороны, структуре $U=(\mathcal{B}, \mathcal{W})$ можно сопоставить множество $\Xi(U) \subset \sigma^{\circ}$, определяемое требованием $q \in \sigma^{\circ}$ и системой условий

$$\frac{c_j^i}{q_j} = \frac{c_k^i}{q_k}, \quad (i,j),(i,k) \in \mathcal{B}; \tag{11}$$

$$\frac{c_l^i}{q_l} \le \frac{c_j^i}{q_j} \le \frac{c_s^i}{q_s}, \quad (i,l) \notin U, (i,j) \in \mathcal{B}, (i,s) \in \mathcal{W}. \tag{12}$$

Легко видеть, что оптимальной базисной структуре U отвечает одноточечное множество $\Xi(U)=\{q\}$, и при этом $q_j = e^{v_j} / \sum_{k \in J} e^{v_k}$, где v_j, $j \in J$, - двойственные переменные из системы (7).

Если $U'=(\mathcal{B}', \mathcal{W}')$, $U' \prec U$, то система (11)-(12), отвечающая U', будет отличаться от приведенной системы тем, что часть уравнений из (11) либо вовсе исключается, либо заменится неравенствами и перейдет в (12). Тем самым будет выполняться $\Xi(U') \supset \Xi(U)$. Отсюда следует, что для всех $U \in \mathcal{L}$ множества $\Xi(U)$ непусты, ибо любая структура U из $\mathcal{L}$ подчинена некоторой оптимальной базисной структуре.

Несложно убедиться, что $q \in \sigma^{\circ}$ тогда и только тогда удовлетворяет (11)-(12), когда найдутся такие $y_i > 0$, $i \in I$, что выполняется система условий

$$y_i q_j = c_j^i, \quad (i,j) \in \mathcal{B}; \tag{13}$$

$$y_i q_s \le c_s^i, \quad (i,s) \in \mathcal{W}; \tag{14}$$

$$y_i q_l \ge c_l^i, \quad (i,l) \notin U. \tag{15}$$

Отсюда следует, что если $p \in \Omega(U) \cap \Xi(U)$ при некоторой $U \in \mathcal{L}$, то p - равновесный вектор цен модели. Оптимальный вектор $\tilde{x}^i$, решающий задачу i-го участника, задается формулами $\tilde{x}_j^i = z_{ij}^{U}(p)/p_j$, $j \in J$.

§ 3. Описание алгоритма

Организационная структура алгоритма, как и в случае модели кооперации, весьма близка общей схеме процессов, идейно восходящих к задаче линейной комплементарности [6].

Прежде чем переходить к детальному изложению алгоритма, введем две системы линейных уравнений, которые возникают при рассмотрении одного шага процесса.

Для структуры $(\mathcal{B}, \mathcal{W}) = U \in \mathcal{L}$ будем рассматривать подпространства $L(U)$ и $M(U)$, содержащие множества $\Omega(U)$ и $\Xi(U)$ соответственно. Подпространство $M(U)$ описывается системой линейных уравнений

$$\frac{p_j}{c_j^i} = \frac{p_k}{c_k^i}, \quad (i, j), (i, k) \in \mathcal{B}. \tag{16}$$

Подпространство $L(U)$ задается системой линейных уравнений, представляющих собой необходимые и достаточные условия совместности системы (4)-(5), (8)-(9). Для ее описания вводится граф $\Gamma(\mathcal{B})$ с множеством вершин $V = \{1, 2, \ldots, m+n\}$ и множеством дуг $\{(i, m+j) \mid (i, j) \in \mathcal{B}\}$. Пусть компоненты связности этого графа занумерованы значениями индекса $\nu \in \mathcal{N}(\mathcal{B})$ и V_ν — множество вершин ν-й компоненты. Положим $I_\nu = I \cap V_\nu$, $J_\nu = \{j \in J \mid (m+j) \in V_\nu\}$. Система линейных уравнений, описывающая подпространство $L(U)$, имеет вид

$$\sum_{j \in J_\nu} \Big(1 - \sum_{i:(i,j) \subset \mathcal{W}} b_j^i\Big) p_j = \sum_{i \in I_\nu} \Big[(p, d^i) - \sum_{j:(i,j) \in \mathcal{W}} b_j^i p_j\Big], \quad \nu \in \mathcal{N}(\mathcal{B}). \tag{17}$$

(Если какое-либо из множеств, по которому идет суммирование, пусто, то сумма принимается равной нулю.)

Перейдем к описанию самого алгоритма.

ПРЕДПОЛОЖЕНИЕ I. При некотором $j_0 \in J$ все векторы d^i, $i \in I$, имеют положительные компоненты $d_{j_0}^i$.

Пусть для определенности

$$d_1^i > 0 \quad \forall i \in I. \tag{18}$$

Для начала процесса необходимо найти такую структуру $\tilde{U} \in \mathcal{L}$, что множество $\Omega(\tilde{U})$ содержит все достаточно близкие к e_1 точки $p \in \sigma^0$. Требуемую структуру можно получить процедурой параметрического линейного программирования, начиная с решения задачи (3)-(6) при $p = e_1$ и сдвигая p по любому направлению внутрь симплекса σ. Остановимся на этом подробнее.

Оптимальную базисную структуру при $p=e_1$ указать легко. Для $p=e_1$ имеется единственное допустимое решение в задаче (3)-(6):

$$z_{i1}=d_1^i, \quad i\in I;$$
$$z_{ij}=0, \quad j\neq 1.$$

Отыщем допустимое решение двойственной задачи, связанное с этим решением условиями дополняющей нежесткости. Нужно указать u_i и v_j, чтобы выполнялось

$$-u_i+v_j\geq \ln c_j^i, (i,j)\in I\times J, \tag{19}$$

и равенство должно выполняться при $j=1$. Взяв $v_1=0$, имеем $u_i=-\ln c_1^i$ и $v_j\geq u_i+\ln c_j^i=\ln(c_j^i/c_1^i)$. Положим $v_j=\max_i \ln(c_j^i/c_1^i)$. Ввиду условия двойственной невырожденности, максимум здесь достигается лишь для одного значения i: $i=i_j$.

Полагая теперь $W=\phi$ и

$$\mathcal{B}=\{(i,1)|i\in I\}\cup\{i_j,j)|j\in J\setminus\{1\}\},$$

получаем базисную структуру $U=(\mathcal{B},\mathcal{W})$, которая, очевидно, оптимальна при $p=e_1$.

Определяемые полученной структурой U функции $z_{ij}^U(p)$ будут такими:

$$z_{i_j,j}=p_j, \quad j\neq 1;$$

$$z_{i,1}=(p,d^i)-\sum_{j:i_j=i}p_j, \quad i\in I.$$

Все остальные $z_{ij}=0$. Для допустимости таких $z_{ij}(p)$ в задаче (3)-(6) необходимо, чтобы выполнялись условия (6) и, в частности,

$$z_{i_j,j}=p_j\leq p_j b_j^i, \quad j=1. \tag{20}$$

Если для некоторого j_0 имеем $b_{j_0}^{i_{j_0}}<1$, то (20) вместе с $p\geq 0$ дает $p_{j_0}=0$.

Будем уменьшать v_{j_0}, не меняя остальных потенциалов. Ясно, что при малых уменьшениях v_{j_0} все неравенства (19) будут выполняться, кроме неравенства, отвечающего паре (i_{j_0}, j_0) — оно поменяет знак. Когда v_{j_0} достигнет значения $v_{j_0}=\max_{i\neq i_{j_0}}(u_i+\ln c_j^i)=u_{i'_{j_0}}+\ln c_{j_0}^{i'_{j_0}}$, получим новую оптимальную базисную структуру U', задаваемую множествами $\mathcal{B}'=\mathcal{B}\setminus\{(i_{j_0},j_0)\}\cup\{(i'_{j_0},j_0)\}$, $\mathcal{W}'=\{(i_{j_0},j_0)\}$.

Получилась прежняя ситуация: для каждого $j \neq 1$ в $\mathcal{B}'$ входит лишь одна пара $(i,j)=(i'_j, j)$ и соответствующие функции $x^{U'}_{ij}$ имеют вид: $\gamma'_j p_j, \gamma'_j > 0$. Для $j=j_0$, однако, получим $\gamma'_{j_0} = 1 - b^{i_{j_0}}_{j_0} < \gamma_{j_0} = 1$. Если по-прежнему $\gamma'_{j_0} > b^{i_{j_0}}_{j_0}$, то процедуру можно повторить.

Так как по предположению (2) при каждом j выполняется $\sum_i b^i_j > 1$, то через конечное число шагов будет получена требуемая структура $\tilde{U}$. Действительно, нужно лишь убедиться, что неотрицательны значения функций $x^{\tilde{U}}_{i1}(p)$ при малых вариациях p от $p = e_1$. Это очевидно, ибо при $p = e_1$ имеем $x^{\tilde{U}}_{i1}(e_1) = d^i_1 > 0$ по (I8).

Будем считать, что выполняется также следующее

ПРЕДПОЛОЖЕНИЕ 2. Для любого подмножества $K \subset J$ и любого $j \in J$

$$\sum_{i \in K} b^i_j \neq 1. \tag{2I}$$

При выполнении этого предположения, как легко видеть, для достаточно близких к точке e_1 точек $p \in \sigma^0$ все величины $x^{\tilde{U}}_{ij}(p), (i,j) \in \tilde{\mathcal{B}}$, строго положительны. При таких p, ввиду условия двойственной невырожденности, $\tilde{U}$ будет единственной оптимальной базисной структурой.

Сформулируем полученное утверждение в виде леммы.

ЛЕММА I. *При выполнении условия* (2I) *все достаточно близкие к* e_1 *точки* $p \in \sigma^0$ *принадлежат только одному из множеств* $\Omega(U), U \in \mathcal{L}$, *— множеству* $\Omega(\tilde{U})$.

Полученная структура $\tilde{U}$ порождает, таким образом, одноточечное множество $\Xi(\tilde{U}) = \{q^0\}$. Рассмотрим точку $p^\circ = q^0 + \tau_0 e_1$, где τ_0 выберем настолько большим, чтобы точка $\bar{p}^0 = p^0 / \sum_j p^0_j$ попала во внутренность множества $\Omega(\tilde{U})$. Согласно вышеизложенному, такое τ_0 найдется.

Структура $U_0 = \tilde{U}$ и точки p^0, q^0 определяют начальное состояние процесса.

Отметим, что $p^0 - q^0 = \tau_0 e_1$, и это означает, что если рассматривать $\bar{p}^0$ и q^0 как элементы линейного пространства Σ, введенного в [4], то элемент $\bar{p}^0 \ominus q^0$ принадлежит лучу $\Lambda \subset \Sigma$,

$$\Lambda = \{ z \in \Sigma \mid z = \mu \odot f_1,\ \mu \geq 0 \}, \tag{22}$$

где $f_1 = \frac{1}{(n+1)}(2,1,\dots,1) \in \sigma^\circ$, а $\odot$, $\ominus$ – операции умножения на скаляр и вычитания в Σ.

Для полноты изложения напомним, что элементами пространства Σ являются лучи $P \subset Int\, R^n_+$, исходящие из точки O. Операции сложения и умножения на скаляр в Σ определяются следующим образом.

Под суммой $P' \oplus P''$ элементов P', $P'' \in \Sigma$ понимается луч $P \in \Sigma$, проходящий через точку p с координатами

$$p_j = p_j' p_j'', \quad j \in J,$$

где p_j' и p_j'' – координаты каких-либо точек на лучах P' и P'' соответственно.

Под произведением $t \odot P$ вещественного числа t и элемента $P \in \Sigma$ понимается луч $Q \in \Sigma$, проходящий через точку q с координатами

$$q_j = p_j^t, \quad j \in J,$$

где p_j – координаты какой-либо точки на луче P.

В дальнейшем при записи операций будем для краткости отождествлять луч $P \in \Sigma$ с любой ненулевой точкой $p \in P$. Таким образом, если $p, q \in Int\, R^n_+$, то под $p \ominus q$ понимается $P \ominus Q$, где P и Q – элементы из Σ, порождаемые точками p и q соответственно.

Вернемся к изложению алгоритма.

Пару точек $p \in \Omega(U)$ и $q \in \Xi(U), U \in \mathcal{L}$ будем называть допустимой, если $(p \ominus q) \in \Lambda$, т.е. $p \in (e_1, q]$.

ПРЕДПОЛОЖЕНИЕ 3. Если $p, q \in \sigma^\circ$ – допустимая пара, $p \in \Omega(U)$, $q \in \Xi(U)$, $U = (\mathcal{B}, \mathcal{W}) \in \mathcal{L}$ и y_i, $i \in I$, вместе с q удовлетворяют (13)-(15), то из всех неравенств (10), (14) и (15) разве лишь одно выполняется как равенство.

На k-м шаге процесса имеется некоторая структура $(\mathcal{B}_k, \mathcal{W}_k) = U_k \in \mathcal{L}$ и допустимая пара точек $\bar{p}^k \in \Omega(U_k)$, $q^k \in \Xi(U_k)$ т.е. при некотором $\tau_k > 0$ выполняется $p^k = q^k + \tau_k e_1$ и $\bar{p}^k = p^k / \sum p_j^k$.

Рассмотрим для $U = U_k$ систему уравнений (16)-(17). Как будет ясно из дальнейшего, для получающейся системы возможны лишь две ситуации:

(i) множество $\mathcal{B}_k$ является i-накрывающим в следующем смысле: при каждом $i \in I$ множество $\{ j \in J \mid (i,j) \in \mathcal{B}_k \}$ непусто. При этом порождаемая система (I6)-(I7) имеет ранг $(n-1)$;

(ii) множество $\mathcal{B}_\kappa$ не является i-накрывающим, а ранг соответствующей системы (I6)-(I7) равен n.

С и т у а ц и я (i). Если реализовалась ситуация (i), то с точностью до множителя определяется ненулевое решение системы (I6)-(I7). Будем различать два случая:

(α) $\sum_j z_j^\kappa \neq 0$. В этом случае, без ограничения общности, считаем $\sum_j z_j^\kappa = 1$ и рассматриваем зависящие от параметра t точки

$$p(t)=(1-t)p^\kappa + t z^\kappa, \qquad (23)$$

$$q(t)=(1-t)q^\kappa + t z^\kappa. \qquad (24)$$

(β) $\sum_j z_j^\kappa = 0$. В этом случае точки $p(t)$ и $q(t)$ задаются формулами

$$p(t)=p^\kappa + t z^\kappa, \qquad (23')$$

$$q(t)=q^\kappa + t z^\kappa, \qquad (24')$$

а на z^κ накладывается следующее условие нормировки:

$$\min_j (q_j^\kappa + z_j^\kappa) = 0,$$

т.е. $q(1)$ принадлежит границе R_+^n. Параметр t либо увеличивается, либо уменьшается от значения $t=0$. О том, как выбирается направление изменения t, будет сказано ниже. Граница изменения t в выбранном направлении определяется неравенством $t \leq 1$ (в случае увеличения t) и условиями $\bar{p}(t) \in \Omega(U_\kappa)$, $q(t) \in \Xi(U_\kappa)$, т.е. неравенствами (I0) и (I2). В дальнейшем будет показано, что при сделанных предположениях выполняется $\Xi(U_\kappa) \subset \operatorname{Int} R_+^n$, а потому в случае ($\beta$) значение $t=1$ не может достигаться.

Таким образом, если при изменении t оказалось достижимым значение $t=1$, то $z^\kappa \in \Omega(U_\kappa) \cap \Xi(U_\kappa)$ и $p = z^\kappa$ – искомый равновесный вектор цен. В противном случае в зависимости от типа лимитирующего изменение t неравенства могут представиться четыре случая:

(γ) Лимитирует неравенство $x_{i_0 j_0}^{U_\kappa}(p(t)) \geq 0$. В этом случае принимаем $\mathcal{B}_{\kappa+1} = \mathcal{B}_\kappa \setminus \{(i_0, j_0)\}$, $\mathcal{W}_{\kappa+1} = \mathcal{W}_\kappa$.

($\gamma\gamma$) Лимитирует неравенство $x_{i_1 j_1}^{U_\kappa}(p(t)) \leq b_{j_1}^{i_1} p_{j_1}(t)$. В этом случае $\mathcal{B}_{\kappa+1} = \mathcal{B}_\kappa \setminus \{(i_1, j_1)\}$, $\mathcal{W}_{\kappa+1} = \mathcal{W}_\kappa \cup \{(i_1, j_1)\}$.

(∂) Лимитирует неравенство

$$\frac{c^{i_0}}{q_{\ell_0}(t)} \le \frac{c^i_j}{q_j(t)}, \ (i,j) \in \mathcal{B}_\kappa, \ (i_0, \ell_0) \notin U_\kappa .$$

В этом случае $\mathcal{B}_{\kappa+1} = \mathcal{B}_\kappa \cup \{(i_0, \ell_0)\}$, $\mathcal{W}_{\kappa+1} = \mathcal{W}_\kappa$.

($\partial\partial$) Лимитирует неравенство

$$\frac{c^i_j}{q_j(t)} \le \frac{c^{i_1}_{s_1}}{q_{s_1}(t)}, \ (i,j) \in \mathcal{B}_\kappa, \ (i_1, s_1) \in \mathcal{W}_\kappa .$$

В этом случае $\mathcal{B}_{\kappa+1} = \mathcal{B}_\kappa \cup \{(i_1, s_1)\}$, $\mathcal{W}_{\kappa+1} = \mathcal{W}_\kappa \setminus \{(i_1, s_1)\}$.

ЗАМЕЧАНИЕ. Если к вершине $(m+j_0)$ графа $\Gamma(\mathcal{B}_\kappa)$ примыкает лишь одна дуга $(i_0, m+j_0)$ этого графа, то функция $z^{U_\kappa}_{i_0 j_0}(p)$ имеет вид γp_{j_0}, а значит, неравенства $z_{i_0 j_0} \ge 0$ и $z_{i_0 j_0} \le b^{i_0}_{j_0} p_{j_0}$ не могут оказаться лимитирующими. Тем самым при выполнении итерации не может нарушаться свойство j-накрываемости графа: к каждой вершине $m+j$, $j \in J$, примыкает хотя бы одна дуга. Так как исходный граф $\Gamma(\mathcal{B}_0)$ этим свойством обладает, то обладают им и графы, отвечающие последующим итерациям.

Если t_κ - определяемое лимитирующим неравенством значение t, то полагаем в любом случае $p^{\kappa+1} = p(t_\kappa)$, $q^{\kappa+1} = q(t_\kappa)$ и переходим к следующему шагу. При этом $p^{\kappa+1} - q^{\kappa+1} = \tau_{\kappa+1} e_1$, где $\tau_{\kappa+1} = (1-t_\kappa)\tau_\kappa$ в случае (α), и $\tau_{\kappa+1} = \tau_\kappa$ в случае (β). В любом варианте имеем $p^{\kappa+1} \ominus q^{\kappa+1} \in \Lambda$.

Поясним теперь правило выбора направления изменения параметра t. Заметим, что выход точки $\bar{p}(t_\kappa)$ на границу множества $\Omega(U_\kappa)$ приводит к обращению в равенство одного из неравенств системы (10), и это, в свою очередь, ведет к тому, что на одно неравенство расширится система (14)-(15), отвечающая $U = U_\kappa$ и задающая клетку $\Xi(U_\kappa)$. Возникающее неравенство назовем комплементарным к лимитирующему. Аналогично возникает комплементарное неравенство в системе (10), если лимитирующее неравенство оказалось в системе (12).

Правило выбора направления изменения t состоит в том, что изменению t в выбранном направлении не должно препятствовать добавленное комплементарное неравенство. Из дальнейшего будет следовать, что этим направление изменения t определяется однозначно.

На начальной итерации граф $\Gamma(\mathcal{B}_0)$ связен, система (17) состоит из одного уравнения, которое является тождеством, а система (I6) имеет, очевидно, ранг $(n-1)$. Таким образом реализуется ситуация (i), и из (I6) получим $\tau^\circ = q^\circ$, т.е. имеем случай (α). При этом $q(t) \equiv q^\circ$, $p(t) = (1-t)p^\circ + tq^\circ = q^\circ + (1-t)\tau_\circ e_1$. Ясно, что t следует увеличивать, ибо при уменьшении t будем иметь $\bar{p}(t) \in \Omega(U_\circ)$ при всех $t \leq 0$, и процесс останавливается.

Обсудим подробнее вопрос о ранге системы (I6)-(I7) и его изменении при реализации ситуации (i).

Пусть на K-м шаге была ситуация (i), как это описано выше. Рассмотрим структуру какой-либо линейно-независимой подсистемы системы (I6). Каждое уравнение (I6) отвечает паре вершин, принадлежащих одной компоненте связности графа $\Gamma(\mathcal{B}_k)$. Так как $\mathcal{B}_k$ является i-накрывающим, то на каждой компоненте связности этого графа имеется хоть одна вершина $(m+j)$, $j \in J$, и, как легко видеть, от ν-й компоненты связности в упомянутую подсистему войдут $|J|-1$ уравнений. Если $\varkappa$ - общее число компонент связности, то общее число уравнений подсистемы будет $n-\varkappa$. Добавляя к ним $\varkappa$ уравнений системы (I7), получим n уравнений, но с одной линейной зависимостью: сумма уравнений (I7) дает тождество:

$$\sum_{j=1}^{n} p_j - \sum_{(i,j)\in W} b_j^i p_j \equiv \sum_{i=1}^{m} (p, d^i) - \sum_{(i,j)\in W} b_j^i p_j .$$

Полученная подсистема системы (I6)-(I7) эквивалентна всей системе. Любую подсистему системы (I6)-(I7), полученную указанным образом, будем именовать главной подсистемой.

При выполнении итерации главная подсистема претерпевает следующие изменения: либо к графу $\Gamma(\mathcal{B}_k)$ добавляется одна дуга, соединяющая две компоненты связности в одну - случай (∂) и ($\partial\partial$); либо исключается одна дуга, и содержащая ее компонента связности распадается на две компоненты - случаи (y) и (yy). В первом варианте в главную подсистему добавится одно уравнение вида (I6), но два уравнения из (I7) заменятся одним - их суммой; во втором варианте произойдет обра́тная операция: одно из уравнений (I7) распадется на два и, возможно, исключится одно из уравнений (I6). Это исключение не произойдет только в том случае, когда одна из вновь образовавшихся компонент связности графа не содержит ни одной вершины $(m+j)$, $j \in J$, т.е. вырождается в одну вершину вида $i \in I$. В этом случае все вершины вида $(m+j)$ исходной компоненты связности снова попадают на одну компоненту связности, а значит, все соответствующие уравнения вида (16) остаются в главной подсистеме.

Схематически происходящие преобразования в системе (17) можно изобразить так: в первом варианте $a=0$, $b=0$ заменится на $a-b=0$, во втором варианте $a+b=0$ заменится на $a=0$, $b=0$. Ясно, что в последнем случае можно произвести замену на $a+b=0$, $b=0$ или $a+b=0$, $a=0$, т.е. можно говорить не о распадении одного уравнения на два, а просто о добавлении еще одного уравнения.

Таким образом, в любом случае переход от главной подсистемы κ-го шага к главной подсистеме $(\kappa+1)$-го шага состоит в том, что одно уравнение добавляется и, возможно, одно исключается. Легко видеть, что добавляется уравнение, получающееся из лимитирующего неравенства, а следовательно, не выполняющегося при $\rho=z^{\kappa}$, являющимся решением главной подсистемы κ-го шага. Поэтому главная подсистема κ-го шага вместе с добавляемым уравнением образует уже систему ранга n. Из этого следует, что исключаемое уравнение не может выполняться при $\rho=z^{\kappa+1}$, но именно это уравнение сформирует комплементарное неравенство, добавляемое на следующем шаге. Значит, направление изменения параметра t на $(\kappa+1)$-м шаге определяется однозначно.

При отбрасывании исключаемого уравнения ранг системы может понизиться разве лишь на единицу, а значит, ранг системы (16)-(17) на $(\kappa+1)$-м шаге не меньше $(n-1)$. Но если $\mathcal{B}_{\kappa+1}$ является i-накрывающим, то ранг не может быть больше $(n-1)$ и, значит, равен $(n-1)$.

Если же $\mathcal{B}_{\kappa+1}$ не является i-накрывающим, то из вышеизложенного следует, что ранг упомянутой системы равен n.

Ситуация (ii). Пусть полученное $\mathcal{B}_{\kappa+1}$ в предыдущих рассмотрениях оказалось не i-накрывающим. Это означает, что на κ-й итерации реализовался один из случаев (y) или (yy).

Отметим, что для любой структуры $(\mathcal{B}, \mathcal{W})=U\in\mathfrak{B}$ такой, что $\Omega(U)\neq\emptyset$ из $J_{i'}^{\mathcal{B}}=\{j\in J/(i',j)\in\mathcal{B}\}=\emptyset$, следует непустота множеств

$$J_{i'}^{o}=\{j\in J/(i',j)\notin U\},$$

$$J_{i'}^{W}=\{j\in J \mid (i',j)\in W\}.$$

Действительно, взяв $p\in \Omega(U)$, имеем

$$(p,d^{i'})=\sum_{s:(i',s)\in W} p_s b_s^{i'}.$$

Отсюда, ввиду $b^{i'}\geq d^{i'}, b^{i'}\neq d^{i'}$ следует $J_{i'}^{0}\neq\emptyset$, а ввиду $d^{i'}\neq 0$ имеем $J_{i'}^{W}\neq\emptyset$.

Заметим также что при этом точке $q\in\Sigma(U)$ будет соответствовать в (13–(15) отрезок значений $y_{i'}$ с концами

$$y_{i'}^{0}=\max_{\ell:(i',\ell)\notin V}\frac{c_\ell^{i'}}{q_\ell},\quad y_{i'}^{W}=\min_{s:(i',s)\in W}\frac{c_s^{i'}}{q_s}, \tag{25}$$

в то время как при $J_i^{B}\neq\emptyset$ величина y_i определяется однозначно: $y_i=c_j^{i}/q_j$, $(i,j)\in\mathcal{B}$.

Пусть на κ-й итерации реализовался случай (y). Следуя описанию этого случая, имеем $\mathcal{B}_{\kappa+1}=\mathcal{B}_\kappa\setminus\{(i_0,j_0)\}$, $\mathcal{W}_{\kappa+1}=\mathcal{W}_\kappa$. Так как $\mathcal{B}_{\kappa+1}$ оказалось не i-накрывающим, то $J_{i_0}^{B_{\kappa+1}}=\emptyset$.

В этом случае найдем $y_{i_0}^{W_{\kappa+1}}=c_{s_0}^{i_0}/q_{s_0}^{\kappa+1}$ и, принимая

$$\mathcal{B}_{\kappa+2}=\mathcal{B}_{\kappa+1}\cup\{(i_0,s_0)\},\quad \mathcal{W}_{\kappa+2}=\mathcal{W}_{\kappa+1}\setminus\{(i_0,s_0)\}, q^{\kappa+2}=q^{\kappa+1}, p^{\kappa+2}=p^{\kappa+1},$$

перейдем к следующему шагу.

Если на κ-й итерации имели случай (yy), то, согласно описанию этого случая, $\mathcal{B}_{\kappa+1}=\mathcal{B}_\kappa\setminus\{(i_1,j_1)\}$, $\mathcal{W}_{\kappa+1}=\mathcal{W}_\kappa\cup\{(i_1,j_1)\}$, и теперь $J_{i_1}^{B_{\kappa+1}}=\emptyset$. В этом случае найдем $y_{i_1}^{0}=c_{\ell_1}^{i_1}/q_{\ell_1}^{\kappa+1}$ и перейдем к следующему шагу с $q^{\kappa+2}=q^{\kappa+1}$, $p^{\kappa+2}=p^{\kappa+1}$, $\mathcal{B}_{\kappa+2}=\mathcal{B}_{\kappa+1}\cup\{(i_1,\ell_1)\}$, $\mathcal{W}_{\kappa+2}=\mathcal{W}_{\kappa+1}$. В любом случае $\mathcal{B}_{\kappa+2}$ является уже i-накрывающим, а система (16)-(17), отвечающая $U_{\kappa+2}$, имеет снова ранг $(n-1)$, т.е. на итерации $(\kappa+2)$ реализуется снова ситуация (i). Таким образом, ситуация (ii) подряд может реализоваться только один раз.

Подчеркнем, что при выполнении предположения 3 описанный переход от $U_{\kappa+1}$ к $U_{\kappa+2}$ осуществляется однозначно.

Несложно показать, что в случае (y) главная подсистема системы (16)-(17) для $U=U_{\kappa+2}$ получается из главной подсистемы для $U=U_{\kappa+1}$ исключением уравнения, совпадающего с уравнением $\tau_{i_0 j_0}^{U_{\kappa+2}}(p)=0$. Тем самым для $p=\tau^{\kappa+2}$ это уравнение удовлетворяться не будет, а значит, направление изменения t на $(\kappa+2)$-м шаге, задаваемое условием

$\varkappa_{i_0 j_0}^{v_{\kappa+2}}(p(t)) \geq 0$,будет однозначно определено. Аналогично в случае (yy).

Для обоснования корректности приведенного описания нужно показать еще, что если при реализации ситуации (i) не получено состояния равновесия (т.е. значение $t=1$ оказалось недостижимым), то лимитирующее неравенство существует.

ЛЕММА 2. Если для данной структуры $V \in \mathcal{L}$ множество $\Omega(V)$ непусто, то множество $\Xi(U)$ замкнуто.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\hat{p} \in \Omega(V)$, и векторы $u \in R^m$, $v \in R^n$ таковы, что их компоненты u_i и v_j образуют оптимальную совокупность двойственных переменных транспортной задачи модели при $p=\hat{p}$. Образуем из них составной вектор $g=(u,v) \in R^{m+n}$ и рассмотрим множество $G(\hat{p}) \subset R^{m+n}$ векторов g , образованных по указанному правилу. Пусть $V(\hat{p})$ - проекция множества $G(\hat{p})$ на подпространство переменных v_j , т.е.

$$V(\hat{p})=\{v \in R^n / \exists u \in R^m : (u,v) \in G(\hat{p})\}.$$

По $V(\hat{p})$ образуем множество

$$\Phi(\hat{p})=\{q \in \sigma^\circ / q_\kappa = e^{v_\kappa} / \sum_j e^{v_j},\ v \in V(\hat{p})\}. \tag{26}$$

Легко видеть, что $\Xi(V) \subset \Phi(\hat{p})$. В самом деле, как отмечалось выше, система (II)-(I2) эквивалентна (I3)-(I5), откуда логарифмированием получаем, что $u_i = -\ln y_i$ и $v_j = \ln q_j$ удовлетворяют (7). А это, с учетом $\hat{p} \in \Omega(V)$, и означает, что $\ln q \in V(\hat{p})$.

Для доказательства замкнутости $\Xi(U)$ достаточно показать, что у $\Xi(U)$ нет точек прикосновения на границе симплекса σ , что равносильно существованию некоторого $\Delta > 0$, обладающего свойством: для компонент q_j любого $q \in \Xi(U)$ выполняется $q_j \geq 0$. Покажем, что такое Δ существует для множества $\Phi(\hat{p})$. Ввиду $\Xi(V) \subset \Phi(\hat{p})$ это будет означать существование требуемого Δ и для $\Xi(U)$.

Так как в условиях (7) фигурируют только разности $v_j - u_i$, то из $g=(u,v) \in G(\hat{p})$ следует, что и вектор $g + t\theta$, где $\theta = (1,\dots,1) \in R^{m+n}$, также принадлежит $G(\hat{p})$ при любом t .

Однако изменение на константу t всех v_j не повлияет на соответствующий элемент q из $\Phi(\hat{p})$, образованный в соответствии с (26). Тем самым при образовании $\Phi(\hat{p})$ можно ограничиться элементами V, полученными проектированием элементов g из подмножества $G^{\circ}(\hat{p}) \subset G(\hat{p})$:

$$G^{\circ}(\hat{p}) = \{ g=(u,v) \in G(\hat{p}) | \sum_i u_i + \sum_j v_j = 0 \}.$$

Теперь достаточно доказать ограниченность множества $G^{\circ}(\hat{p})$. Это получаем из следующих рассуждений.

Оптимальные значения целевой функции произвольной задачи линейного программирования является кусочно-линейной функцией правых частей ограничений задачи. Эта функция f является выпуклой, если мы имеем дело с задачей минимизации. Оптимальные векторы двойственных переменных, отвечающие задаче с данным вектором правых частей b, являются субградиентами функции f в точке b. Множество субградиентов $\partial f(b)$ (субдифференциал) является ограниченным и замкнутым, если $b \in \mathrm{Int}(\mathrm{dom}\, f)$ [5], т.е. при всех b, достаточно близких к b, рассматриваемая задача линейного программирования должна быть разрешимой.

В рассматриваемом случае имеем дело с транспортной задачей, которая разрешима лишь при условии сбалансированности правых частей, что эквивалентно условию принадлежности вектора правых частей $\tilde{b}$ определенному подпространству. Если рассматривать сужение $\tilde{f}$ функции f на это подпространство, то субградиенты функции $\tilde{f}$ получаются проектированием на указанное подпространство субградиентов функции f. Легко видеть, что этому отвечает переход от множества $G(\hat{p})$ к множеству $G^{\circ}(\hat{p})$. В результате получаем, что для доказательства ограниченности множества $G^{\circ}(\hat{p})$ достаточно показать разрешимость транспортной задачи модели при малых вариациях величин $(\hat{p}, d^{i})$, $\hat{p}_j$ и $b_j^{i} \hat{p}_j$ с сохранением условия сбалансированности. Несложно убедиться, что это так, благодаря (2) и $\hat{p} \in \mathrm{Int}\, \mathfrak{S}$. Лемма доказана.

Изменение t ограничивается линейной системой неравенств. Из доказанной леммы 2 следует, что если $q(t) \not\equiv q^{\kappa}$, то лимитирующее неравенство при изменении t не будет получено лишь в том случае, когда оказывается достижимым $t = 1$.

В случае $q^{\kappa} = z^{\kappa}$, т.е. при $q(t) \equiv q^{\kappa}$, отсутствие лимитирующего неравенства означало бы, что $t \to -\infty$ и $\bar{p}(t) \in \Omega(U_{\kappa})$. Но в этом случае $\bar{p}(t) \to e_1$, и в силу леммы I $U_{\kappa} = \tilde{U}$, т.е. получается, что при некотором $\kappa \geq 1$ повторилась начальная структура $\tilde{U} = U_0$. Ниже будет показано, что и этот случай исключается.

§ 4. Обоснование сходимости процесса

Считая, что процесс не заканчивается на начальной итерации, рассмотрим последовательность структур $U_\kappa \in \mathcal{L}$, порождаемую описанным алгоритмом, начиная со структуры $U_0 = \tilde{U}$, о которой шла речь выше. Покажем, что получаемая последовательность обладает свойствами последовательностей, возникающих в известном алгоритме Лемке [6] для решения задачи линейной комплементарности.

Каждой структуре U_κ сопоставим множество $\Omega(U_\kappa)\ominus\Xi(U_\kappa) = \Theta(U_\kappa)\subset\Sigma$. Как отмечалось, имеющиеся на κ-м шаге процесса точки $\bar{p}^\kappa\in\Omega(U_\kappa)$ и $q^\kappa\in\Xi(U_\kappa)$ таковы, что элемент $s^\kappa = (\bar{p}^\kappa\ominus q^\kappa)\in\Sigma$ принадлежит лучу $\Lambda\subset\Sigma$, определяемому по (22). Тем самым $s^\kappa\in\Theta(U_\kappa)\cap\Lambda$.

О структурах U_κ и $U_{\kappa+1}$ будем говорить, что они являются соседними.

ЛЕММА 3. Каждая структура $U = U_\kappa$ однозначно порождает не более двух структур, которые могут быть ее "соседями". Для структуры $\tilde{U}$ соседней может быть только структура – U_1.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. То, какая ситуация – (i) или (ii) – реализуется на κ-м шаге, определяется только самой структурой $U = U_\kappa$. Рассмотрим отдельно каждую из возможностей.

Пусть для U_κ реализуется ситуация (i). В этом случае по U_κ однозначно порождается τ^κ, и переход к соседней структуре $U_{\kappa+1}$ определяется путем анализа движения точек $p(t)$ и $q(t)$, задаваемых формулами (23), (24) и (23′), (24′). Заметим, что если при этом поменять на противоположное направление изменения параметра t, то в результате будет получена другая соседняя структура – $U_{\kappa-1}$. Нужно показать, что прямолинейные участки, зачерчиваемые точками $\bar{p}(t)$ и $q(t)$ (при соблюдении условия $\bar{p}(t)\in\Omega(U_\kappa)$; $q(t)\in\Xi(U_\kappa)$), не зависят от предыстории процесса и определяются только самой структурой $U = U_\kappa$.

Выберем из системы (16), описывающей подпространство $M(U_\kappa)(\supset\Xi(U_\kappa))$, некоторую максимальную линейно-независимую подсистему и запишем ее в виде

$$\sum_{j\in J} \beta^j q_j = 0. \qquad (16')$$

где β^j – векторы, а q_j – координаты текущей точки q подпространства $M(U_\kappa)$.

В аналогичном виде перепишем систему (17), описывающую подпространство $L(U_\kappa)(\supset \Omega(U_\kappa))$:

$$\sum_{j\in J} \alpha^j p_j = 0. \qquad (17')$$

Совместное рассмотрение этих систем дает некоторую главную подсистему системы (16)-(17) и $p = q = \tau^\kappa$ – решение этой системы.

Рассмотрим сначала случай $\tau_1^\kappa \neq 0$. Покажем, что в этом случае представление элемента $s \in \Lambda$ в виде разности $s = p \ominus q$, $p \in L(U_\kappa)$, $q \in M(U_\kappa)$, единственно.

Говоря о единственности p и q в этом представлении, мы рассматриваем их как элементы пространства Σ ; как точки из $\mathrm{Int}\, R_+^n$ они будут определены с точностью до положительного множителя. Для элемента $s = (p \ominus q) \in \Lambda$ мы можем ограничиться лишь такими p , $q \in \mathrm{Int}\, R_+^n$, компоненты которых p_j и q_j связаны соотношениями:

$$p_1 = \gamma q_1 ,$$

$$p_j = q_j , \; j \neq 1.$$

Здесь $\gamma \geq 1$ – некоторый множитель, который и характеризует положение элемента s на луче Λ . Подставляя представление для p_j в (17'), получаем

$$\gamma \alpha^1 q_1 + \sum_{j=2}^{n} \alpha^j q_j = 0 \qquad (17'')$$

Рассмотрим теперь совместно ситсему уравнений (16') и (17"). Из того, что ранг системы (16)-(17) равен $(n-1)$ (ибо реализуется ситуация (i)), а $\tau_1^\kappa \neq 0$, следует, что составные векторы $\delta^j = (\beta^j, \alpha^j)$ при $j = 2, \ldots, n$ линейно-независимы, и поэтому при любом γ система (16') и (17") имеет единственное с точностью до множителя ненулевое решение. Все множество решений будет заполнять не более чем двумерное подпространство. Для его описания, учитывая линейный характер зависимости решения от γ , можно взять два различных значения γ и натянуть на соответствующие решения подпространство. При $\gamma = 1$ мы имеем $q = \tau^\kappa$ и при $\gamma = \gamma_\kappa = p_1^\kappa / q_1^\kappa$ имеем $q = q^\kappa$. Таким образом, все множество решений системы (16'), (17") представляет собой множество линейных комбинаций векторов q^κ и τ^κ.

Нас, однако, интересуют лишь строго положительные решения q, рассматриваемые с точностью до положительного множителя. Накладывая естественное условие нормировки $\sum q_j = 1$, приходим к формулам (24) и (24′).

Таким образом, формулы (24) и (24′) описывают при дополнительном условии $q(t) > 0$ соответственно для случаев $\sum_j \tau_j^c \neq 0$ и $\sum_j \tau_j^\kappa = 0$ множество всех $q \in M(U_\kappa) \cap \sigma^\circ$, которые при подходящем $p \in L(U_\kappa) \cap \operatorname{Int} R^n_+$ дают по формуле $s = p \ominus q$ некоторый элемент $s \in \Lambda$. Связь между параметром t, задающим $q(t)$, и параметром γ, задающим соответствующий элемент $s(\gamma)$, устанавливается, как несложно убедиться, формулами

$$\gamma = 1 + \frac{(1-t)\,\tau_\kappa}{(1-t)q_1^\kappa + t\tau_1^\kappa}, \qquad \gamma = 1 + \frac{\tau_\kappa}{q_1^\kappa + t\,\tau_1^\kappa}$$

соответственно для случаев $\sum_j \tau_j^\kappa = 1$ и $\sum_j \tau_j^\kappa = 0$.

Отвечающий вектору $q(t)$ подходящий в указанном смысле вектор $p(t)$ определяется формулами (23) и (23′). Вычисляя производную от γ по t, получаем (в обоих случаях):

$$\gamma' = -\frac{\tau_1^\kappa \tau_\kappa}{q_1(t)}.$$

Таким образом, γ не меняет знака (ввиду условия $q(t) > 0$), и монотонному изменению t отвечает монотонное изменение γ.

Резюмируя, заключаем, что луч Λ и структура U_κ однозначно порождают траекторию пары точек $(p(t),\ q(t)) \in R^n \times R^n$, а тем самым, ввиду предложения 3, однозначно порождаются и соседние с U_κ структуры, определяемые крайними значениями t, при которых еще выполняется $(\bar p(t),\ q(t)) \in \Omega(U_\kappa) \times \Xi(U_\kappa)$. Ясно, что таких значений будет не более двух, что и требуется.

Вышеизложенное можно интерпретировать и таким образом: соседние с U_κ структуры определяются крайними значениями параметра γ, при котором элемент $s(\gamma) \in \Lambda$ еще принадлежит множеству $\Theta(U_\kappa)$.

Рассмотрим теперь случай $\tau_1^c = 0$. Ясно, что в этом случае из решения $q = \tilde q$ системы (16′), (17″) при некотором $\gamma = \tilde\gamma$ мы получаем целую прямую решений $q = \tilde q + \lambda \tau^c$, отвечающих тому же $\gamma = \tilde\gamma$. Покажем, однако, что строго положительные решения существуют только при $\gamma = \gamma_\kappa = p_1^\kappa / q_1^\kappa$. В самом деле, ввиду $\tau_1^\kappa = 0$, точка

$$\delta(\gamma)=\binom{\beta^1}{0}+\gamma\binom{0}{\alpha^1}$$

не принадлежит подпространству Π, натянутому на векторы δ^j, $j=2,\dots,n$, при $\gamma=1$ и, наоборот, принадлежит при $\gamma=\gamma_\kappa\neq 1$. Но тогда при любом $\gamma\neq\gamma_c$ будем иметь $\delta(\gamma)\notin\Pi$, а значит, единственным с точностью до множителя решением при таком γ будет $q=z^\kappa\neq 0$.

В результате несложно заключить, что формулы (23), (24), (23′), (24′) при дополнительном условии $q(t)>0$ в этом случае описывают полный прообраз точки $s(\gamma_\kappa)\in\Lambda$ при отображении, переводящем пару $(p,q)\in\Sigma\times\Sigma$, $p\in L(U_\kappa)\cap\cap\, Int R^n_+$, $q\in M(U_\kappa)\cap\bar{\sigma}$ в элемент $p\ominus q$. Так как γ_κ однозначно порождается самой структурой U_κ, то, повторяя предыдущие рассуждения, получаем требуемое: у структуры U_κ не более двух соседних структур.

Осталось рассмотреть ситуацию (ii). В изложении алгоритма эта ситуация описывается для $U=U_{\kappa+1}$. Проводя для этого случая описанные выше построения, убеждаемся, что векторы δ^j, $j=2,\dots,n$, и $\delta(\gamma)$ являются линейно-независимыми при $\gamma=1$ и линейно-зависимыми при $\gamma=\gamma_{\kappa+1}=p_1^{\kappa+1}/q_1^{\kappa+1}$. Отсюда заключаем, что значение $\gamma_{\kappa+1}$ однозначно порождается самой структурой $U_{\kappa+1}$, как и соответствующее решение $q=q^{\kappa+1}$ системы (16′), (17″). Тем самым однозначно, благодаря предположению 3, определяются две соседние структуры путем отыскания максимума и минимума в формулах (25).

Для завершения доказательства нужно еще рассмотреть структуру $\tilde{U}=U_0$. Для нее имеет место ситуация (i) и $z^0=q^0>0$. Система (17″) в данном случае отсутствует, и $q(t)=q^0$. Соответствующая точка $\bar{p}(t)$ перемещается при изменении t по интервалу $(e_1, q^0]$ и $\bar{p}(t)\in\Omega(\tilde{U})$, если только $\bar{p}(t)$ достаточно близко к e_1. Это означает, что при всех достаточно больших γ элемент $s(\gamma)$ принадлежит $\Theta(\tilde{U})$. Тем самым у $\tilde{U}$ соседняя структура разве лишь одна – она определяется минимальным γ, при котором $s(\gamma)$ еще принадлежит $\Theta(\tilde{U})$. Лемма доказана.

ТЕОРЕМА. Рассмотренный алгоритм при выполнении условия двойственной невырожденности транспортной задачи модели, условия

(2) и предположений I – 3 заканчивается через конечное число шагов получением равновесного вектора цен.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Нужно лишь показать, что ни одна из пройденных в процессе структур U_k снова повториться не может. Из этого будет следовать конечность процесса и тот факт, что последней структурой не может быть начальная структура U_0 .

Но тогда, как уже отмечалось, при анализе последней структуры достигается значение $t = 1$, а значит, получается искомый равновесный вектор цен.

Ясно, что

$$U_k \neq U_{k+1} \tag{27}$$

по самому описанию процесса. Кроме того, так как направление изменения параметра t на каждом шаге процесса согласовано с возникающим комплементарным неравенством, то такое неравенство, добавленное в систему (10) или (12) на k-м шаге, не может оказаться сразу же лимитирующим, а потому

$$U_k \neq U_{k+2}. \tag{28}$$

Пусть теперь структуры

$$U_0,\ U_1,\ \ldots,\ U_{\gamma-1} \tag{29}$$

все различны, а U_γ совпадает с одной из них. Согласно отмеченному выше, $U_\gamma \neq U_{\gamma-1},\ U_{\gamma-2}$. Легко видеть также, что $U_\gamma \neq U_\lambda$ при $0 < \lambda < \gamma - 2$, ибо в противном случае структура $U_{\gamma-1}$ как соседняя с $U_\lambda\ (= U_\gamma)$ должна бы совпадать с $U_{\lambda-1}$ или с $U_{\lambda+1}$, а это противоречит тому, что все структуры (29) различны.

Наконец, $U_\gamma \neq U_0$, ибо иначе, так как у структуры U_0 по лемме 3 лишь одна соседняя структура, имели бы $U_{\gamma-1} = U_1$. Далее, по лемме 3 ввиду (28) следовало бы $U_{\gamma-2} = U_2$. Продолжая эту цепочку неравенств, приходим неизбежно к противоречию с (27) или (28). (На самом деле только с (28), ибо из описания алгоритма легко следует, что пройденная структура может повториться лишь через четное число шагов, а потому γ здесь является четным, а отмеченная цепочка равенств заканчивается равенством $U_{\frac{\gamma}{2}-1} = U_{\frac{\gamma}{2}+1}$.)

Таким образом, никакая пройденная структура снова повториться не может. Теорема доказана.

§ 5. Пример

В качестве иллюстративного примера рассмотрим следующую модель обмена, в которой три продукта и три участника:

$$c^1 = (5,\ 2,\ 4), \qquad d^1 = (2,\ 2,\ 1), \qquad b^1 = (8,\ 6,\ 5);$$
$$c^2 = (5,\ 4,\ 6), \qquad d^2 = (1,\ 2,\ 5), \qquad b^2 = (5,\ 7,\ 11);$$
$$c^3 = (2,\ 3,\ 2), \qquad d^3 = (4,\ 1,\ 1), \qquad b^3 = (8,\ 4,\ 6).$$

Здесь $\sum d^i = (7,\ 5,\ 7)$. Мы сознательно отказались от условия нормировки $\sum_i d_j^i = 1$ на величины d_j^i ради того, чтобы коэффициенты линейных функций $x_{ij}^U(p)$ получались целочисленными. Это упростит изложение, а в описании алгоритма потребуются лишь незначительные очевидные изменения (например, правая часть в уравнениях (5) заменится на $p_j \sum_i d_j^i$).

В предложенной модели все d^i положительны. Поэтому в качестве исходной вершины симплекса σ, определяющей исходную структуру $\tilde{U}$, может быть взята любая из точек e_j. Для определенности возьмем вершину e_2.

<u>Получение начальной структуры</u> $\tilde{U}$. Условимся информацию о рассматриваемых структурах $U = (\mathcal{B}, \mathcal{W})$ записывать в виде матриц 3 x 3, отмечая в них значком x позиции $(i,j) \in \mathcal{B}$, значком $\wedge$ позиции $(i,j) \in \mathcal{W}$ и точкой позиции $(i,j) \notin U$. При таком соглашении полученная для приведенной модели в соответствии с изложением оптимальная базисная структура при $p = e_2$ будет задаваться матрицей

$$U = \begin{pmatrix} \times & \times & \times \\ \cdot & \times & \cdot \\ \cdot & \times & \cdot \end{pmatrix}$$

Соответствующие оптимальные значения двойственных переменных u_i и v_j таковы:

$$u_1 = 0, \quad u_2 = -\ln 2, \quad u_3 = -\ln 3/2,$$
$$v_1 = \ln 5, \quad v_2 = \ln 2, \quad v_3 = \ln 4.$$

Определяя $x_{ij}^U(p)$, будем иметь, в частности, $x_{13}(p) = 7p_3$. Неравенство $x_{13}(p) \le p_3 b_3^1$ дает $7p_3 \le 5p_3$, что при $p_3 > 0$ не выполняется. Таким образом, полученная структура не является оптимальной в окрестности вершины $p = e_2$.

В соответствии с описанием алгоритма следует уменьшать v_3. При $v_3 = \ln 3$ определится искомая структура

$$\tilde{U} = \begin{pmatrix} \times & \times & \Lambda \\ \cdot & \times & \times \\ \cdot & \times & \cdot \end{pmatrix}$$

которая уже будет оптимальной не только при $p = e_2$, но и при $p \in \sigma$, мало отличающихся от e_2.

По структуре $U_0 = \tilde{U}$ однозначно получаем $q^0 = (0{,}5,\ 0{,}2,\ 0{,}3)$. Для $p^0 = q^0 + \tau_0 e_2$ нужно τ_0 взять настолько большим, чтобы выполнялись все условия (10) на функции $x_{ij}^v(p)$, полученные по структуре $U = U_0$. Эти функции будут такими (в порядке очередности их получения):

$$x_{13} = b_3^1 p_3 = 5p_3, \quad x_{11} = p_1 \sum d_1^i = 7p_1,$$

$$x_{32} = (p, d^3) = 4p_1 + p_2 + p_3, \quad x_{23} = p_3 \sum d_3^i - x_{13} = 7p_3 - 5p_3 = 2p_3,$$

$$x_{22} = (p, d^2) - x_{23} = p_1 + 2p_2 + 5p_3 - 2p_3 = p_1 + 2p_2 + 3p_3,$$

$$x_{12} = (p, d^1) - x_{11} - x_{13} = 2p_1 + 2p_2 + p_3 - 7p_1 - 5p_3 = -5p_1 + 2p_2 - 4p_3.$$

Из условий (10) выполняющимися не при всех $p \in \sigma$ будут лишь такие:

$x_{32} \le b_2^3 p_2$, что дает $-4p_1 + 3p_2 - p_3 \ge 0$;

$x_{22} \le b_2^2 p_2$, что дает $-p_1 + 5p_2 - 3p_3 \ge 0$;

$x_{12} \ge 0$, что дает $-5p_1 + 2p_2 - 4p_3 \ge 0$.

Все эти неравенства выполняются, например, при $\tau_0 = 1{,}8$. В результате $p^0 = (0{,}5,\ 2{,}0,\ 0{,}3)$.

Итерация 0. Как отмечалось в описании алгоритма, на начальной итерации реализуется ситуация (i), и при этом имеем $r^0 = q^0$, а величину t в формулах (23)-(24) следует увеличивать, что соответствует уменьшению τ от значения $\tau = \tau_0$. Максимальное значение t, при котором еще выполняются для $p = p(t)$ все указанные неравенства, оказывается равным 0,175, что дает $\tau_1 = (1-t)\tau_0 = 1{,}65$. Лимитирующим является условие $x_{12}(p) \ge 0$, т.е. имеем случай (y). В результате получаем

$$p^1 \doteq (0{,}5,\ 1{,}85,\ 0{,}3), \qquad U_1 = \begin{pmatrix} \times & \cdot & \Lambda \\ \cdot & \times & \times \\ \cdot & \times & \cdot \end{pmatrix}$$

$$q^1 = (0{,}5,\ 0{,}2,\ 0{,}3),$$

Итерация 1. Реализуется ситуация (i). Система (16)-(17) приводит к

$$\frac{p_2}{4} = \frac{p_3}{6},$$

$$5p_1 - 2p_2 + 4p_3 = 0.$$

Нетривиальным решением является $\tilde{\tau}^1 = (-8,\ 10,\ 15)$. Имеем $\sum \tilde{\tau}_j^1 = 17 \neq 0$. Нормируя, получаем τ^1, $\sum \tau_j^1 = 1$:

$$\tau^1 = (-0{,}4706,\ 0{,}5882,\ 0{,}8824).$$

Это приводит, в соответствии с (23)-(24), к таким $p(t)$ и $q(t)$:

$$p(t) = (0{,}5-0{,}9706t,\ 1{,}85-1{,}2618t,\ 0{,}3+0{,}5824t),$$

$$q(t) = (0{,}5-0{,}9706t,\ 0{,}2+0{,}3882t,\ 0{,}3+0{,}5824t).$$

Направление изменения t получим, анализируя комплементарное неравенство, отвечающее условию $z_{12} \geq 0$:

$$\frac{c_1^1}{q_1(t)} \geq \frac{c_2^1}{q_2(t)},$$

т.е.

$$\frac{5}{q_1(t)} \geq \frac{2}{q_2(t)}.$$

Это неравенство выполняется при $t \geq 0$, и, следовательно, значение t следует увеличивать (от $t = 0$). При этом для $p(t)$ должны выполняться все неравенства, полученные на предыдущей итерации, а для $q(t)$ - следующая система условий, полученная из (12) при $U = U_1$:

$$\frac{5}{q_1(t)} \leq \frac{4}{q_3(t)}, \quad ((1,3) \in W_1),$$

$$\frac{5}{q_1(t)} \leq \frac{4}{q_2(t)}, \quad ((2,1) \notin U_1),$$

$$\frac{2}{q_1(t)} \leq \frac{3}{q_2(t)}, \quad ((3,1) \notin U_1),$$

$$\frac{2}{q_3(t)} \leq \frac{3}{q_2(t)}, \quad ((3,3) \notin U_1).$$

Лимитирующим для t оказывается условие, отвечающее связи $(1,3) \in W_1$. Получаем $t = 0{,}07359$. Имеем случай $(\partial\partial)$, и связь (1,3), в соответствии с описанием алгоритма, переходит из W_1 в $\mathcal{B}_2$. В результате получаем

$$q^2 = (0{,}4286,\ 0{,}2286,\ 0{,}3429), \qquad U_2 = \begin{pmatrix} x & \cdot & x \\ \cdot & x & x \\ \cdot & x & \cdot \end{pmatrix}.$$
$$p^2 = q^2 + 1.5286\, e_2 ,$$

Не проводя столь подробных пояснений, приведем результаты последующих итераций.

<u>Итерация</u> 2. $\tau^2 = q^2$, $t = 0{,}5608$. Лимитирующим оказалось условие $x_{13}(p(t)) \geq 0$.

$$q^3 = q^2, \qquad U_3 = \begin{pmatrix} x & \cdot & \cdot \\ \cdot & x & x \\ \cdot & x & \cdot \end{pmatrix}$$
$$p^3 = q^3 + 0.6714 e_2 ,$$

<u>Итерация</u> 3. $\tau^3 = (0{,}2188,\ 0{,}3125,\ 0{,}4688)$, $t = 0{,}4358$,

$$q^4 = (0{,}3333,\ 0{,}2667,\ 0{,}4000), \qquad U_4 = \begin{pmatrix} x & \cdot & \cdot \\ x & x & x \\ \cdot & x & \cdot \end{pmatrix}$$
$$p^4 = q^4 + 0.3667 e_2 ,$$

<u>Итерация</u> 4. $\tau^4 = q^4$, $t = 0{,}1516$,

$$q^5 = q^4 \qquad U_5 = \begin{pmatrix} x & \cdot & \cdot \\ x & x & x \\ \cdot & \wedge & \cdot \end{pmatrix}$$
$$p^5 = q^5 + 0.3111 e_2 ,$$

<u>Итерация</u> 5. Для структуры U_5 реализуется ситуация (ii) – множество $\mathcal{B}_5$ не является i-накрывающим. При этом на предыдущей итерации в ситуации (i) реализовался случай (yy). Поэтому, согласно описанию алгоритма, находим

$$\max_{(3,\ell)\notin U_5} \frac{c_\ell^3}{q_\ell^5} = \max\left\{\frac{2}{q_1^5}, \frac{2}{q_3^5}\right\} = \frac{2}{0.3333} = \frac{c_1^3}{q_1^5},$$

и связь (3,1) включается в $\mathcal{B}_6$. В результате получаем:

$$q^6 = q^5, \qquad U_6 = \begin{pmatrix} x & \cdot & \cdot \\ x & x & x \\ x & \wedge & \cdot \end{pmatrix}$$
$$p^6 = p^5,$$

<u>Итерация</u> 6. $\tau^6 = q^6$, $t = 0{,}3571$.

$$q^7 = q^6, \qquad U_7 = \begin{pmatrix} x & \cdot & \cdot \\ \cdot & x & x \\ x & \wedge & \cdot \end{pmatrix}$$
$$p^7 = q^7 + 0.2 e_2$$

<u>Итерация</u> 7. $\tau^7 = (0{,}4444,\ 0{,}2222,\ 0{,}3333)$, $t = 0{,}3750$,

$$q^8 = (0{,}3750,\ 0{,}2500,\ 0{,}3750), \qquad U_8 = \begin{pmatrix} x & \cdot & \cdot \\ \cdot & x & x \\ x & \wedge & x \end{pmatrix}$$
$$p^8 = q^8 + 0.1250\, e_2 ,$$

<u>Итерация</u> 8. $\tau^8 = q^8$, $t = 1$.

Процесс окончен. Равновесным вектором цен рассматриваемой модели является вектор $p = q^5 = (0{,}375,\ 0{,}250,\ 0{,}375)$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Шмырев В.И. Об одном подходе к отысканию равновесия в простейших моделях обмена // Докл. АН СССР. – 1983. – Т.268, № 5. – С.1062–1066.
2. Шмырев В.И. Алгоритм поиска равновесия в линейной модели обмена // Сиб. мат. журн. – 1985. – Т.26, № 2. – С.162–175.
3. Шмырев В.И. Об отыскании равновесия в модели кооперации // Оптимизация. – 1987. – Вып.41(58). – С.60–75.
4. Шмырев В.И. Монотонность в линейных моделях обмена // Оптимизация. – 1981. – Вып.27(44). – С.77–95.
5. Рокафеллар Р. Выпуклый анализ. – М.: Мир, 1973.
6. Lemke C.E. Bimatrix equilibrium points and mathematical programming // Management Sci.– 1985.– N 11.– P.681–689.

Поступила в ред.-изд. отдел
16.09.1987.