Модели динамики и равновесия

УДК 519.86

УСТОЙЧИВЫЕ СИСТЕМЫ ДОГОВОРОВ И ЭКОНОМИЧЕСКОЕ РАВНОВЕСИЕ

В.А.Васильев

В работе предлагается теоретико-игровой анализ вполне договорных распределений в моделях экономического обмена. Наряду с кооперативными, рассматриваются и равновесные аспекты характеризации договорных отношений. В частности, детальное исследование структуры договорного блокирования позволяет установить достаточно общие условия, при которых любое вполне договорное распределение оказывается вальрасовским.

Рассматриваемая ниже модель договорных отношений идейно близка изучавшейся в [1,2] (например, в отличие от [3], главное внимание уделяется коалиционной устойчивости, инвариантной относительно конкретных способов задания договорных распределений). Основные модификации постановок из [1] состоят в некотором дополнительном ограничении на структуру элементарных обменов и в увеличении свободы блокирования допустимых систем договоров. В целом настоящая работа является расширенным изложением соответствующего раздела из [4].

1. В качестве базовой используется стандартная модель обмена

$$\mathcal{E} = \langle N, \{X_i, w^i, \succ_i\}_N, \mathcal{G} \rangle, \qquad (1)$$

где $N = \{1, \dots, n\}$ – множество участников, $X_i \subseteq \mathbb{R}^\ell$, $w^i \in \mathbb{R}^\ell$, $\succ_i \subseteq X_i \times X_i$ $(i \in N)$ – их потребительские множества, начальные запасы и отношения предпочтения соответственно. Семейство $\mathcal{G} \subseteq 2^N$ определяет совокупность допустимых коалиций $S \subseteq N$, которые могут объединять возможности своих участников с целью улучшения не устраивающих их распределений суммарного запаса $\sum w^i$. Наконец, число ℓ обозначает количество продуктов, фигурирующих в процессе обмена.

Приступая к формальному определению интересующего нас отношения доминирования в $\mathcal{E}$, модифицируем некоторые определения из [1] так, чтобы они явным образом отражали ограничения на типовую структуру элементарных обменов в рамках коалиций из $\mathcal{G}$. Для каждого $S \in \mathcal{G}$ зафиксируем некоторое множество $M_S \subseteq \mathbb{R}^l$ и положим $M_\mathcal{G} = \{M_S\}_\mathcal{G}$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ I. Договором (типа $M_\mathcal{G}$) коалиции $S \in \mathcal{G}$ называется совокупность векторов $V = \{V_{ij}\}_{i,j \in S}$, удовлетворяющая условиям: (а) $V_{ij} \in M_S$ для всех $i, j \in S$; (б) $V_{ij} = -V_{ji}$ для всех $i,j \in S$.

Коалицию S, в рамках которой заключается договор V, будем обозначать также через $S(v)$.

Компоненты векторов V_{ij}, фигурирующих в определении договора V, указывают объемы обмена между участниками $i, j \in S(v)$. При этом положительные компоненты V_{ij} определяют количество продуктов соответствующего наименования, которые участник j должен передать участнику i, а абсолютные значения отрицательных - количество продуктов, которые участник i должен передать участнику j.

Множества M_S определяют тип элементарных обменов V_{ij}, используемых в договорах, заключаемых коалициями $S \in \mathcal{G}$. Например, при $M_S = \{x \in \mathbb{R}^l \mid p_S \cdot x = 0\}$ единственное ограничение на V_{ij} состоит в том, чтобы обмены были эквивалентными в (договорных) ценах $p_S \in \mathbb{R}^l$.

Будем говорить, что договор V правильный, если для любого $i \in S(v)$ найдутся $j, k \in S(v)$ такие, что V_{ij} содержит положительные, а V_{ik} - отрицательные компоненты.

Системой договоров называется всякое конечное множество правильных договоров типа $M_\mathcal{G}$.

Таким образом, предполагается, что между участниками одной и той же коалиции $S \in \mathcal{G}$ возможно заключение нескольких договоров. Отметим также, что система договоров может содержать несколько экземпляров идентичных (по значениям V_{ij}) договоров, отличающихся только своими номерами. Поэтому, как принято в подобных ситуациях, будем считать, что системы $\mathcal{V} = \{V^\tau\}_\mathcal{R}$ и $\tilde{\mathcal{V}} = \{\tilde{V}^\tau\}_{\tilde{\mathcal{R}}}$ совпадают в том и только том случае, когда $\mathcal{R} = \tilde{\mathcal{R}}$ и $V^\tau = \tilde{V}^\tau$ для всех $\tau \in \mathcal{R}$.

Обозначим через $\Delta_i(\mathcal{V})$ суммарный набор потребительских благ, получаемых и передаваемых участником $i \in N$ в результате заключения системы договоров $\mathcal{V} = \{V^\tau\}_\mathcal{R}$:

$$\Delta_i(\mathcal{V}) = \sum_{\{j \in S(v^\tau)\}} \sum_{j \in S(v^\tau)} v_{ij}^\tau \quad . \tag{2}$$

В силу равенства $\sum_{i=1}^{n} \Delta_i(\mathcal{V}) = 0$, вытекающего из соотношений $v_{ij}^\tau = -v_{ji}^\tau$, итоговое состояние $x(\mathcal{V}) = (x^i(\mathcal{V}))_N$, определяемое формулой

$$x^i(\mathcal{V}) = w^i + \Delta_i(\mathcal{V}), \quad i \in N, \tag{3}$$

представляет собой перераспределение суммарного начального запаса $\sum_{i=1}^{n} w^i$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Система договоров $\mathcal{V} = \{v^\tau\}_{\mathcal{R}}$ называется допустимой, если $x^i(\mathcal{V}) \in X_i$ для всех $i \in N$.

Допустимость системы $\mathcal{V}$ гарантирует принадлежность состояния $x(\mathcal{V})$ множеству

$$X(N) = \{(x^i)_N \in \prod_N X_i \mid \sum_N x^i = \sum_N w^i\}$$

сбалансированных распределений $\mathcal{E}$. При этом каждый из участников системы имеет принципиальную возможность разорвать любой из касающихся его договоров, поскольку в его власти не поставить соответствующие продукты.

Для описания исследуемых форм разрыва договоров введем следующие обозначения. Пусть $\mathcal{V} = \{v^\tau\}_{\mathcal{R}}$ – произвольное множество договоров, $\mathcal{R}'$ – некоторое (быть может, пустое) подмножество $\mathcal{R}$. Обозначим через $A(\mathcal{V}, \mathcal{R}', \mathcal{E})$ совокупность всех допустимых систем договоров $\tilde{\mathcal{V}} = \{\tilde{v}^\tau\}_{\tilde{\mathcal{R}}}$ модели обмена $\mathcal{E}$, удовлетворяющих условиям: (а) $\tilde{\mathcal{R}} \subseteq \mathcal{R} \setminus \mathcal{R}'$, $v^\tau = \tilde{v}^\tau$ для всех $\tau \in \tilde{\mathcal{R}}$; (б) $\tilde{\mathcal{V}}$ – максимальная по включению среди всех допустимых систем договоров, удовлетворяющих условию (а).

Множество $A(\mathcal{V}, \mathcal{R}', \mathcal{E})$ характеризует результат процедуры разрыва договоров, состоящей из следующих этапов. На первом аннулируются все договоры v^τ ($\tau \in \mathcal{R}'$). Если получившаяся система $\{v^\tau\}_{\mathcal{R} \setminus \mathcal{R}'}$ допустима, то она и является единственным элементом $A(\mathcal{V}, \mathcal{R}', \mathcal{E})$. Если же нет, то на заключительном этапе аннулируется некоторое подмножество договоров из $\{v^\tau\}_{\mathcal{R} \setminus \mathcal{R}'}$ с тем, чтобы обеспечить допустимость оставшихся. Условие (б) из определения $A(\mathcal{V}, \mathcal{R}', \mathcal{E})$ требует, чтобы при этом разрывался лишь необходимый минимум договоров. Указанная процедура, вообще говоря, неоднозначна, и ее итогом может оказаться как пустое множество, так и целое семейство допустимых систем.

Охарактеризуем возможности коалиции $S \in \sigma$ по блокированию состояния $x(\mathcal{V})$, порождаемого допустимой системой договоров $\mathcal{V}=\{v^r\}_{\mathcal{R}}$. Будем предполагать, что наряду с разрывом договоров, отвечающих некоторой части $\mathcal{R}'$ множества

$$\mathcal{R}^S=\{r\in\mathcal{R} \mid S(v^r)\cap S\neq\emptyset\}, \qquad (4)$$

коалиция S может заключить новый договор w.

Обозначим через $\mathcal{E}_w$ вариацию модели $\mathcal{E}$, порожденную договором w:

$$\mathcal{E}_w=\langle N, \{X_i, w^i+\Delta_i(w), \alpha_i\}_N, \sigma\rangle,$$

где в соответствии с введенными ранее обозначениями

$$\Delta_i(w)=\sum_{j\in S(w)} w_{ij}, \quad i\in N. \qquad (5)$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. Будем говорить, что коалиция $S\in\sigma$ блокирует систему договоров $\mathcal{V}=\{v^r\}_{\mathcal{R}}$, если найдутся $\mathcal{R}'\subseteq\mathcal{R}^S$, договор w типа M_σ и система $\mathcal{V}'\in A(\mathcal{V},\mathcal{R}',\mathcal{E}_w)$ такие, что $S(w)=S$ и $x^i(\mathcal{V})\alpha_i\, x^i(\mathcal{V}'\cup\{w\})$ для всех $i\in S$, причем $x^k(\mathcal{V}'\cup\{w\})\in\mathcal{P}_k(x^k(\mathcal{V}))$ для некоторого $k\in S$ *).

Правильную систему договоров $\mathcal{V}$ будем называть квазиустойчивой, если не существует коалиции $S\in\sigma$, которая блокирует $\mathcal{V}$.

Выделим состояния $\mathcal{E}$, коллективная устойчивость которых не зависит (в рамках M_σ) от конкретного устройства порождающих их систем договоров. Пусть $x=(x^i)_N$ – произвольное состояние из $X(N)$. Обозначим через $\mathcal{W}(x)$ множество всех правильных систем договоров $\mathcal{V}$ таких, что $x=x(\mathcal{V})$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4. Состояние $x\in X(N)$ назовем вполне договорным, если множество $\mathcal{W}(x)$ непусто и все содержащиеся в нем системы договоров квазиустойчивы.

Множество вполне договорных состояний обозначим через $\mathcal{D}_0^{M_\sigma}(\mathcal{E})$ и будем называть вполне договорным множеством модели $\mathcal{E}$.

В силу определения, всякая правильная система $\mathcal{V}\in\mathcal{W}(x)$, обеспечивающая вполне договорное состояние x, является "взаимовыгодной" с точки зрения любой из коалиций $S\in\sigma$.

Действительно, ни попытка заключить новый, ни последующий разрыв каких-либо "старых" договоров из $\mathcal{V}$, в которых участвует S, не приводит к улучшению ее положения (причем независимо

---

*) Здесь и далее $\mathcal{P}_i(z)=\{x^i\in\alpha_i(z) \,/\, (x^i,z)\notin\alpha_i\}$.

от того, чем завершится процедура разрыва договоров). Более того, в случае полноты бинарных отношений α_i всякий разрыв такого рода, приводящий к улучшению позиции одного из участников S, с неизбежностью ухудшает положение какого-либо из его партнеров.

II. Всякая коалиционная структура представима в виде объединения подструктур, вписанных в соответствующие компоненты связности множества N. Поэтому всюду в дальнейшем, не уменьшая общности, будем предполагать, что $\mathfrak{S}$ неразложима. Напомним [4], что коалиционная структура $\mathfrak{S}$ называется неразложимой, если для любого нетривиального разбиения $\{N_1, N_2\}$ множества N существует коалиция $S \in \mathfrak{S}$ такая, что $S \cap N_1 \neq \phi$, $S \cap N_2 \neq \phi$.

Кроме того, далее будем предполагать, что все множества M_S одинаковы и представляют собой некоторое подпространство $M \subsetneq R^\ell$, обладающее тем свойством, что каждый его ненулевой элемент содержит компоненты разных знаков. Отметим, что на основании теоремы отделимости подпространство $M \neq R^\ell$ обладает указанным свойством в том и только в том случае, когда его поляра $M^\circ = \{p \in R^\ell \mid p \cdot x = 0,\ x \in M\}$ удовлетворяет условию

$$M^\circ \cap \operatorname{int} R^\ell_+ \neq \phi. \qquad (6)$$

Ясно, что в этом случае M допускает представление $M = \{x \in R^\ell \mid p \cdot x = 0,\ p \in P_M\}$, где P_M – конечное подмножество из R^ℓ, среди элементов которого есть строго положительные векторы. Таким образом, ограничения на типы рассматриваемых далее договоров имеют балансовый характер, определяемый системой (фиксированных) цен из P_M.

Обозначим через $\mathcal{W}_M$ совокупность всех систем договоров типа M_S, где $M_S = M$ для всех $S \in \mathfrak{S}$. Договоры указанного типа в дальнейшем будем называть M-договорами. Несколько модифицируя определение 3, будем говорить, что распределение x α_M-доминируется распределением y, если для некоторой системы договоров $V = \{v^S\}_{\mathcal{R}} \in \mathcal{W}(x)$ найдутся $S \in \mathfrak{S}$, $\mathcal{R}' \subseteq \mathcal{R}^S$ и правильный договор w коалиции S такие, что: (1) $y = x(V' \cup \{w\})$, где V' – некоторая система договоров из $A(V, \mathcal{R}, w)$; (2) $x^i \alpha_i y^i$ для всех $i \in S$, причем $y^k \in \mathcal{P}_k(x^k)$ для некоторого $k \in S$.

Другими словами, отношение $x \alpha_M y$ имеет место тогда и только тогда, когда y является итогом блокирования некоторой системы договоров $V \in \mathcal{W}(x)$ какой-либо коалицией из $\mathfrak{S}$.

Дадим более подробное описание структуры доминирования α_M, ядром которого является множество $\mathcal{D}_0^{M\epsilon}(\mathcal{E}) = \mathcal{D}_0^M(\mathcal{E})$. С этой целью охарактеризуем совокупность состояний, достижимых посредством заключения M -договоров.

Положим $M_\varepsilon(N) = \{x \in \prod_N X_i \mid \exists V \in \mathcal{W}_M [x = x(V)]\}$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ I. Если коалиционная структура σ неразложима, то

$$M_\varepsilon(N) = \{x \in X(N) \mid \exists \Delta \in \Delta_M(N)[x = w + \Delta]\}, \tag{7}$$

где

$$\Delta_M(N) = \{\Delta = (\Delta^i)_N \in M^N \mid \sum_N \Delta^i = \mathbb{O}\}, \tag{8}$$

$$w = (w^1, \dots; w^n).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если $x \in M_\varepsilon(N)$, то $x = x(V) = w + \Delta(V)$ для некоторого $V \in \mathcal{W}_M$, где $\Delta(V) = (\Delta_i(V))_N$. Непосредственно из определения M -договора вытекают искомые соотношения: $\Delta_i(V) \in M$, $\sum \Delta_i(V) = \mathbb{O}$.

Пусть теперь $x = w + \Delta$, где $\Delta \in \Delta_M(N)$. Покажем, что существует $V \in \mathcal{W}_M$ такой, что $\Delta = \Delta(V)$. Доказательство проведем индукцией по $|N|$. Для $|N| = 2$ искомая система состоит из одного договора $\{v_{12}, v_{21}\}$, где $v_{12} = \Delta^1$, $v_{21} = -\Delta^1$. Пусть утверждение установлено для всех случаев, когда число участников экономики не превышает m. Рассмотрим ситуацию, когда $|N| = m+1$. Если $N \in \sigma$, то искомая система состоит из одного договора v, определяемого соотношениями $v_{i,i+1} = \sum_{k=1}^{i} \Delta^k$ ($i = 1, \dots, m$), $v_{ij} = \mathbb{O}$ ($j > i+1$). Если же $N \notin \sigma$, то, не уменьшая общности, можно считать, что существует $S = \{i_1, \dots, i_k\} \in \sigma$ такая, что элементы $i_1, \dots, i_{k-1}$ не входят ни в какую другую коалицию $S' \in \sigma$. (В случае, когда исходная система σ не обладает такой коалицией S, нужный результат достигается заменой σ на соответствующее вписанное в нее покрытие N, состоящее лишь из двухэлементных коалиций.) Построим договор v^1, отвечающий коалиции S, по формуле: $v_{i_s i_{s+1}} = \sum \Delta^{i_t}$ ($s = 1, \dots, k-1$), $v_{i_s i_{s'}} = \mathbb{O}$ для остальных значений $s < s'$.

Далее, рассмотрим модель $\tilde{\mathcal{E}} = \langle \tilde{N}, \{\tilde{X}_i, \tilde{w}^i, \tilde{\alpha}_i\}_{\tilde{N}}, \tilde{\sigma} \rangle$, где $\tilde{N} = (N \setminus S) \cup \{i_k\}$, $\tilde{X}_i = X_i$, $\tilde{w}^i = w^i$; $\tilde{\alpha}^i = \alpha^i (i \in N)$, а $\tilde{\sigma}\{K \cap \tilde{N} \mid K \in \sigma\}$. Ясно, что $\tilde{\sigma}$ неразложима. Поскольку векторы $\tilde{\Delta}^i = \Delta^i$

$(i \in N \setminus S)$, $\tilde{\Delta}^{ik} = \sum_{t=1}^{k} \Delta^{it}$, принадлежащие M, удовлетворяют условию $\sum_N \tilde{\Delta}^i = \Phi$, на основании индукционного предположения существует система M -договоров $\mathcal{V} = \{v^r\}_{r=2}^{S}$ такая, что $\hat{\Delta} = \Delta(\mathcal{V})$. Тогда, как нетрудно проверить, $\Delta = \Delta(\mathcal{V} \cup \{v^1\})$, что и требовалось установить.

Важной характеристикой стратегических возможностей коалиций $S \in \mathfrak{S}$ по блокированию того или иного распределения из $M_\varepsilon(N)$ является тот факт, что указанные возможности инвариантны как относительно текущего состояния x, так и относительно конкретного выбора системы $\mathcal{V} \in \mathcal{W}(x)$. Опишем сначала множество доступных коалиции S приращений начального суммарного запаса $\sum_S w^i$, обеспечиваемых разрывами договоров некоторой системы $\mathcal{V} \in \mathcal{W}_M$. Положим

$$\mathcal{A}(\mathcal{V}, \mathcal{R}', S) = \bigcup_{w / S(w) = S} A(\mathcal{V}, \mathcal{R}', \mathcal{E}_w),$$

$$\mathcal{A}(\mathcal{V}, S) = \bigcup_{\mathcal{R}' \subseteq \mathcal{R}^S} A(\mathcal{V}, \mathcal{R}', S).$$

Тогда упомянутое множество состоит из векторов вида

$$\Delta_S(\mathcal{V}') = \sum_S \Delta_i(\mathcal{V}'), \quad \mathcal{V}' \in \mathcal{A}(\mathcal{V}, S).$$

Из определения $\mathcal{A}(\mathcal{V}, S)$ вытекает, что $\sum_S w^i + \Delta_S(\mathcal{V}') \in \sum_S X_i$.

Таким образом, множество распределений из $\prod_S X_i$, достижимых усилиями коалиции S при разрыве договоров системы $\mathcal{V}$, имеет вид

$$\mathcal{X}_{\mathcal{V}}(S) = \{x \in \prod_S X_i^M \mid \exists\, \mathcal{V}' \in \mathcal{A}(\mathcal{V}, S) [\sum_S x^i = \\ = \sum_S w^i + \Delta_S(\mathcal{V}')]\},$$

где $X_i^M = X_i \cap \{w^i + M\}$, $i \in N$.

Для характеристики возможностей S по блокированию состояния $x \in M_\varepsilon(N)$ следует учитывать уже объединение множеств $x_{\mathcal{V}}(S)$ по всем $\mathcal{V} \in \mathcal{W}(x)$. Покажем, что такие объединения

$$Z_x(S) = \bigcup_{\mathcal{V} \in \mathcal{W}(x)} \mathcal{X}_{\mathcal{V}}(S)$$

не зависят от класса эквивалентности $\mathcal{W}(x)$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. Для любых $x, \hat{x} \in M_\varepsilon(N)$ и $S \in \mathfrak{S}$ справедливо равенство $Z_x(S) = Z_{\hat{x}}(S)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Зафиксируем $S \in \sigma$, $x, \hat{x} \in M_\varepsilon(N)$ и покажем, что $Z_x(S) = Z_{\hat{x}}(S)$. Рассмотрим произвольные системы договоров $\mathcal{V} \in \mathcal{W}(x)$ и $\mathcal{V}_o = \{v_o^\tau\}_{\mathcal{R}_o} \in A(\mathcal{V}, \mathcal{R}', \mathcal{E}_w) \subseteq A(\mathcal{V}, S)$, где w - некоторый M-договор коалиции S. Покажем, что найдется система $\mathcal{V}' \in \mathcal{W}(\hat{x})$, надлежащий разрыв которой приводит к приращению величины $\sum\limits_S w^i$, равному $\Delta_S(\mathcal{V}_o)$.

Выберем какую-либо систему $\tilde{\mathcal{V}} = \{\tilde{v}^\tau\}_{\tilde{\mathcal{R}}} \in \mathcal{W}(\hat{x})$. Поскольку ненулевые элементы M имеют компоненты разных знаков, можно, не уменьшая общности, считать, что $\tilde{\mathcal{R}} = \mathcal{R}_o$, причем $S(v_o^\tau) = S(\tilde{v}^\tau)$ и $(v_o^\tau)_{ij} \neq \tilde{v}^\tau_{ij}$ для всех $\tau \in \mathcal{R}_o$, $i, j \in S(v_o^\tau)$. Рассмотрим систему договоров

$$\mathcal{V}' = \{v^{(\tau,0)}\}_{\tau \in \mathcal{R}_o} \cup \{v^{(\tau,1)}\}_{\tau \in \mathcal{R}_o},$$

где $v_{ij}^{(\tau,0)} = (v_o^\tau)_{ij}$, $v_{ij}^{(\tau,1)} = \tilde{v}^\tau_{ij} - v_{ij}$.

Непосредственно из построения $\mathcal{V}'$ вытекает равенство $\Delta(\mathcal{V}') = \Delta(\tilde{\mathcal{V}})$, поэтому $\mathcal{V}' \in \mathcal{W}(\hat{x})$. Положим $\mathcal{R} = \{(\tau, 1) \mid \tau \in \mathcal{R}_o^S\}$ и обозначим через $\mathcal{R}_1$ некоторую максимальную (быть может, пустую) часть $\mathcal{R}_o \setminus \mathcal{R}_o^S$, для которой множество договоров $\hat{\mathcal{V}}_o = \{v^{(\tau,0)}\}_{\tau \in \mathcal{R}_o} \cup \{v^{(\tau,1)}\}_{\tau \in \mathcal{R}_1}$ принадлежит $A(\mathcal{V}', \mathcal{R}, \mathcal{E}_w)$. Непосредственно из построения имеем $\Delta_S(\hat{\mathcal{V}}_o) = \Delta_S(\mathcal{V}_o)$. Но это и означает, что разрыв договоров системы $\mathcal{V}' \in \mathcal{W}(\hat{x})$ с номерами из $\mathcal{R}$ позволяет S получить такое же приращение начального суммарного запаса $\sum\limits_S w^i$, как и реализация $\mathcal{V}_o \in A(\mathcal{V}, \mathcal{R}', \mathcal{E}_w)$.

Ввиду произвольности $x, \hat{x}, \mathcal{V}, \mathcal{V}_o$ и w, приведенные аргументы и доказывают предложение 2.

ЗАМЕЧАНИЕ I. Как видно из доказательства, предложение 2 (в части независимости $Z_x(S)$ от x) справедливо и для случая несовпадающих подпространств M_S, содержащих элементы с компонентами разных знаков.

Итак, распределения, достижимые усилиями коалиций $S \in \sigma$ в текущем состоянии $x \in M_\varepsilon(N)$, не зависят ни от x, ни от $\mathcal{V} \in \mathcal{W}(x)$ и определяются кооперативной игрой (в стратегической форме): $S \longmapsto G_\varepsilon^M(S)$, где $G_\varepsilon^M(S) = Pr_S M_\varepsilon(N)$ для всех $S \in \sigma \cup \{N\}$. При этом отношения предпочтения коалиций $S \in \sigma$ формируются на основании бинарных отношений α_i следующим естественным образом:

$$x \, \alpha_S \, y \iff \forall i \in S (x^i \alpha_i y^i) \; \& \; \exists k \in S (y^k \in \mathcal{P}_k(x^k)).$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5. Будем говорить, что состояние $x \in M_\varepsilon(N)$ M-блокируется состоянием $y \in M_\varepsilon(N)$, если существует коалиция $S \in \sigma$ такая, что $x^i \alpha_i y^i$ для всех $i \in S$, причем $y^k \in \mathcal{P}_k(x^k)$ для некоторого $k \in S$.

Ядро введенного бинарного отношения M-блокирования обозначим через $C_0^M(\mathcal{E})$.

На основании вышесказанного, справедливо

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. Множество вполне договорных состояний $\mathcal{D}_0^M(\mathcal{E})$ совпадает с ядром $C_0^M(\mathcal{E})$ кооперативной игры $G_\mathcal{E}^M$.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Как видно из определений 3,5 и предложения 2, отношение M-блокирования, вообще говоря, сильнее бинарного отношения α_M. Однако, являясь продолжением последнего, M-блокирование дает то же самое множество максимальных элементов: $C_0^M(\mathcal{E}) = C(\alpha_M)$. При этом важным обстоятельством является тот факт, что M-блокирование устроено проще, чем α_M. Именно, чтобы выяснить, будет ли x M-блокироваться некоторым распределением y, не требуется проверки того, что y порождается разрывом некоторой системы договоров, определяющих распределение x.

В заключение этого пункта приведем некоторые важные характеристики "договорного доминирования" в терминах обобщенных НМ-решений игры $\Gamma_M = (M_\varepsilon(N), \alpha_M)$ *).

Напомним, что бинарное отношение α называется антисимметричным, если справедлива импликация $(x, y) \in \alpha \Rightarrow (y, x) \notin \alpha$. Отношение $\alpha \subseteq \mathcal{X} \times \mathcal{X}$ будем называть полуоткрытым снизу, если множества $\alpha^{-1}(x) = \{y \in \mathcal{X} \mid (y, x) \in \alpha\}$ открыты для всех $x \in \mathcal{X}$. Наконец, как и ранее, будем использовать обозначение $\sigma_S \triangleq \{S' \in \sigma \mid S' \cap S \neq \emptyset\}$.

ТЕОРЕМА I. Пусть $\mathcal{D}_0^M(\mathcal{E}) = \emptyset$. Если отношения α_i антисимметричны и полуоткрыты снизу, множества X_i замкнуты и ограничены снизу, а коалиционная структура σ удовлетворяет условию

---

*) Определение обобщенного НМ-решения см. в [5, гл. IУ].

$$\forall S \in \mathfrak{S} [N \setminus S \subseteq \bigcup_{S' \in \mathfrak{S}_S} S'], \qquad (9)$$

то игра $\Gamma_M = (M_\varepsilon(N), \alpha_M)$ имеет конечное обобщенное НМ-решение Y такое, что $\tau(Y) \leq 3$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Покажем, что в условиях теоремы I множество $M_\varepsilon(N)$ компактно. Действительно, ввиду ограниченности снизу множества X_i существуют векторы $b^i \in \mathbb{R}^l$ такие, что для всех $x^i \in X_i$ выполняются неравенства $x^i \geq b^i$. Отсюда, ввиду того, что для любого распределения $z = (z^1, \ldots, z^n) \in M_\varepsilon(N)$ выполняются условия материального баланса $\sum_N z^i = \sum_N w^i$ имеем

$$b^i \leq z^i \leq \sum_N w^i - \sum_{j \in N \setminus \{i\}} b^j, \; i \in N. \qquad (10)$$

Далее, пусть $\{z_m\}_{m=1}^{\infty} = \{(z_m^1, \ldots, z_m^n)\}_{m=1}^{\infty}$ – произвольная сходящаяся последовательность из $M_\varepsilon(N)$. Ввиду замкнутости множеств X_i имеем $z = \lim z_m \in \prod_N X_i$. По построению все элементы последовательности $\{\Delta_m\}_{m=1}^{\infty} = \{(z_m^1 - w^1, \ldots, z_m^n - w^n)\}_{m=1}^{\infty}$ принадлежат $\Delta_M(N)$. Поэтому $\Delta = \lim \Delta_m$ тоже содержится в $\Delta_M(N)$. Но $z = w + \Delta$, а это равенство, вместе с установленным включением $z \in \prod_N X_i$, и означает, на основании предложения I, что распределение z принадлежит $M_\varepsilon(N)$. Итак, множество $M_\varepsilon(N)$ замкнуто, что ввиду соотношений (10) и доказывает его компактность.

Убедимся теперь в том, что в заданных условиях бинарное отношение α_M полуоткрыто снизу. Пусть x и y – произвольные распределения из $M_\varepsilon(N)$, для которых $x \in \alpha_M^{-1}(y)$. По определению α_M-доминирования существует коалиция $S \in \mathfrak{S}$ такая, что распределение y является результатом блокирования этой коалицией некоторой системы договоров $\mathcal{V} = \{v^r\}_{\mathcal{R}} \in \mathcal{W}(x)$. Значит, в силу определения 3, существует семейство $\mathcal{R}' \in \mathcal{R}^S = \{r \in \mathcal{R} \mid S(v^r) \cap S \neq \emptyset\}$, M-договор w коалиции S и система $\mathcal{V}_1 = \{v^r\}_{\mathcal{R}_1} \in A(\mathcal{V}, \mathcal{R}', \mathcal{E}_w)$ такие, что: (I) $y = x(\mathcal{V}_1 \cup \{w\})$; (2) $x^i \alpha_i y^i$, $i \in S$. (Здесь, как и в (3), используется обозначение $x^i(\mathcal{V}_1 \cup \{w\}) \triangleq w^i + \Delta_i(\mathcal{V}_1 \cup \{w\}$.) Ввиду полуоткрытости снизу отношений α_i существует окрестность $\mathcal{U}_x$ распределения x в $M_\varepsilon(N)$, для которой справедливы включения

$$\tilde{y}^i \in \alpha_i^{-1}(y^i), \quad i \in S, \tag{II}$$

для всех $\tilde{y}=(\tilde{y}^1,\dots,\tilde{y}^n) \in \mathcal{V}_{x_1}$. Учитывая, что в наших условиях требование $\tilde{y}^k \in \mathcal{P}_k(x^k)$ выполняется автоматически (причем для всех $k \in S$), для проверки вложения $\mathcal{V}_x \subseteq \alpha_M^{-1}(y)$ достаточно убедиться, что каждое распределение $\tilde{y} \in \mathcal{V}_x$ разрывом подходящей системы договоров из $\mathcal{W}(\tilde{y})$ и заключением некоторого нового договора может быть переведено в распределение y. Для построения такой системы рассмотрим разность $z=\tilde{y}-x$. Ясно, что $z \in \Delta_M(N)$. Далее, нетрудно проверить, что коалиционная структура $\sigma' = \sigma_S \cup \{S\}$ в условиях (9) неразложима. Поэтому, рассуждая так же, как и при доказательстве предложения I, можно построить систему M-договоров $\mathcal{V}_2$, заключаемых коалициями $S \in \sigma'$, такую, что $(z^1,\dots,z^n) = (\Delta_1(\mathcal{V}_2),\dots,\Delta_n(\mathcal{V}_2))$. Положим $\tilde{\mathcal{V}} = \mathcal{V} \cup \mathcal{V}_2$. Не уменьшая общности, можно считать, что договоры системы $\mathcal{V}_2$ пронумерованы таким множеством индексов $\mathcal{R}_2$, что $\mathcal{R} \cap \mathcal{R}_2 = \phi$. Тогда, как видно из построения, система договоров $\tilde{\mathcal{V}}$ обеспечивает реализацию распределения $\tilde{y}$ $(\tilde{\mathcal{V}} \in \mathcal{W}(\tilde{y}))$ и, кроме того, справедливо включение $\mathcal{V}_1 \in A(\tilde{\mathcal{V}}, \mathcal{R}' \cup \mathcal{R}_2, \mathcal{E}_W)$. Но это и означает, что коалиция S, разрывая все договоры семейства $\mathcal{V}_2 \cup \cup \{v^r\}_{\mathcal{R}'}$ и заключая новый договор w, может перевести $\tilde{y}$ в состояние $y = x(\mathcal{V}_1 \cup \{w\})$.

Для завершения доказательства теоремы I остается заметить, что игра $\Gamma_M = (M_\varepsilon(N), \alpha_M)$ на основании установленной выше компактности $M_\varepsilon(N)$ и полуоткрытости снизу бинарного отношения α_M удовлетворяет всем требованиям теоремы I.2 из четвертой главы работы [5].

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Если бинарные отношения α_i определены функциями полезности $u_i : X_i \to \mathbb{R}$ $(i \in N)$

$$x^i \alpha_i y^i \Longleftrightarrow u_i(x^i) < u_i(y^i),$$

то существование обобщенного НМ-решения Y игры Γ_M гарантируется и без предположения $C_0^M(\mathcal{E}) = \phi$. Проверка этого факта осуществляется по той же схеме, что и доказательство теоремы 3.2 из второй главы работы [4]. Однако в условиях непустоты $C_0^M(\mathcal{E})$ уже не обеспечивается конечность Y, а оценка его ранга имеет вид: $r(Y) \leq |\sigma|$.

Напомним, что коалиционная структура σ называется центрированной, если $\bigcap_{\sigma} S \neq \phi$.

ТЕОРЕМА 2. П у с т ь $\mathcal{D}_0^M(\mathcal{E}) \neq \phi$. Если бинарные отношения α_i ацикличны и полуоткрыты снизу, множества X_i замкнуты и ограничены снизу, а коалиционная структура $\mathfrak{S}$ является центрированной, то множество вполне договорных распределений модели $\mathcal{E}$ является предельным обобщенным НМ-решением игры Γ_M .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Ясно, что всякая центрированная коалиционная структура удовлетворяет условию (9). Поэтому (с учетом антисимметричности α_i , вытекающей из их ацикличности) структура $\mathfrak{S}$ и характеристики участников рассматриваемой модели удовлетворяют всем требованиям теоремы I. Применяя аргументацию, использовавшуюся при ее доказательстве, убеждаемся, что и в условиях теоремы 2 множество $M_\varepsilon(N)$ компактно, а бинарное отношение α_M полуоткрыто снизу. Кроме того, в силу центрированности структуры и ацикличности отношений α_i , "договорное доминирование" α_M ациклично. Следовательно, в предположениях теоремы 2 игра $\Gamma_M = (M_\varepsilon(N), \alpha_M)$ удовлетворяет всем условиям теоремы I.I из главы 4 работы [5]. Применяя эту теорему, получаем искомое: множество вполне договорных распределений, будучи ядром $C(\alpha_M)$ игры Γ_M , является ее предельным обобщенным НМ-решением.

ЗАМЕЧАНИЕ 4. Как видно из доказательства теоремы 2, ацикличности бинарных отношений α_i достаточно потребовать лишь для $i \in S_0 = \bigcap_{S \in \mathfrak{S}} S$. Для остальных участников, как и в теореме I, можно ограничиться антисимметричностью α_i .

Говоря не совсем строго, заключение теоремы 2 можно сформулировать следующим образом: для любого распределения $x \notin \mathcal{D}_0^M(\mathcal{E})$ существует процесс его последовательного улучшения (блокирования в смысле определения 3), результатом которого является распределение, сколь угодно мало отличающееся от вполне договорного. Более точно, для любого $\varepsilon > 0$ и для любого x из $M_\varepsilon(N)$, имеющего хотя бы одну неквазиустойчивую систему договоров в $W(x)$, выполняется одна из двух альтернатив: либо $\rho(x, \mathcal{D}_0^M(\mathcal{E})) < \varepsilon$, либо существует конечная последовательность распределений $x_1, \ldots, x_m$ такая, что

$x_1 = x$, $x_1 \, d_M \, x_2 \ldots d_M \, x_m$ и $\rho(x_m, \mathcal{D}_0^M(\mathcal{E})) < \varepsilon$.

Приведенные формулировки позволяют трактовать результаты, подобные теореме 2, как свидетельство определенной "конструктивности" рассматриваемого принципа оптимальности (наряду с указанием цели – устойчивости относительно разрыва договоров – обеспечивается и возможность ее достижения с любой заданной степенью точности при помощи некоторого естественного процесса последовательного улучшения).

Ш. Редукция, осуществляемая предложением 3, позволяет в традиционных рамках теории кооперативных игр находить условия, обеспечивающие существование и характеризацию вполне договорных состояний для широкого класса моделей экономического обмена.

Ограничимся характеризацией множества $\mathcal{D}_0^M(\mathcal{E})$ для случая, когда M является гиперподпространством $\mathbb{R}^\ell$ $(\dim M = \ell - 1)$. В этой ситуации в естественных условиях регулярности вполне договорные состояния оказываются равновесными, и, наоборот, каждое равновесное состояние – вполне договорным при подходящем выборе M .

Напомним, [2], что состояние $\bar{x} \in X(N)$ называется равновесным (по Вальрасу), если найдется вектор $\bar{p} \in \mathbb{R}^\ell$ такой, что $\bar{x}^i \in B_i(\bar{p})$ и $P_i(\bar{x}^i) \cap B_i(\bar{p}) = \emptyset$ для всех $i \in N$, где $B_i(\bar{p})$ – бюджетное множество участника $i \in N$:

$$B_i(\bar{p}) = \{x^i \in X_i \mid \bar{p} \cdot x^i \leq \bar{p} \cdot w^i\}.$$

Вектор $\bar{p}$, фигурирующий в определении равновесного состояния $\bar{x}$, называют равновесными ценами, отвечающими $\bar{x}$.

Вполне договорность распределений из множества $W(\mathcal{E})$ равновесных состояний модели $\mathcal{E}$ определяется лишь наличием равновесных цен, согласованных с условием (6).

ТЕОРЕМА 3. *Пусть $\bar{x} \in W(\mathcal{E})$. Если среди отвечающих ему равновесных цен существует строго положительный вектор $\bar{p}$, то $\bar{x} \in \mathcal{D}_0^M(\mathcal{E})$ при $M = \{x = \mathbb{R}^\ell \mid \bar{p} \cdot x = 0\}$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из того, что $\bar{x}$ содержится в множестве $X(N) \cap \prod_N B_i(\bar{p})$, вытекают включения $\Delta_i = \bar{x}^i - w^i \in M$, $i \in N$. Поскольку $\mathcal{G}$ неразложима, на основании предложения I имеем $\bar{x} = w + \Delta \in M_\varepsilon(N)$. Допустим, что $\bar{x}$ M-блокируется некоторым состоянием $x \in M_\varepsilon(N)$. Тогда найдутся коалиция

$S \in \mathcal{G}$ и элемент $k \in S$ такие, что $x^k \in \mathcal{P}_k(\bar{x}^k)$. В силу определения, для равновесного состояния $\bar{x}$ должно выполняться соотношение $\mathcal{P}_k(\bar{x}^k) \cap B_k(\bar{p}) = \phi$. Но тогда $\bar{p} \cdot x^k > \bar{p} \cdot w^k$, что противоречит включению $x^k \in X_k^M$, влекущему равенство $\bar{p} \cdot x^k = \bar{p} \cdot w^k$.

Итак, $\bar{x} \in C_o^M(\mathcal{E})$. В силу предложения 3, это и означает, что $\bar{x}$ - вполне договорное состояние модели $\mathcal{E}$, что и требовалось установить.

Справедливость обратного вложения $\mathcal{D}_o^M(\mathcal{E}) \subseteq W(\mathcal{E})$ наряду со стандартными условиями выпуклости потребительских множеств и отношений предпочтения требует определенной согласованности структуры $\mathcal{G}$ с остальными параметрами модели $\mathcal{E}$.

Всюду ниже рассматриваются модели обмена, удовлетворяющие следующему предположению.

ПРЕДПОЛОЖЕНИЕ I. Для всех $i \in N$ выполняются условия: (а) X_i - выпуклые, (б) α_i - рефлексивные, (в) для каждого $x^i \in \tilde{X}_i = Pr_{\{i\}} X(N)$ существует $u \in int\, \mathbb{R}_+^l$ такой, что $x^i + u \in \mathcal{P}_i(x^i)$, (г) $\mathcal{P}_i(x^i)$ - выпуклые, причем $(x^i, y^i] \subseteq \mathcal{P}_i(x^i)$ для всех $x^i \in X_i$, $y^i \in \mathcal{P}_i(x^i)$, где $(x^i, y^i] = \{t x^i + (1-t) y^i \mid t \in [0, 1)\}$.

Будем говорить, что множество $T \subseteq N$ является $\mathcal{G}$-делимым, если для любого $i \in N$ существует коалиция $S \in \mathcal{G}$, содержащая $\{i\}$ и не содержащая T (т.е. $i \in S$ и $T \not\subseteq S$).

Для $x \in M_\mathcal{E}(N)$ положим $N_x = \{ i \in N \mid x \in int_M X_i \}$, где $int_M X_i$ - внутренность X_i^M в многообразии $w^i + M$. Справедлива

ТЕОРЕМА 4. *Пусть* $\bar{x} \in \mathcal{D}_o^M(\mathcal{E})$. *Если* $N_{\bar{x}}$ *является* $\mathcal{G}$*-делимым множеством, то* x *- равновесное состояние.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть i - произвольный элемент N. Покажем, что $\bar{x}$ принадлежит ядру иррефлексивного бинарного отношения α_i^o на X_i^M, где $x^i \alpha_i^o y^i \Leftrightarrow y^i \in \mathcal{P}_i(x^i)$.

Сначала убедимся, что $\bar{x}^i$ является локально-максимальным элементом в X_i^M. С этой целью выберем некоторую коалицию $S_o \in \mathcal{G}$, включающую i и не содержащую некоторого k из $N_{\bar{x}}$. Существование такой коалиции обеспечивается $\mathcal{G}$-делимостью $N_{\bar{x}}$. Поскольку $\bar{x}^k \in int_M X_k$, найдется окрестность нуля U в M такая, что $\bar{x}^k + U^k \subseteq X_k^M$. Допустим, что существует элемент $u \in U$, для которого $x^i + u \in \mathcal{P}_i(\bar{x})$.

В силу предложения I, состояние $y \in X(N)$ с компонентами $y^k = \bar{x}^k - u$, $y^i = x^i + u$, $y^j = \bar{x}^j$ $(j \neq i, k)$ также принадлежит $M_\varepsilon(N)$. Непосредственно из построения y и определения M-блокирования получаем $\bar{x} \notin C_o^M(\mathcal{E})$. Действительно, ввиду рефлексивности отношений предпочтения, в качестве коалиции, M-блокирующей $\bar{x}$, можно взять S_o. Однако соотношение $\bar{x} \notin C_o^M(\mathcal{E})$ противоречит предложению 3.

Итак, $\mathcal{P}_i(\bar{x}^i) \cap (\bar{x}^i + U) \cap X_i = \phi$. Но тогда и пересечение $\mathcal{P}_i(\bar{x}^i) \cap X_i^M$ тоже пусто. В самом деле, пусть $y \in \mathcal{P}_i(\bar{x}^i) \cap X_i^M$. Поскольку при достаточно малом $t \in (0,1)$ элемент $ty + (1-t)\bar{x}^i$ принадлежит окрестности $\bar{x}^i + U$, в силу условия (г) предположения I получаем противоречие с локальной максимальностью $\bar{x}^i$.

Таким образом, для каждого $i \in N$ элемент $\bar{x}^i$ принадлежит ядру $\mathcal{L}_i^o$ на X_i^M. Зафиксируем какой-нибудь вектор $\bar{p} \in M^o \cap \operatorname{int} \mathbb{R}_+^\ell$ и покажем, что $\mathcal{P}_i(\bar{x}^i) \cap B_i(\bar{p}) = \phi$ для всех $i \in N$, где, как и ранее, $B_i(\bar{p}) = \{x^i \in X_i \mid \bar{p} \cdot x^i \leq \bar{p} \cdot w^i\}$.

Пусть $y \in \mathcal{P}_i(\bar{x}^i)$. Ввиду того, что $\bar{p} \cdot x^i = \bar{p} \cdot w^i$ для всех $x^i \in X_i^M$, на основании вышесказанного имеем $\bar{p} \cdot y \neq \bar{p} \cdot w^i$. Допустим, что $\bar{p} y < \bar{p} \cdot w^i$. Поскольку $\bar{x} \in X(N)$, в силу условия (в) существует $u \in \operatorname{int} \mathbb{R}_+^\ell$ такой, что $z = \bar{x}^i + u \in \mathcal{P}_i(\bar{x}^i)$. Ясно, что $\bar{p} \cdot z > \bar{p} \cdot w^i$. Но тогда найдется $t \in (0,1)$ такое, что элемент $z_t = tz + (1-t)y$ принадлежит X_i^M. С другой стороны, из-за выпуклости $\mathcal{P}_i(\bar{x}^i)$ имеем $z_t \in \mathcal{P}_i(\bar{x}^i)$. А это противоречит установленной ранее оптимальности $\bar{x}^i$ в X_i^M. Таким образом, $\bar{p} \cdot y > \bar{p} \cdot w^i$, что ввиду произвольности выбора $y \in \mathcal{P}_i(\bar{x}^i)$ и означает требуемую равновесность распределения $\bar{x}$.

Отметим сразу же, что число относительно внутренних компонент $\bar{x}$ в условиях теоремы 4 может быть и небольшим (например, равным двум). Ясно, однако, что условие σ-делимости приобретает наиболее простой вид при максимально возможном объеме $N_{\bar{x}}$.

Положим $X_o^M = \prod_N \operatorname{int}_M X_i$, $\mathcal{D}_{oo}^M(\mathcal{E}) = \mathcal{D}_o^M(\mathcal{E}) \cap X_o^M$.

Учитывая, что для элемента $\bar{x}$ из X_o^M множество $N_{\bar{x}}$ совпадает с N, на основании теоремы 4 имеем следующую характеризацию вполне договорных состояний из X_o^M.

СЛЕДСТВИЕ I. Если каждый участник $\mathcal{E}$ принадлежит некоторой коалиции из $\sigma\setminus\{N\}$, то $\mathcal{D}_{\infty}^{M}(\mathcal{E})\subseteq W(\mathcal{E})$.

Полученные результаты позволяют выделить широкий класс моделей обмена, в которых уже каждое вполне договорное состояние допускает стоимостную характеристику и тем самым ядра $C_{o}^{M}(\mathcal{E})$ полностью исчерпываются соответствующими подмножествами $W(\mathcal{E})$.

Для каждого $i\in N$ положим $\hat{X}_i=X_i\setminus(w^i+\operatorname{int}\mathbb{R}^{\ell}_{+})$ и введем в рассмотрение следующую характеристику модели $\mathcal{E}$:

$S_{\mathcal{E}}=\{i\in N\mid \alpha_i$ – полное и $\alpha_i(w^i)\cap\hat{X}_i\subseteq\operatorname{int}X_i\}$,

где, как и ранее, $\alpha_i(x^i)=\{y^i\in X_i\mid(x^i,y^i)\in\alpha_i\}$.

Комбинируя аргументы, использовавшиеся при доказательстве теорем 3, 4 и учитывая, что M удовлетворяет условию (6), убеждаемся в справедливости следующих утверждений.

ТЕОРЕМА 5. Пусть модель $\mathcal{E}$ такова, что множество $S_{\mathcal{E}}$ является σ-делимым и при этом $\{i\}\in\sigma$ для всех $i\in S_{\mathcal{E}}$. Тогда $\mathcal{D}_{o}^{M}(\mathcal{E})\subseteq W(\mathcal{E})$.

СЛЕДСТВИЕ 2. Если все одноэлементные коалиции $\mathcal{E}$ принадлежат σ и по крайней мере у двух участников отношения предпочтения полные и удовлетворяют вложениям $\alpha_i(w^i)\cap\hat{X}_i\subseteq\operatorname{int}X_i$, то $\mathcal{D}_{o}^{M}(\mathcal{E})\subseteq W(\mathcal{E})$.

Условия следствия 2 выполняются, в частности, для всех моделей обмена, у которых $\sigma=2^N$ и по крайней мере у двух участников $X_i=\mathbb{R}^{\ell}_{+}$, α_i полные и $\alpha_i(w^i)\subseteq\operatorname{int}\mathbb{R}^{\ell}_{+}$.

Обозначим через $\mathcal{M}$ множество всех гиперподпространств $\mathbb{R}^{\ell}$, удовлетворяющих условию (6), и положим

$$\mathcal{D}_{o}(\mathcal{E})=\bigcup_{M\in\mathcal{M}}\mathcal{D}_{o}^{M}(\mathcal{E}).$$

Будем говорить, что отношение α_i локально-монотонно, если для каждого $x^i\in X_i=Pr_{\{i\}}X(N)$ существует $\delta(x^i)>0$ такое, что $x^i+u\in\mathcal{P}_i(x^i)$, как только $u\in\mathbb{R}^{\ell}_{+}$ и $0<\|u\|<\delta(x^i)$. Учитывая, что в условиях локальной монотонности равновесные цены строго положительны, получаем следующую характеризацию вполне договорных состояний.

СЛЕДСТВИЕ 3. Пусть модель $\mathcal{E}$ удовлетворяет условиям теоремы 5 или следствия 2. Если отношение предпочтения кого-либо из участников $\mathcal{E}$ локально-монотонно, то $\mathcal{D}_o(\mathcal{E}) = W(\mathcal{E})$.

В заключение этого **пункта** приведем пример, демонстрирующий существенность предположений, в которых установлена равновесность вполне договорных распределений. Ниже рассматривается простая линейная модель обмена, в которой все вполне договорные состояния неравновесны. В силу теоремы 3 подобный эффект возможен лишь в условиях пустоты множества $W(\mathcal{E})$. Таким образом, вполне договорность является принципиально более широким понятием оптимальности, нежели равновесность. Совпадая в регулярных ситуациях с равновесными распределениями, вполне договорные состояния реализуемы и в тех случаях, когда баланс интересов на основе рыночного механизма невозможен.

ПРИМЕР. Модель $\mathcal{E}$ определяется следующими компонентами:

$$N = \{1, 2, 3\},\ \sigma = \{\{1,2\}, \{2,3\}\},\ X_i = \mathbb{R}^2_+ \ (i \in N),$$

$$w^1 = (0,1),\ w^2 = (6,1),\ w^3 = (6,3),$$

$$u_i(x_1, x_2) = \begin{cases} x_1 + 4x_2, & i = 1, \\ x_1, & i = 2,3. \end{cases}$$

Нетрудно убедиться, что $W(\mathcal{E}) = \emptyset$. В то же время множество вполне договорных состояний $\mathcal{E}$ непусто. Действително, положим $M = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid x_1 + 3x_2 = 0\}$ и рассмотрим состояние $\bar{x} = (\bar{x}^1, \bar{x}^2, \bar{x}^3) \in M_{\mathcal{E}}(N)$, где $\bar{x}^1 = (0,1)$, $\bar{x}^2 = (9,0)$, $\bar{x}_3 = (3,4)$. Поскольку элементы $\bar{x}^1, \bar{x}^2$ доставляют максимум соответствующим функциям полезности на множествах $X_i^M = (\bar{x}^i + M) \cap \mathbb{R}^2_+$ $(i = 1, 2)$, состояние $\bar{x}$ может M-блокироваться лишь коалицией $S = \{2, 3\}$. Необходимым условием такого блокирования является наличие распределения $\tilde{x} = (\tilde{x}^1, \tilde{x}^2, \tilde{x}^3) \in M_{\mathcal{E}}(N)$, удовлетворяющего условиям $\tilde{x}_1^1 \geqslant 0$, $\tilde{x}_1^2 = 9$, $\tilde{x}_1^3 > 3$. Но эти условия очевидным образом противоречат требованию обалансированности распределений из $M_{\mathcal{E}}(N)$:

$$\sum_{i=1}^{3} x^i = \sum_{i=1}^{3} w^i = (12, 5).$$

Таким образом, в модели $\mathcal{E}$ отсутствуют равновесные распределения, в то время как множество $\mathcal{D}_o^M(\mathcal{E})$ непусто.

ЛИТЕРАТУРА

1. Макаров В.Л. О понятии договора в абстрактной экономике// Оптимизация. - 1980. - Вып.24(41). - С.5-17.
2. Макаров В.Л. Экономическое равновесие: существование и экстремальные свойства // Современные проблемы математики. Т.19. (Итоги науки и техники ВИНИТИ АН СССР). - М., 1982. - С.23-58.
3. Козырев А.Н. Устойчивые системы договоров в экономике чистого обмена // Оптимизация. - 1982. - Вып.29(46). - С. 66-78.
4. Васильев В.А. Модели экономического обмена и кооперативные игры. - Новосибирск: изд. НГУ, 1984.
5. Макаров В.Л., Васильев В.А., Козырев А.Н., Маракулин В.М. Равновесие, рационирование и устойчивость // Оптимизация.- 1986. - Вып.38(55). - С.5-120.

Поступила в ред.-изд. отдел
17.II.1987 г.