УДК 51.330.115

СОВМЕСТНОЕ ФУНКЦИОНИРОВАНИЕ ПРОСТЕЙШИХ МОДЕЛЕЙ ЭКОНОМИЧЕСКОЙ ДИНАМИКИ

А.А.Муканов

Один из подходов к математическому моделированию внедрения нововведений заключается в следующем: к экономике, состоящей из $n-1$ производства (технологии), добавляется новое производство, при этом часть имевшихся ранее фондов изымается. При некоторых условиях внедрение нового производства позволяет увеличить удельное потребление. Соответствующие модели были сформулированы В.Л.Макаровым.

В настоящей заметке рассматривается вариант указанного подхода, основанный на использовании моделей неймановского типа (см. [1]). Определяется динамическая модель, описывающая совместное функционирование n производств, каждое из которых задается простейшей моделью экономической динамики (см. [2]). Формулируется правило выбора ставки заработной платы в момент ввода нового производства и исследуется вопрос о существовании траекторий.

1. Под простейшей моделью понимается набор (F, ν, ω), задаваемый системой соотношений

$$I+\omega L_*\leqslant F(K,L),\quad 0\leqslant K_*\leqslant \nu K+I,\ I\geqslant 0,\ L_*\geqslant 0. \qquad (1)$$

Здесь K и L - объем фондов и численность рабочей силы в начальный момент времени t ; K_* и L_* - объем фондов и численность рабочей силы в следующий момент $t+1$ (время предполагается дискретным); I - инвестиции, $w=\omega L_*$ - потребление, ω - удельное потребление (ставка заработной платы), F - производственная функция, ν - коэффициент сохранности фондов.

Считаем, что F определена при $K \geqslant 0$, $L \geqslant 0$, дифференцируемая, неотрицательная, строго вогнутая, положительно однородная, возрастающая по каждой переменной функция, причем $F(K,0) = F(0,L) = 0$. (Это стандартные предположения.) Модели такого типа подробно изучены в [2].

Положим $f(\eta) = F(\eta,1)$, $\Omega = \lim\limits_{\eta\to\infty} f(\eta)$. Всюду ниже считается, что $\nu\omega < \Omega$. В противном случае, как показано в [2], потребление w превышает выпуск. Следуя [2], назовем потенциальными возможностями модели (ν, F, ω) число

$$\alpha = \max_{K,L>0} \frac{\nu K + F(K,L)}{K+\omega L} = \max_{\eta>0} \frac{\nu\eta + f(\eta)}{\eta+\omega}. \qquad (2)$$

Там же показано, что максимум достигается на единственном с точностью до множителя векторе $\bar{x} = (\bar{K},\bar{L})$. Легко заметить, что, увеличивая (уменьшая) ω, мы тем самым уменьшаем (увеличиваем) α.

Рассмотрим n простейших однопродуктовых моделей экономической динамики $Z^i = (\nu^i, F^i, \omega^i)$. Пусть ставка заработной платы во всех моделях одинакова, т.е. $\omega^1 = \omega^2 = \ldots = \omega^n = \omega$. Рассмотрим модель Z, которая задается с помощью производственного отображения a, определенного на R_+^{n+1} формулой

$$\begin{aligned} a(K^1,K^2,\ldots,K^n,L) = \{&(K_*^1,K_*^2,\ldots,K_*^n,L_*): \\ &0 \leq K_*^i \leq \nu^i K^i + I^i : I^i + \omega L_*^i \leq F^i(K^i,L^i): \\ &L^1+L^2+\ldots+L^n \leq L : L_*^1+L_*^2+\ldots+L_*^n \leq L_*\}. \end{aligned} \qquad (3)$$

Положительная однородность, вогнутость отображения a сразу следует из свойств функции F^i; кроме того, $a(0) = \{0\}$ и $a(R_+^{n+1}) = R_+^{n+1}$. Таким образом, отображение a суперлинейно и, следовательно, данная модель является моделью Неймана - Гейла (см. [I]).

Предположим, что $\alpha_n > \alpha_{n-1} > \ldots > \alpha_2 > \alpha_1$, где

$$\alpha_i = \max_{K,L>0} \frac{\nu^i K + F^i(K,L)}{K+\omega L} = \max_{\eta>0} \frac{\nu^i\eta + f_i(\eta)}{\eta+\omega}, \qquad (4)$$

и обозначим $\alpha = \alpha_n$, $\bar{x} = (0,\ldots,0,\bar{K},\bar{L})$, где $\bar{K},\bar{L}$ выбираются из условий

$$\bar{K} + \omega\bar{L} = 1; \quad \alpha = \nu^n\bar{K} + F^n(\bar{K},\bar{L}). \qquad (5)$$

фондовооруженность $\bar{\eta} = \frac{\bar{K}}{\bar{L}}$, на которой достигается максимум в (4) при $i = n$, называется равновесной. В [2] показано, что равновесность фондовооруженности $\bar{\eta}$ равносильна равенству

$$\alpha = \nu^n + f_n'(\bar{\eta}). \tag{6}$$

Положим $p = (1, \ldots, 1, \omega)$. Справедлива следующая

ЛЕММА. Тройка $\mathfrak{S} = (\alpha, \bar{x}, p)$ образует строгое состояние равновесия модели $\mathcal{Z}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Доказательство леммы заключается в проверке соотношений:

1) $\alpha x \in a(\bar{x})$, где $\bar{x} = (0, \ldots, 0, \bar{K}, \bar{L})$;

2) $p(y) \leq \alpha p(x)$ для $y \in a(x)$;

3) $x = \lambda \bar{x}$, $y = \lambda \bar{y}$, если $p(y) = \alpha p(x)$ при некотором $\lambda > 0$;

4) $p(\bar{x}) > 0$.

Последнее неравенство очевидно. Проверим соотношение 1). Пусть числа I^n и w^n определены равенствами $(\alpha - \nu^n)\bar{K} = I^n$, $\alpha \omega \bar{L} = w^n$. Положим $K' = \alpha K$, $L' = \alpha \bar{L}$. Тогда $K' = \nu \bar{K} + I^n$, $L' = \frac{w^n}{\omega}$, $I^n + w^n = (\alpha - \nu^n)\bar{K} + \alpha\omega\bar{L} = \alpha - \nu^n \bar{K} = F^n(\bar{K}, \bar{L})$. Последнее равенство следует из (5). Поскольку $I^n \geq 0$, $w^n \geq 0$, то соотношение $\alpha \bar{x} \in a(\bar{x})$ справедливо.

Покажем теперь, что для всех $y \in a(x)$ выполняется неравенство $p(y) \leq \alpha p(x)$. Пусть $x = (K^1, K^2, \ldots, K^n, L)$, $y = (K_*^1, K_*^2, \ldots, K_*^n, L_*)$. Тогда при некоторых I^i, $w = \omega L_*^i$ выполняются $K_*^i \leq \nu^i K^i + I^i$, $w^i + I^i \leq F^i(K^i, L^i)$; $L^1 + \ldots + L^n \leq L$; $L_*^1 + \ldots + L_*^n \leq L_*$. Отсюда следует, что

$$p(y) = K_*^1 + \ldots + K_*^n + \omega L_* \leq \nu^1 K^1 + I^1 + \ldots$$

$$\ldots + \nu^n K^n + I^n + w^1 + \ldots + w^n \leq \sum_{i=1}^{n} (\nu^i K^i + F^i(K^i, L^i)).$$

Так как $\alpha_i \geq \frac{\nu^i K^i + F^i(K^i, L^i)}{K^i + \omega L^i}$ и $\alpha > \alpha_i$, где $i = 1, \ldots, n-1$, то

$$p(y) \leq \sum_{i=1}^{n} (\nu^i K^i + F^i(K^i, L^i)) \leq \alpha (K^i + \ldots + K^n + \omega L) = \alpha p(x). \tag{7}$$

Итак, мы доказали, что $\mathfrak{S} = (\alpha, \bar{x}, p)$ – состояние равновесия модели $\mathcal{Z}$. Анализируя условия достижения равенства в соотношении (7), легко проверить, что оно достигается в случае, когда $K^i = L^i = 0$ ($i = 1,\ldots,n-1$), а вектор (K^n, L^n) пропорционален вектору $(\bar{K},\bar{L})$. Таким образом, равенство $p(y) = \alpha p(x)$ влечет $x = \lambda \bar{x}$, $y = \lambda \alpha \bar{x}$ при некотором $\lambda > 0$. Это означает, что состояние равновесия $\mathfrak{S} = (\alpha, \bar{x}, p)$ строгое.

Из свойств траекторий модели со строгим состоянием равновесия (см. [I , теорема 13.4]) вытекает

ПРЕДЛОЖЕНИЕ I. Для любой траектории (x_t) существует

$$\lim \frac{K_t^1 + \ldots + K_t^n + \omega L_t}{\alpha^t} = \lambda \geq 0.$$

Если $\lambda > 0$, то $\frac{K_t^n}{L_t} \to \bar{\eta}$, $\frac{K_t^i}{\alpha^t} \to 0$, $i = 1,\ldots,n-1$.

СЛЕДСТВИЕ I. Если траектория выдерживает наибольший возможный темп роста, то вся рабочая сила должна постепенно переходить в n-е подразделение, а фонды в i-м ($i = 1,\ldots,n-1$) подразделении должны свертываться.

2. Здесь изучается поведение траекторий модели $\mathcal{Z}$, для которых общая численность рабочей силы не меняется со временем и равна единице и, кроме того, во всех отношениях (3), кроме $0 \leq K_i$, характеризующих траекторию, реализуется равенство. Интерес представляют лишь те траектории, которые растут с наибольшим возможным темпом (т.е. неймановским темпом α). Если $\alpha < 1$, то траектория вида $(K_t^1, K_t^2, \ldots, K_t^n, L_t)$ при $L_t = 1$ не существует. Если же $\alpha > 1$, то, как следует из предложения I, подобная траектория не может расти наибольшим темпом, интересен лишь случай $\alpha = 1$. Добиться выполнения равенства $\alpha = 1$ можно за счет выбора средней ставки заработной платы ω .

Так же, как и в п.I, считаем, что $\alpha_n > \alpha_{n-1} > \ldots > \alpha_1$, т.е. потенциальные возможности модели $\mathcal{Z}^{i+1} = (\nu^{i+1}, F^{i+1}, \omega)$ выше потенциальных возможностей модели $\mathcal{Z}^i = (\nu^i, F^i, \omega)$ ($i = 1,\ldots,n-1$). Из результатов п.I следует, что ω определяется только набором (ν^n, F^n) и условием $\alpha_n = 1$. В [2] показано, что нужное ω существует. Пусть траектория модели $(K_t^1,\ldots,K_t^n, L_t)$ удовлетворяет сформулированным в начале этого пункта требованиям. Тогда $L_t = 1$ и справедливо равенство $1 = L_t^1 + \ldots + L_t^n$, причем последовательность векторов является траекторией модели $\mathcal{Z}^i$. Естественно предположить, учитывая следствие I, что численность рабочей силы в модели (ν^n, F^n, ω) монотонно возрастает. Полагая

$$\varkappa_t^i = \frac{L_{t+1}^i}{L_t^i}, \quad i = 1, \ldots, n, \tag{8}$$

считаем в дальнейшем, что $\varkappa_t^n \geqslant 1$. Поскольку в (3) реализуется равенство, получим соотношение, связывающее объемы фондов в соседние моменты времени

$$K_{t+1}^i = \nu^i K_t^i + F^i(K_t^i, L_t^i) - \omega L_{t+1}^i, \tag{9}$$

поделив которое на L_{t+1}^i, придем к равенству

$$\eta_{t+1}^i = \frac{1}{\varkappa_t^i}\left[\nu^i \eta_t^i + f_i(\eta_t^i)\right] - \omega. \tag{10}$$

Так как $\alpha = 1$, то для оптимальной фондовооруженности $\bar\eta$ справедливо равенство $1 = \dfrac{\nu^n \bar\eta + f_n(\bar\eta)}{\bar\eta + \omega}$. Откуда

$$\bar\eta = \nu^n \bar\eta + f(\bar\eta) - \omega. \tag{11}$$

Пусть функция g_i определена равенством $g_i(\eta) = \nu^i \eta + f_i(\eta)$ ($i = 1, \ldots, n$). Тогда справедливо

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. Пусть для последовательности η_t^n выполняются равенства (10) и $\bar\eta$ – фондовооруженность, на которой достигается максимум в (4) при $i = n$. Тогда:

1) η_t^n убывает;

2) $\eta_t^n \longrightarrow \bar\eta$, если $\eta_0^n > \bar\eta$ и $\varkappa_t^n \leqslant \dfrac{g_n(\eta_t^n)}{g_n(\bar\eta)}$ для всех t;

3) если $\eta_0^n < \bar\eta$ или $\varkappa_t^n > \dfrac{g_n(\eta_t^n)}{g_n(\bar\eta)}$ хоть при одном t, то последовательность η_t^n становится, начиная с некоторого места, отрицательной.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Действительно, из (10), (11) следует

$$\bar\eta - \eta_{t+1}^n = \nu^n \bar\eta + f_n(\bar\eta) - \frac{1}{\varkappa_t^n}\left[\nu^n \eta_t^n + f_n(\eta_t^n)\right]. \tag{12}$$

По формуле Лагранжа $f_n(\bar\eta) - f_n(\eta_t^n) = f_n'(\theta_t)(\bar\eta - \eta_t^n)$, где θ_t – точка, лежащая между $\bar\eta$ и η_t^n, поэтому, учитывая, что $\varkappa_t^n \geqslant 1$, получим

$$\bar\eta - \eta_{t+1}^n \geqslant \left[\nu^n + f_n'(\theta_t)\right](\bar\eta - \eta_t^n). \tag{13}$$

а) Пусть при некотором t выполняется $\bar{\eta} > \eta_t^n$. Тогда, как следует из (13), и $\bar{\eta} > \eta_{t+1}^n$. Таким образом, если $\eta_0^n < \bar{\eta}$, то и $\eta_t^n < \bar{\eta}$ при всех t. Так как производная вогнутой функции убывает, то в этом случае имеем, используя (6),

$$\nu^n + f_n'(\theta_t) > \nu^n + f_n'(\bar{\eta}) = \alpha = 1.$$

Откуда, привлекая (13), получим

$$\bar{\eta} - \eta_{t+1}^n > \bar{\eta} - \eta_t^n.$$

Таким образом, при $\eta_0^n < \bar{\eta}$ последовательность η_t^n убывает. Предположим, что эта последовательность ограничена снизу. Тогда она имеет предел η''. Так как $\varkappa_t^n \to 1$, то, переходя в (10) к пределу, получим $1 = \alpha = \dfrac{\nu^n \eta'' + f_n(\eta'')}{\eta'' + \omega}$, откуда $\eta'' = \bar{\eta}$. Последнее, однако, невозможно, так как $\eta'' < \eta_0'' < \bar{\eta}$. Полученное противоречие показывает, что последовательность η_t^n не ограничена снизу, откуда следует утверждение п.3 предложения.

б) Пусть теперь $\eta_t^n > \bar{\eta}$ при некотором t. Тогда

$$\nu^n + f_n'(\theta_t) < \nu^n + f_n'(\bar{\eta}) = 1.$$

Привлекая (12) и учитывая, что $\varkappa_t^n \geqslant 1$, получим $\eta_{t+1}^n - \bar{\eta} < \eta_t^n - \bar{\eta}$. Отсюда вытекает, что последовательность η_t^n убывает. Из (12) нетрудно проверить, что она ограничена снизу числом $\bar{\eta}$ тогда и только тогда, когда

$$\frac{g_n(\eta_t^n)}{g_n(\bar{\eta})} \geqslant \varkappa_t^n \qquad \text{для всех } t. \tag{14}$$

Если при некотором τ соотношение (14) нарушено, то $\eta_{\tau+1}^n < \bar{\eta}$ и далее последовательность ведет себя как в случае а). Предположим, что выполняется (14) для всех t, т.е. последовательность η_t^n убывает и ограничена снизу числом $\bar{\eta}$. Следовательно, существует предел $\eta'' = \lim \eta_t''$. Переходя в (10) к пределу и учитывая, что $\varkappa_t^n \to 1$, получим $\eta'' = \nu^n \eta'' + f_n(\eta'') - \omega$, т.е.

$$\alpha = 1 = \frac{\nu^n \eta'' + f_n(\eta'')}{\eta'' + \omega}.$$

Таким образом, $\eta'' = \bar{\eta}$, откуда следует справедливость п.2 предложения 2. Предложение показывает, что начальная фондовооруженность в модели $\mathcal{Z}^n$ должна быть достаточно велика, а темп роста рабочей силы при всех t не может быть слишком большим.

Рассмотрим траектории модели $\mathcal{Z}^i$ при $i < n$. Нетрудно заметить, что тройка $\mathcal{G} = (\alpha_i, x_i, \tilde{p})$, где $x_i = (\bar{K}^i, \bar{L}^i)$, $\tilde{p} = (1, \omega)$, α_i определяется по формуле (4), образует строгое состояние равновесия модели $\mathcal{Z}^i$. Тогда, вновь привлекая теорему I3.4 (см.[I]), получим, что при некотором $c \geqslant 0$ выполняются соотношения

$$\frac{K_t^i}{(\alpha_i^t)} \longrightarrow c\bar{K}^i; \quad \frac{L_t^i}{(\alpha_i)^t} \longrightarrow c\bar{L}^i. \tag{I5}$$

Из (I5) следует, что $\prod\limits_{\tau=0}^{t}\left(\frac{\varkappa_\tau^i}{\alpha_i}\right) \longrightarrow c \geq 0$, где $\varkappa_\tau^i = \frac{L_{t+1}^i}{L_t^i}$. Отсюда сразу вытекает соотношение

$$\overline{\lim_t}\ \varkappa_t^i \leq \alpha_i. \tag{I6}$$

Таким образом, для того чтобы последовательность (K_t^i, L_t^i) ($i = 1,\dots,n-1$) была траекторией модели $\mathcal{Z}^i$, необходимо выполнение условия (I6).

Не из всякого начального состояния $(K_0^1,\dots,K_0^n, 1)$ исходит траектория модели $\mathcal{Z}$ вида $(K_t^1,\dots,K_t^{n^0}, 1)$. Покажем это в случае $n = 2$. Траектория $(K_t^1, K_t^2, 1)$ будет существовать, если $F^i(K_t^i, L_t^i) \geq \omega L_{t+1}^i$. Откуда, учитывая, что $\varkappa_t^i = \frac{L_{t+1}^i}{L_t^i}$, получим

$$\varkappa_t^i \leqslant \frac{f_i(q_t^i)}{\omega}. \tag{I7}$$

В момент $t = 0$ из (I7) следует $L_1^i \leqslant \frac{f_i(q_0^i) L_0^i}{\omega}, i = 1,2$. Понятно, что при достаточно больших ω рабочая сила L_1^i может быть настолько мала, что будет нарушено условие $L_1^1 + L_1^2 = 1$.

Определим множество U как совокупность таких пар (K^1, K^2), что из точки $(K^1, K^2, 1)$ исходит траектория. Это множество замкнуто, выпукло, устойчиво (в смысле R_+^2): если $(K^1, K^2) \geqslant (K^1, K^2)$ и $(\tilde{K}^1, \tilde{K}^2) \in U$, то $(K^1, K^2) \in U$; кроме того, оно содержит точку $(0, \bar{q}^2)$.

Предположим, что некоторое время функционирует лишь одна модель $\mathcal{Z}^1 = (\gamma^1, F^1, \omega)$, где ω^1 устанавливается таким образом, чтобы $\alpha_1 = 1$. В момент T мы хотим внести модель (γ^2, F^2, ω), потенциальные возможности которой при ω^1 выше, чем у исходной модели, т.е.

$$\alpha_2(\omega^1) > \alpha_1(\omega^1) = 1.$$

Выбираем $\omega^2 > \omega^1$ так, чтобы $\alpha_2(\omega^2) = 1$, при этом $\alpha_1(\omega^2) < 1$. Таким образом, функционирование нового производства описывается моделью $\mathcal{Z}^2 = (\nu^2, F^2, \omega^2)$. Следуя В.Л.Макарову, считаем, что имеются фонды второго производства в начальный момент в некотором количестве K_T^2, при этом часть имевшихся ранее фондов K_T^1 в первом производстве изымается и остаются фонды в объеме $\tilde{K}_T^1 < K_T^1$. Из состояния $(\tilde{K}_T^1, K_T^2, 1)$ может и не исходить траектория модели $\mathcal{Z}$. Поэтому вводить новое производство в момент T следует, если точка $(\tilde{K}_T^1, K_T^2)$ принадлежит множеству U. Таким образом, если $(\tilde{K}_T^1, K_T^2) \in U$, то ввод нового производства увеличивает потребление, не увеличивая темпа роста экономики, которая определяется заданным экзогенно темпом роста рабочей силы.

Автор благодарен А.М.Рубинову за постановку задачи и обсуждение работы.

ЛИТЕРАТУРА

I. Макаров В.Л., Рубинов А.М. Математическая теория экономической динамики и равновесия. - М.: Наука, 1973.
2. Рубинов А.М. Математические модели расширенного воспроизводства. - Л.: Наука, 1983.

Поступила в ред.-изд. отдел
5.09.1986 г.