УДК 330.II5

РАВНОВЕСНЫЕ МЕХАНИЗМЫ ЭФФЕКТИВНОГО ЭКОНОМИЧЕСКОГО РАЗВИТИЯ

А.М.Рубинов

I. При исследовании механизмов экономического развития, как правило, рассматривают априори заданные механизмы того или иного типа и с помощью различных моделей изучают свойства этих механизмов и выясняют вопросы, связанные с их взаимодействием. Основной интерес при этом представляют плановый и рыночный механизмы [I]. Возможен, однако, иной подход к этой проблеме, основанный на следующем соображении: выделяются и изучаются механизмы, которые при определенных значениях параметров приводят к построению в том или ином смысле "хороших" траекторий развития моделируемой экономической системы. Именно этот подход лежит в основе настоящей статьи.

Здесь рассматривается простейшая динамическая двухотраслевая модель экономики неймановского типа. (По поводу моделей неймановского типа и траекторий в них см. [2].) В качестве "хороших" берутся эффективные траектории этой модели; устанавливается, что эти траектории порождаются равновесными механизмами, основанными на использовании модели равновесия с фиксированными доходами [3]. Такого типа механизмы совмещают в себе некоторые черты как плановой, так и рыночной экономики: каждая отрасль максимизирует свою "полезность" независимо от другой (это рыночное начало); однако параметры этой отрасли, определяющие ее функцию полезности и финансовые ресурсы, назначаются государством плановым образом.

Равновесные механизмы используют два вида цен: "плановые", которые служат для определения функций полезности отраслей, и "рыночные" - цены равновесия. Оказывается, что эти механизмы приводят к эффективной траектории в случае, если плановые цены выбирают так, чтобы уравнять темпы роста совокупного богатства отраслей и, кроме того, рыночные цены совпадают с плановыми.

Помимо эффективных траекторий представляют интерес и асимптотически эффективные, т.е. растущие наибольшим технологически возможным темпом. Оказывается, что при некоторых предположениях асимптотическая эффективность возможна лишь при сближении плановых и рыночных цен и сближении темпов роста совокупного богатства отраслей. Перейдем к точным формулировкам.

2. Рассматривается экономическая система, состоящая из двух подразделений. Первое из них выпускает средства производства, второе – предметы потребления; i-е подразделение описывается в момент t производственной функцией F_t^i и коэффициентами сохранности фондов ν_t^i. Предполагается, что предметы потребления, изготовленные к моменту t, полностью расходуются в период $[t, t+1]$. Производственные фонды обозначаются символом k, предметы потребления – символом c. Производственные функции F_t^i зависят от этих переменных и описывают выпуск продукта i-го подразделения в натуральных единицах. Считаем, что эти функции определены на конусе R_+^2, положительно однородны, дважды непрерывно дифференцируемы, причем для их производных выполняются неравенства

$$\frac{\partial F_t^i}{\partial k} > 0, \quad \frac{\partial F_t^i}{\partial c} > 0, \quad \frac{\partial^2 F_t^i}{\partial k^2} < 0, \quad \frac{\partial^2 F_t^i}{\partial c^2} < 0.$$

Кроме того, предполагается, что $F_t^i(1,0) = F_t^i(0,1) = 0$.

Состояние X экономики имеет вид $X = (x^1, x^2)$, где $x^1 = (k^1, c^1)$, $x^2 = (k^2, c^2)$. Иногда будем записывать его в виде $X = (k^1, c^1, k^2, c^2)$. Переход из состояния $X_t = (k_t^1, c_t^1, k_t^2, c_t^2)$ в состояние $X_{t+1} = (k_{t+1}^1, c_{t+1}^1, k_{t+1}^2, c_{t+1}^2)$ возможен, если

$$k_{t+1}^1 + k_{t+1}^2 \le \nu_t^1 k_t^1 + \nu_t^2 k_t^2 + F_t^1(k_t^1, c_t^1), \qquad (1)$$

$$c_{t+1}^1 + c_{t+1}^2 \le F_t^2(k_t^2, c_t^2). \qquad (2)$$

Неравенства (1) и (2) задают многозначное отображение a_t: $X_{t+1} \in a_t(X_t)$ в том и только в том случае, если выполнены эти неравенства.

Модель экономической динамики, определяемую производственными отображениями a_t, обозначим символом M^2. Один из способов построения траекторий в модели M^2 заключается в использовании равновесных механизмов, основанных на модели равновесия с фиксированными доходами. Опишем эти механизмы. Пусть задан вектор цен $B=(b^1, b^2)$, где $b^1, b^2>0$. Положим $b=b^1/b^2$. Рассмотрим ожидаемое совокупное богатство подразделений при этих ценах и векторе ресурсов $x=(k,c)$:

$$\mathcal{U}^1(x)=b^1\nu^1 k+b^1F^1(k,c)=b^1(\nu^1k+F^1(k,c)), \qquad (3)$$

$$\mathcal{U}^2(x)=b^1\nu^2 k+b^2F^2(k,c)=b^1(\nu^2k+bF^2(k,c)). \qquad (4)$$

Здесь F^1, F^2 - производственные функции подразделений; они обладают всеми свойствами производственных функций, указанными выше.

Далее $\mathcal{U}^1$ и $\mathcal{U}^2$ выступают как функции полезности подразделений. Пусть $w=(k^\circ, c^\circ)$ - вектор распределяемых ресурсов, λ^1, λ^2 - заданные доходы подразделений. Рассмотрим модель равновесия с фиксированными доходами, определяемую величинами $\mathcal{U}^1$, $\mathcal{U}^2$, λ^1, λ^2, w. Пусть (p, x^1, x^2) - состояние равновесия этой модели, т.е. $x^1+x^2=w$ и вектор x^i есть решение задачи

$$\mathcal{U}^i(x)\to max \quad \text{при условии} \quad x\geq 0, \ [p,x]\leq\lambda^i. \qquad (5)$$

Ниже предполагается, что векторы x^1, x^2, p строго положительны. Запишем x^i в виде $x^i=\lambda^i\bar{x}^i$, где векторы $\bar{x}^i=(\bar{k}^i, \bar{c}^i)$ нормированы соотношением $[p,\bar{x}^i]=1$. Положим

$$\bar{\eta}^i=\frac{\bar{k}^i}{\bar{c}^i} \quad (i=1,2), \qquad \omega=p^2/p^1.$$

Здесь p^1, p^2 - координаты вектора p. В дальнейшем записываем p в виде $p=p^1(1,\omega)$. Положим, далее,

$$\mu=\frac{\lambda^1}{\lambda^2}, \qquad æ=\frac{k^\circ}{c^\circ}$$

и введем в рассмотрение функции

$$f^i(\eta)=F^i(\eta,1); \quad \varphi^i_{(b)}(\eta)=b\frac{f^i(\eta)-\eta(f^i)'(\eta)}{\nu^i+b(f^i)'(\eta)}, \quad i=1,2.$$

Ниже предполагается, что

$$\nu^1\omega < \lim_{\eta\to+\infty} f^1(\eta)\ ; \quad \nu^2\omega < b \lim_{\eta\to+\infty} f^2(\eta)\ . \qquad (6)$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ I. Пусть выполнены неравенства (6). Тогда

$$\omega = \varphi^1_{(1)}(\bar\eta^1)\ ; \quad \omega = \varphi^2_{(6)}(\bar\eta^2)\ ; \quad \mu = \frac{(\bar\eta^1+\omega)(\bar\eta^2-æ)}{(\bar\eta^2+\omega)(æ-\bar\eta^1)}\ . \qquad (7)$$

Наметим схему доказательства предложения I. Из определения вектора $\bar x^1$ легко следует, что в точке $\bar\eta^1$ достигается максимум функции $\eta \to \frac{\nu^1\eta + f^1(\eta)}{\eta+\omega}$. Привлекая результаты из [4], легко убедиться в том, что этот максимум достигается в том и только в том случае, когда выполнено первое из неравенств (6), причем $\omega = \varphi^1_{(1)}(\bar\eta^1)$. Подобным же образом рассматривается фондовооруженность $\bar\eta^2$. Третье из равенств (7) есть простое следствие балансового уравнения $\lambda^1\bar x^1 + \lambda^2\bar x^2 = w$.

Предложение I позволяет по заданным относительным величинам b, $æ$, μ, характеризующим модель, найти относительные величины $\bar\eta^1$, $\bar\eta^2$, ω, характеризующие равновесие. По этим величинам с помощью легко проверяемого равенства $p^1(k^0+\omega c^0) = \lambda^1+\lambda^2$ и соотношений $[p, \bar x^i] = 1$ восстанавливается равновесие.

Модели равновесия с фиксированными доходами могут служить для построения траекторий в модели M^2. Пусть состояние $X_t = (k^1_t, c^1_t, k^2_t, c^2_t)$ экономики в момент t известно. По этому состоянию определяется вектор $w_{t+1} = (k^0_{t+1}, c^0_{t+1})$ распределяемых в момент $t+1$ ресурсов; здесь

$$k^0_{t+1} = \nu^1_t k^1_t + \nu^2_t k^2_t + F^1_t(k^1_t, c^1_t)\ ; \quad c^0_{t+1} = F^2_t(k^2_t, c^2_t)\ .$$

Назначая каким-либо образом параметры λ^1_{t+1}, λ^2_{t+1} и цены $B_{t+2} = b^1_{t+2}(1, b_{t+2})$, построим модель равновесия с фиксированными доходами, затем найдем состояния равновесия $(p_{t+1}, x^1_{t+1}, x^2_{t+1})$ в этой модели. Балансовое равенство $x^1_{t+1} + x^2_{t+1} = w_{t+1}$ показывает, что вектор $X_{t+1} = (x^1_{t+1}, x^2_{t+1})$ лежит в момент $t+1$ на траектории, проходящей в момент t через точку X_t. Умножение цен B_{t+2} или набора λ^1_{t+1}, λ^2_{t+1} на некоторый множитель не изменяет векторов x^1_{t+1}, x^2_{t+1}, поэтому вектор X_{t+1} определяется набором параметров b_{t+1}, $\mu_{t+1} = \frac{\lambda^1_{t+1}}{\lambda^2_{t+1}}$. В дальнейшем про траектории, полученные указанным выше способом, будем говорить, что они построены с помощью равновесного механизма. Различный выбор параметров b_t и μ_t приводит к построению с помощью равновесного механизма различных траекторий.

В дальнейшем вместо пары параметров (μ_t, b_t) будет удобно говорить о паре параметров (ω_t, b_t). Используя предложение I, нетрудно показать, что при известных ω_t, b_t единственным образом определяются величины $\bar{\eta}^1_t$, $\bar{\eta}^2_t$ и с их помощью величина μ_t.

Ниже используются функции

$$\alpha_t(\omega) = \max_{\eta>0} \frac{\nu^1_t \eta + f^1_t(\eta)}{\eta+\omega},$$

$$\beta_t(\omega, b) = \max_{\eta>0} \frac{\nu^2_t \eta + b f^2_t(\eta)}{\eta+\omega},$$

где, как и выше, $f^i_t(\eta) = F^i_t(\eta, 1)$.

3. Перейдем к исследованию траекторий модели M^2, построенных с помощью равновесного механизма. Остановимся прежде всего на выборе параметров ω_t, b_t, приводящих к построению эффективной траектории. Напомним, что траектория $(X_t)^{\infty}_{t=0}$ называется эффективной, если ни при каких натуральных t и $\lambda > 1$ не существует траектории, исходящей из точки X_0 и проходящей в момент t через точку λX_t.

ТЕОРЕМА I. Эффективная траектория $(X_t)^{\infty}_{t=0}$, у которой векторы X_t строго положительны, может быть построена с помощью равновесного механизма. Траектория, построенная с помощью этого механизма, является эффективной в том и только в том случае, когда

$$\alpha_t(\omega_t) = \beta_t(\omega_t, b_{t+1}); \quad b_t = \omega_t \quad (t = 0, 1, \dots).$$

Доказательство этой теоремы можно провести, используя процедуру построения эффективной траектории, изложенную в [4]. Там эта процедура применялась для близкой к M^2 модели, однако она применима и к модели M^2.

Рассмотрим теперь вопрос о построении с помощью равновесного механизма асимптотически эффективной траектории, т.е. траектории X_t, обладающей следующим свойством: для любой траектории X'_t модели M^2 выполняется неравенство

$$\overline{\lim} \frac{\| X'_t \|}{\| X_t \|} < +\infty .$$

Пусть траектория X_t построена с помощью равновесного механизма при выборе последовательностей параметров (b_t) и (ω_t). Определим числа ε_t^1 и ε_t^2 так:

$$1+\varepsilon_t^1 = \frac{\alpha_t(\omega_t)}{\beta(\omega_t, b_{t+1})} \quad , \text{ если } \alpha_t(\omega_t) \geqslant \beta_t(\omega_t, b_{t+1});$$

$$1+\varepsilon_t^1 = \frac{\beta_t(\omega_t, b_{t+1})}{\alpha_t(\omega_t)} \quad \text{в противном случае;}$$

$$1+\varepsilon_t^2 = \frac{\omega_t}{b_t} \quad , \text{ если } \omega_t \geqslant b_t ;$$

$$1+\varepsilon_t^2 = \frac{b_t}{\omega_t} \quad \text{в противном случае.}$$

Справедлива следующая

ТЕОРЕМА 2. Пусть последовательность b_t отделена от нуля и бесконечности, и ряды $\sum \varepsilon_t^i$, $i=1,2$, сходятся. Тогда траектория X_t асимптотически эффективна.

Доказательство теоремы 2 основано на результатах [5]. В этой работе показано, что траектория X_t модели неймановского типа асимптотически эффективна в том и только в том случае, когда найдется такая траектория h_t двойственной модели, что $\lim [h_t, X_t] > 0$. В условиях теоремы 2 удается построить траекторию h_t, обладающую нужным свойством.

Предположим, что последовательности $\alpha_t(\omega_t)$, $\beta_t(\omega_t, b_{t+1})$,

b_t и ω_t отделены от нуля и ограничены. Тогда теорема 2 утверждает, что если разности $\alpha_t(\omega_t)-\beta_t(\omega_t, b_{t+1})$ и $\omega_t - b_t$ достаточно быстро стремятся к нулю, то соответствующая траектория асимптотически эффективна. Оказывается, что при некоторых предположениях стремление к нулю этих разностей является необходимым условием асимптотической эффективности. Иными словами, **асимптотически** эффективное поведение требует по крайней мере сближения темпов роста подразделений, а также "плановых" цен b_t и "рыночных" цен ω_t. Однако гарантировать асимптотическую эффективность можно лишь в случае, когда это сближение происходит достаточно быстро.

Перейдем к точным формулировкам. Прежде всего наложим некоторые ограничения на производственные функции.

1) Для любых $\theta', \theta'' : 0 < \theta' < \theta'' < +\infty$ найдутся такие числа $m > 0$, $M < +\infty$, что

$$m \le \frac{\partial^2 F_t^i}{\partial k \partial c}(k, c) \le M \qquad (i=1,2;\ t=0,1,\dots)$$

при всех $t=0,1,\dots;\ i=1,2;\ k+c=1,\ \theta' \le \frac{k}{c} \le \theta''$.

2) $$\sup_{i=1,2;\ t=0,1,\dots} F_t^i(1,1) < +\infty .$$

Прежде чем сформулировать следующее предположение, напомним, что $F_t^2(1,0)=0$, и потому $\lim\limits_{\theta\to+0} F_t^2(\theta,0)=0$.

3) Предельный переход в равенстве $\lim\limits_{\theta\to+0} F_t^2(\theta,0)=0$ совершается равномерно по t.

Следующая группа предположений связана с эффективной траекторией $\tilde{X}_t=(\tilde{k}_t^1, \tilde{c}_t^1, \tilde{k}_t^2, \tilde{c}_t^2)$ модели M^2, исходящей из некоторой точки X_0 и построенной с помощью равновесного механизма при выборе последовательностей параметров $\tilde{b}_t$, $\tilde{\omega}_t$. Предполагается, что такая траектория существует (в силу теоремы I это заведомо так), если $\tilde{k}_t^i > 0$, $\tilde{c}_t^i > 0$ при всех $t=0,1,\dots;\ i=1,2$. Пусть $\tilde{\eta}_t = \tilde{k}_t^1/\tilde{c}_t^1$, $\tilde{\xi}_t = \tilde{k}_t^2/\tilde{c}_t^2$.

4. Последовательности $\tilde{\eta}_t$, $\tilde{\xi}_t$, $\tilde{b}_t$ ограничены и отделены от нуля.

5) $$\inf_t \nu_t^i > 0, \quad \sup_t \nu_t^i/\alpha_t < 1, \quad i=1,2.$$

Здесь $\alpha_t = \alpha_t(\tilde{\omega}_t) = \beta_t(\tilde{\omega}_t, \tilde{b}_{t+1})$.

6) При некотором $\varepsilon > 0$ выполняются неравенства

$$\tilde{b}_{t+1} \geqslant \frac{\nu_t^2}{s_t} \tilde{b}_t + \varepsilon ,$$

где $s_t = \lim\limits_{\theta \to +\infty} F_t^2(\theta, 1)$.

ЗАМЕЧАНИЕ. Предположения I)–3) выполняются, если $F_t^i(k,c) = \tau_t^i k^{\delta_t^i} c^{1-\delta_t^i}$ – функции Кобба – Дугласа и последовательности δ_t^i, $1-\delta_t^i$, τ_t^i, $1/\tau_t^i$ отделены от нуля. Если $F_t^i(k,c) = (A_t^i k^{-\rho_t^i} + B_t^i c^{-\rho_t^i})^{-1/\rho_t^i}$ – функции с постоянной эластичностью замены и последовательности A_t^i, B_t^i, ρ_t^i ограничены и отделены от нуля, то эти предположения также выполняются.

Обратимся к предположению 6). Можно показать, что при всех t справедливы неравенства

$$\tilde{b}_{t+1} > \frac{\nu_t^2}{s_t} \tilde{b}_t .$$

Таким образом, это предположение, так же как и остальные, заключается в требовании некоторой размерности: предполагается, что эти неравенства выполняются равномерно по t.

ТЕОРЕМА 3. Пусть выполнены предположения I)–6) и $X_t = (K_t^1, C_t^1, K_t^2, C_t^2)$ – траектория модели M^2, построенная с помощью равновесного механизма при выборе последовательностей параметров b_t и ω_t. Предположим, что последовательности b_t, ω_t, K_t^1/C_t^1, K_t^2/C_t^2, C_t^1/C_t^2 ограничены и отделены от нуля и при некотором $\varepsilon > 0$ выполняется неравенство

$$b_{t+1} \geqslant \frac{\nu_t^2}{s_t} \omega_t + \varepsilon , \quad t = 1, 2, \ldots$$

Тогда, если траектория X_t асимптотически эффективна, то

$$b_t - \omega_t \to 0 , \quad \alpha_t(\omega_t) - \beta_t(\omega_t, b_{t+1}) \to 0. \quad (8)$$

Доказательство теоремы 3 основано на теореме о магистрали для модели M^2, согласно которой для всех асимптотически эффективных траекторий $(k_t^1, c_t^1, k_t^2, c_t^2)$ выполняется соотношение $|k_t^i/c_t^i - \tilde{\eta}_t^i| \to 0$. Подобная теорема для близкой к M^2 модели доказана в [4]. Используя теорему о магистрали и теорему I, удается доказать, что для асимптотически эффективной траектории выполняются соотношения (8).

Рассмотрим теперь частный случай равновесного механизма - рыночный механизм. Пусть $X=(x^1,x^2)$ - состояние экономической системы в некоторый момент. При применении рыночного механизма отрасль i решает задачу

$$u^i(x)\to max \quad \text{при условии} \quad x\geq 0, [p,x]\leq[p,x^i] \quad (9)$$

Здесь предполагается, что цены p известны; функции u^i определены формулами (3),(4). Задача (9) совпадает с задачей (5) при $\lambda^i=[p,x^i]$. Таким образом, рыночный механизм является равновесным, причем доходы отраслей λ^i определяются специальным образом. Можно показать, что применение рыночного механизма, как правило, не приводит к эффективной траектории. Дадим точную формулировку этого утверждения для случая, когда параметры модели не зависят от времени: $\nu_t^i=\nu^i$, $F_t^i=F^i$ при всех t. В этом случае M^2 становится моделью Неймана - Гейла.

ТЕОРЕМА 4. *Пусть параметры модели M^2 не зависят от времени. Тогда эффективная траектория, построенная с помощью рыночного механизма, совпадает с неймановской равновесной траекторией. Она определяется единственным, с точностью до множителя, способом.*

Доказательство теоремы 4 основано на следующем утверждении, содержащемся по сути дела в [4]: на "рыночной" эффективной траектории при всех t выполняется соотношение $\lambda_t^1=\lambda_t^2=\frac{1}{2}\lambda$, где $\lambda=\lambda_0^1+\lambda_0^2$. Из этого утверждения выводится постоянство пропорций между координатами векторов на траектории, откуда легко следует теорема.

ЛИТЕРАТУРА

1. Макаров В.Л. О развитии экономико-математического инструментария на современном этапе // Экономика и мат. методы.- 1986. - Т.22, № 3. - С.412-425.
2. Макаров В.Л., Рубинов А.М. Математическая теория экономической динамики и равновесия. - М.: Наука, 1973.
3. Полтерович В.М. Экономическое равновесие и оптимум // Экономика и мат. методы. - 1973. - Т.9, № 5. - С.835-845.

4. Рубинов А.М. Математические модели расширенного воспроизводства. – Л.: Наука, 1983.
5. Рубинов А.М. Темпы роста траекторий в моделях с переменной технологией // Оптимизация. – Новосибирск, 1977. – Вып. 19(36). – С.119-126.

Поступила в ред.-изд. отдел
19.01.1987 г.