УДК 519.83

# УРАВНОВЕШЕННЫЕ СОСТОЯНИЯ И ТЕОРЕМЫ О ЯДРЕ

В.И.Данилов, А.И.Сотсков

В настоящей работе изучаются аналоги уравновешенных состояний, рассматривавшихся в [I]. На основе предлагаемых обобщений развивается единый подход к исследованию условий существования уравновешенных состояний и условий непустоты ядер кооперативных игр.

Поясним в общих чертах соображения, приводящие к рассматриваемым аналогам уравновешенного состояния. Пусть $N$ - множество агентов, $X$ - множество альтернатив, на котором агенты имеют предпочтения. Какой элемент $X$ правильнее всего выбрать? Если заданы лишь предпочтения, трудно предложить что-либо иное, чем произвольную оптимальную по Парето альтернативу, благо они существуют при очень слабых предположениях. Однако эффективных альтернатив, как правило, очень много, и можно попытаться использовать эту свободу. Часто в самой задаче имеется дополнительная информация, ставящая участников в разное положение в зависимости от альтернатив. Например, в задаче о распределении ресурсов дополнительная информация может заключаться в цене ресурсов, доходах участников или их начальных запасах.

Такая дополнительная информация иногда позволяет с каждой альтернативой $x \in X$ связать коалицию, которой при обсуждении $x$ предоставляется "решающее слово". И только если эта решающая коалиция согласна с $x$, альтернатива $x$ считается принятой или уравновешенной. Так, в предыдущем примере решающее слово можно предоставить участникам, получившим ресурсов на сумму, меньшую чем их доход. В случае с начальными запасами коалиция участников отвергает распределение, если она может улучшить его перераспределение своих начальных запасов.

По крайней мере формально дело выглядит так, будто альтернативы приобретают своих "любимчиков". Уже не только участники имеют предпочтение и выбирают альтернативы, но и альтернативы предпочитают и выбирают участников. Симметрия участников и альтернатив еще более усиливается, когда чистое уравновешенное состояние найти не удается и от одиночных альтернатив приходится переходить к связкам альтернатив. Таким образом, коалиция участников выбирает связку альтернатив, а связка альтернатив - коалицию участников. И только если эти выборы согласованы, коалиция $K\subset N$ и связка $Y\subset N$ считаются уравновешенными.

Формализации приведенных соображений посвящен второй параграф работы. Здесь же, на основе общих результатов о максимальных элементах (§I), устанавливаются условия существования уравновешенных состояний. Заключительный, третий параграф содержит приложение полученных результатов к исследованию кооперативных игр.

## § I. Максимальные элементы

Пусть $X$ - множество, а $P\subset X\times X$ - бинарное отношение на нем. Удобно представлять $P$ как многозначное отображение, или соответствие, множества $X$ в себя, $P: X\Rightarrow X$. Это отражается в обозначениях: для $x\in X$ пишем

$$P(x)=\{x'\in X,(x,x')\in P\}, \quad P^{-1}(x)=\{x'\in X,(x',x)\in P\},$$

для $A\subset X$ - $P(A)=\bigcup\limits_{x\in A}P(x)$ и т.д.

Подразумевается, что $P$ - отношение строгого предпочтения, так что $(x,x')\in P$, $xPx'$ или $x'\in P(x)$ интуитивно означает, что $x'$ строго лучше, чем $x$. При фиксированном отношении элемент $x^*\in X$ называется максимальным, если $P(x^*)=$ $=\varnothing$, т.е. если в $X$ нет элементов, строго лучших чем $x^*$.

Начнем с элементарного утверждения о существовании максимальных элементов.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ I. *Пусть множество $X$ конечно, а отношение $P$ ациклично. Тогда существует максимальный* э л е м е н т .

ЗАМЕЧАНИЕ I. Утверждение без труда переносится на компакты, надо лишь потребовать полуоткрытость снизу отношения $P$. Напомним, что соответствие $P: X \Rightarrow Y$ между топологическими пространствами $X$ и $Y$ называется полуоткрытым снизу (п.о.с.), если множество $P^{-1}(y)$ открыто для любого $y \in Y$.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Условие ацикличности отношения $P$ можно переписать в таком виде. Пусть $P^{\infty}$ обозначает транзитивное замыкание $P$. Тогда ациаличность $P$ эквивалентна условию $x \notin P^{\infty}(x)$ для любого $x$ и может пониматься как некая "обобщенная" иррефлексивность. В следующем утверждении, представляющем выпуклый вариант предыдущего, обобщенная иррефлексивность имеет вид $x \notin co\, P(x)$, где $co$ означает выпуклую оболочку.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. П у с т ь $X$ - в ы п у к л ы й к о м п а к т , о т н о ш е н и е $P$ п . о . с . и $x \notin co\, P(x)$. Т о г д а с у щ е с т в у е т м а к с и м а л ь н ы й э л е м е н т .

Здесь и далее подразумевается, что $X$ - выпуклое подмножество в конечномерном векторном пространстве, хотя многие утверждения верны в более общем случае. Предложение 2 в такой форме принадлежит Бергстрему (см.[3]), хотя эквивалентный факт в другой форме был получен Ки Фаном. Ниже приведем чуть более общее утверждение. Пусть даны два отношения $B$ и $P$ на множестве $X$, причем $P \subset B$. Скажем, что $x^* \in X$ является равновесием, если $x^* \in B(x^*)$ и $P(x^*) = \emptyset$.

ТЕОРЕМА I. П у с т ь $X$ - в ы п у к л ы й к о м п а к т , $P \subset B$ - д в а о т н о ш е н и я н а $X$ , п р и ч е м

$(i)$ о т н о ш е н и е $B$ з а м к н у т о , а м н о ж е с т в а $B(x)$ в ы п у к л ы и н е п у с т ы е ;

$(ii)$ о т н о ш е н и е $P$ п . о . с . и $x \notin co\, P(x)$.

Т о г д а в $X$ с у щ е с т в у е т р а в н о в е с и е .

Частными случаями теоремы являются теорема Бергстрема - Ки Фана ( $B = X \times X$ ), а также теорема Какутани ( $P = \emptyset$ ). Доказательство, в свою очередь, опирается на теорему Какутани.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $F = \{x \in X,\ x \in B(x)\}$ - множество неподвижных точек $B$ ; ясно, что $F$ замкнуто в $X$ . Предположим, что утверждение теоремы неверно. Тогда для любой точки $x \in F$ найдется $y \in P(x)$, или $x \in P^{-1}(y)$. Иначе говоря, множества вида $P^{-1}(y)$ покрывают $F$; кроме того, они открыты в силу п.о.с. $P$. Поэтому в силу компактности можно выбрать конечное подпокрытие $P^{-1}(y_1), \ldots, P^{-1}(y_n)$. Если положить $\mathcal{U} = \bigcup_{i=1}^{n} P^{-1}(y_i)$, то $\mathcal{U} \supset F$ и открыто.

Пусть теперь $s_i$ - непрерывные функции на $X$, равные нулю вне $P^{-1}(y_i)$ и строго положительные на $P^{-1}(y_i)$. Образуем отображение $s : \mathcal{U} \to X$ по формуле

$$s(x) = \frac{\sum s_i(x) y_i}{\sum s_i(x)} .$$

Оно непрерывно, кроме того, $s(x) \in \mathrm{co}\, P(x) \subset B(x)$ для $x \in \mathcal{U}$.

Наконец, образуем соответствие $\widetilde{B}: X \rightrightarrows X$ по формуле

$$\widetilde{B}(x) = \begin{cases} s(x) & \text{, если } x \in \mathcal{U}, \\ B(x) & \text{, если } x \notin \mathcal{U}. \end{cases}$$

Как легко понять, соответствие $\widetilde{B}$ замкнуто и имеет непустые выпуклые значения. Поэтому по теореме Какутани существует неподвижная точка $x^* \in \widetilde{B}(x^*)$. Если $x^* \notin \mathcal{U}$, то $x^* \in B(x^*)$, т.е. $x^* \in F$, что противоречит $F \subset \mathcal{U}$. Если же $x^* \in \mathcal{U}$, то $x^* \in \mathrm{co}\, P(x^*)$, что противоречит условию $(ii)$. Это противоречие доказывает теорему.

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Покажем, что предложение I сводится к предложению 2. Эта редукция важна для нас как образец нашего способа сведения конечных задач к выпуклым.

Обозначим для конечного множества $X$ через $\Delta X$ симплекс, натянутый на $X$, т.е. подмножество в $\mathbb{R}_+^X$, состоящее из векторов $\lambda = (\lambda_x)_{x \in X}$, для которых $\sum_{x \in X} \lambda_x = 1$. Элементы $X$ естественно отождествляются с вершинами симплекса $\Delta X$. Если $P$ - бинарное отношение на $X$, оно естественно продолжается на $\Delta X$ по формуле

$$\widetilde{P}(\lambda) = P(\operatorname{supp} \lambda),$$

где $\operatorname{supp} \lambda = \{ x \in X, \ \lambda_x > 0 \}$ - носитель $\lambda$. Как легко понять, отношение $\widetilde{P}$ п.о.с. на $\Delta X$. Кроме того, $\lambda \notin \mathrm{co}\, \widetilde{P}(\lambda)$.

В самом деле, предположим, что $\lambda$ является выпуклой комбинацией элементов $x_1, \dots, x_n \in \tilde{P}(\lambda)$. Тогда $Y = \mathrm{supp}\lambda$ содержится в $\{x_1, \dots, x_n\}$, откуда $Y \subset P(Y)$. Но это противоречит ацикличности отношения $P$.

Таким образом, отношение $\tilde{P}$ на $\Delta X$ удовлетворяет предположениям предложения 2, поэтому существует максимальный элемент $\lambda^* \in \Delta X$. Но тогда любой $x$ из носителя $\lambda$ максимален относительно $P$, т.е. $P(x) = \emptyset$. Предложение I доказано.

Приведенное рассуждение наводит на мысль, что сами выпуклые комбинации элементов $X$ работали меньше, чем их носители, т.е. подмножества $X$. Обозначим через $\hat{X}$ множество всех непустых подмножеств $X$, $\hat{X} = 2^X - \{\emptyset\}$. В каком-то смысле $\hat{X}$ - аналог симплекса $\Delta X$. Снова $X$ канонически вкладывается в $\hat{X}$. Конструкция $\hat{X}$ в довольно грубой форме содержит идею "промежуточных", компромиссных альтернатив. Элементы $\hat{X}$, т.е. подмножества $X$, называем связками альтернатив, или просто связками. Снова любое отношение $P$ на $X$ обладает естественным продолжением $\hat{P}$ на $\hat{X}$:

$$(A, B) \in \hat{P} \iff B \subset P(A).$$

Наиболее характерной чертой отношения $\hat{P}$ является его монотонность относительно естественной структуры порядка (включения) на множестве $\hat{X}$. Это мотивирует следующее

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. *Пусть $X$ - конечное упорядоченное множество, для любых двух элементов которого существует точная верхняя грань $\sup$. Пусть $P$ - отношение на $X$, обладающее свойствами:*

*$(i)$ если $x \leq y$, то $P(x) \subset P(y)$;*

*$(ii)$ неверно, что $x \leq \sup P(x)$.*

*Тогда существует максимальный элемент.*

Условие монотонности $(i)$ - аналог условия непрерывности или п.о.с. Условие $(ii)$ - снова "обобщенная" иррефлексивность. Доказательство проводится в духе Биркгофа - Тарского. Предположим противное: $P(x)$ непусто для любого $x \in X$ и пусть $p(x)$ равно $\sup$ элементов $P(x)$. Тогда $p$ монотонно, т.е. $x \leq y$ влечет $p(x) \leq p(y)$. Пусть $e$ - наибольший элемент $X$, т.е. $\sup X$. Так как $e \geqslant p(e)$, то из монотонности получаем бесконечную убывающую цепочку

$$e \geqslant p(e) \geqslant p^2(e) \geqslant \ldots$$

В силу $(ii)$ все неравенства здесь строгие, откуда следует, что все элементы этой цепочки различные. Но это противоречит предположению конечности $X$. Предложение доказано.

## § 2. Уравновешенные состояния

Перейдем к более сложной ситуации. Пусть дано семейство множеств $(X_i)$, $i \in I$. Нужно выбрать по элементу $x \in X_i$, причем на выбор $x_i$ влияет выбор остальных $x_j$, $j \neq i$. Это типичная проблема в теории игр, где $X_i$ интерпретируются как множества стратегий.

Далее для простоты мы ограничимся случаем двух множеств, которые обозначаются $N$ и $X$. Элементы $N$ называются участниками, а $X$ – альтернативами. В соответствии с § I интересуемся выбором наиболее предпочтительных альтернатив. Для этого с каждым участником $i \in N$ свяжем предпочтение $P_i$ на множестве $X$. Влияние альтернатив на выбор зададим пока тем, что с каждой альтернативой $x \in X$ свяжем коалицию "любимчиков" $S(x) \subset N$. Предпочтение коалиции $S \subset N$ формируется из индивидуальных предпочтений ее членов по правилу единогласия, $P_S = \bigcap_{i \in S} P_i$. Состояние $(S, x)$, где $S$ – непустая коалиция, а $x$ – альтернатива, называется уравновешенным, если $S = S(x)$, а $P_S(x) = \emptyset$. Иначе говоря, альтернатива $x$ уравновешена, если она является наилучшей для коалиции ее "любимчиков".

ЗАМЕЧАНИЕ I. Понятие уравновешенного состояния по существу в таком виде было дано в [I]. Отметим, впрочем, три нюанса. I) Коалиционное предпочтение формируется по правилу единогласия, а не по более тонкому и капризному правилу Парето. 2) Формирование коалиции "любимчиков" $S(x)$ порождалось в [I] максимизацией некоторой функции $g_x$ на $N$. Такой более конкретный способ имеет свои преимущества и мы еще вернемся к нему. 3) В [I] рассматривались такие уравновешенные состояния, где $S(x) = N$; для этого приходится накладывать дополнительные требования.

Однако даже при естественных предположениях вроде конечности $N$ и $X$, ацикличности $P_i$ и т.д. уравновешенного состояния может не найтись. Пусть, к примеру, $N=\{1,2\}$, $X=\{x, y\}$, $P_1=(x>y)$, $P_2=(y>x)$, $S(x)=\{2\}$, $S(y)=\{1\}$. Состояние $x$ не уравновешено, ибо его "любимчик" 2 предпочитает $y$. Симметрично не годится и $y$. Интуитивно понятно, что отсутствие равновесия связано с резким переходом от $x$ к $y$, с отсуствием компромиссных состояний между $x$ и $y$. Как увидим, наличие компромиссов в виде выпуклых комбинаций или связок уже гарантирует существование уравновешенных состояний. Начнем с выпуклого случая (ср. [I]).

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4. *Пусть $N$ - конечное множество, $X$ - выпуклый компакт. Предположим, что*

*(i) соответствие $S: X \Rightarrow N$ замкнуто;*

*(ii) каждое $P_i$ п.о.с. и $x \notin co\, P_i(x)$.*

*Тогда существует уравновешенное состояние.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Определим соответствие $P: X \Rightarrow X$, полагая

$$P(x) = \bigcap_{i \in S(x)} P_i(x).$$

Проверим, что $P$ удовлетворяет условиям предложения 2. Свойство $x \notin co\, P(x)$ очевидно. Проверим поэтому п.о.с. Пусть $y$ принадлежит $P(x_0)$; нужно проверить, что и для близких точек $x$ выполняется $y \in P(x)$. Пусть $S_0 = S(x_0)$; тогда для $i \in S_0$ имеем $y \in P_i(x_0)$. Так как $P_i$ п.о.с., $y \in P_i(x)$ для близких $x$. Из конечности $N$ и замкнутости соответствия $S$ для близких $x$ имеем $S(x) \subset S_0$. Поэтому для таких $x$ и всех $i \in S(x)$ выполняется $y \in P_i(x)$, т.е. $y \in P(x)$.

Применяя теперь предложение 2, получаем существование альтернативы $x^*$, для которой $P(x^*)=\emptyset$, что и требовалось доказать.

Обсудим теперь случай, когда $X$ конечно, но когда уравновешенное состояние ищется в связках. Иначе говоря, расширяем исходное множество $X$ до множества $\hat{X} = 2^X - \{\emptyset\}$. Предпочтения $P_i$, как уже говорилось в §I, естественным образом продолжаются на $\hat{X}$. Однако нужно продолжить на $\hat{X}$ и соответствие "любимчиков", и бесспорного кандидата на такое продолжение нет.

Можно, конечно, поступить примитивно и положить для $A \in \hat{X}$

$$\hat{S}(A) = S(A) = \bigcup_{x \in A} S(x).$$

При таком понимании $\hat{S}$ уравновешенные связки, как мы увидим, всегда существуют. Однако это не самый интересный случай: формировать "любимчиков" связки $A \subset X$ как объединение "любимчиков" ее составляющих. Чтобы реализовать более интересные возможности, нам придется более тонко задавать "вкусы" альтернатив и способы их агрегации в духе предыдущего замечания.

А именно, будем считать, что предпочтения альтернативы $x$ заданы кардинально в форме функции полезности $g_x : N \to \mathbb{R}$ (или в виде вектора $g_x \in \mathbb{R}^N$ ). Предпочтение связки альтернатив будем формировать как выпуклую комбинацию $\sum_{x \in A} \lambda_x g_x$ функций полезности ее членов. Коэффициенты $\lambda_x$, т.е. веса членов связки, не фиксируются заранее, а также являются одной из составляющих уравновешенного состояния.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Уравновешенным состоянием в этой ситуации называется тройка $(S, Y, g)$, где $S \subset N$ – непустая коалиция, $Y \subset X$ – связка альтернатив, $g \in co\{g_x, x \in Y\}$, $S = Argmax(g)$ и $\hat{P}_S(Y) = \emptyset$.

Последнее условие $\hat{P}_S(Y) = \emptyset$ можно записать так:

$$P_S(Y) = \bigcap_{i \in S} (\bigcup_{y \in Y} P_i(y)) = \emptyset.$$

Говоря образно, коалиция $S$ выбирает связку $Y$, тогда как связка $Y$ выбирает коалицию $S$. Более точно, связка $Y$ является $S$-эффективным элементом $X$. Коалиция же $S$ состоит из участников, наилучших с точки зрения критерия $g : N \to \mathbb{R}$, полученного как взвесь функций полезности $g_y$, $y \in Y$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5. Пусть множества $N$ и $X$ конечны, а предпочтения $P_i$ ацикличны. Тогда существует уравновешенное состояние в связках.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассуждаем, как в замечании 3 из §1. Пусть $\Delta X$ – симплекс, натянутый на $X$. Функция $g : X \to \mathbb{R}$ по линейности продолжается на $\Delta X$. Предпочтения $P_i$ также продолжаются на $\Delta X$ : для $\lambda \in \Delta X$ полагаем

$$\widetilde{P}_i(\lambda) = P_i(\operatorname{supp} \lambda).$$

Там же проверено, что $\widetilde{P}_i$ п.о.с. и что $\lambda \notin \operatorname{co} \widetilde{P}_i(\lambda)$. Определим теперь соответствие $S : \Delta X \Rightarrow N$ , полагая

$$S(\lambda) = \operatorname{Argmax} \lambda .$$

Ясно, что $S$ замкнуто. Применяя предложение 4, получаем уравновешенное (в смесях) состояние $\lambda^* \in \Delta X$ , для которого $\widetilde{P}_S(\lambda^*) = \varnothing$ , где $S = \operatorname{Argmax} g(\lambda^*)$, а $g(\lambda^*) = \sum \lambda^*_x g_x$. Остается положить $Y = \operatorname{supp} \lambda^*$ и $g^* = g(\lambda^*)$; тогда предыдущие соотношения означают, что $(S, Y, g^*)$- уравновешенное состояние. Предложение доказано.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Если задано соответствие "любимчиков" $S : X \Rightarrow N$ , в качестве $g_x$ можно взять характеристические функции подмножеств $S(x) \subset N$ . Очевидно, что для любой функции $g \in \operatorname{co}(g_y, y \in Y)$ $\operatorname{Argmax}(g) \subset S(Y)$. Поэтому из предложения 5 следует существование уравновешенного состояния в такой форме: существует связка $Y \subset X$ такая, что $P_{S(Y)}(Y) = \varnothing$ .

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Если предпочтения участников $P_i$ также задавать при помощи функций полезности $u_i : X \to \mathbb{R}$ , получаем утверждение, которое по существу совпадает с леммой Скарфа [2]: существуют непустые $S \subset N$ и $Y \subset X$ такие, что:

а) $S = \operatorname{Argmax} g$ , где $g \in \operatorname{co}(g_y, y \in Y)$ ;

б) для любого $x \in X$ найдется $i \in S$ с $u_i(x) \leq \min_{y \in Y}(u_i(y))$.

Предположение о конечности $X$ можно заменить компактностью, если потребовать непрерывную зависимость $g_x$ от $x$ . Более того, можно считать, что вместо функции $g : X \to \mathbb{R}^N$ задано соответствие $G : X \Rightarrow \mathbb{R}^N$ .

ТЕОРЕМА 2. Пусть $N$ конечно, а $X$ - компакт. Предположим, что:

$(i)$ соответствие $G : X \Rightarrow \mathbb{R}^N$ имеет компактный график и непустые значения $G(x)$ ;

$(ii)$ предпочтения $P_i$ п.о.с. и ацикличны.

Тогда существует непустое $S \subset N$, непустое замкнутое $Y \subset X$ и $g \in \mathrm{co}\, G(Y)$ такие, что $S = \mathrm{Argmax}\, g$ и $P_S(Y) = \emptyset$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обозначим через $\hat{X}$ множество всех непустых замкнутых подмножеств $X$. Снабженное топологией Хаусдорфа $\hat{X}$ также компактно. Определим соответствие $\hat{G} : \hat{X} \Rightarrow \mathbb{R}^N$, полагая $\hat{G}(Y) = \mathrm{co}\, G(Y)$. Ясно, что $\hat{G}$ также имеет компактный график.

Для $x \in X$ обозначим через $\mathcal{U}_x$ множество тех пар $(Y, g)$ из $\hat{X} \times \mathbb{R}^N$, для которых $x \in P_{\mathrm{Argmax}\, g}(Y)$. Как при доказательстве предложения 4, проверяется, что $\mathcal{U}_x$ открыто. В самом деле, достаточно проверить, что если $x \in P_i(Y)$, то $x \in P_i(Y')$ для $Y'$, близких к $Y$ в топологии Хаусдорфа. Но $x \in P_i(Y)$ означает, что $Y$ пересекается с открытым множеством $P_i^{-1}(x)$. Тогда близкое к $Y$ множество $Y'$ также пересекает $P_i^{-1}(x)$.

Итак, $\mathcal{U}_x$ открыто в $\hat{X} \times \mathbb{R}^N$. Предположим теперь, что утверждение теоремы неверно и для любой пары $(Y, g) \in \hat{G}$ множество $P_{\mathrm{Argmax}\, g}(Y)$ непусто. Тогда семейство открытых $(\mathcal{U}_x)$, $x \in X$, покрывает график $\hat{G}$. В силу компактности $\hat{G}$ из этого покрытия можно выбрать конечное подпокрытие. Иначе говоря, найдется конечное подмножество $X^\circ \subset X$ такое, что для любой пары $(Y, g) \in \hat{G}$ множество $X^\circ$ пересекается с $P_{\mathrm{Argmax}\, g}(Y)$. Но это уже противоречит предложению 5, примененному к $X^\circ$. Точнее, пусть $P_i^\circ$ – ограничение $P_i$ на $X^\circ$, а $g_x^\circ \in G(x)$ для $x \in X^\circ$. Тогда согласно предложению 5 существует непустое $Y^\circ \subset X^\circ$ и $g \in \mathrm{co}(g_y^\circ, y \in Y^\circ) \subset \hat{G}(Y^\circ)$ такие, что пусто множество $P_{\mathrm{Argmax}}(Y^\circ) \cap X^\circ$. Это противоречие доказывает теорему 2.

## § 3. Применение к ядрам

Лемма Скарфа и его понятие примитивного множества сыграли определяющую роль при формировании нашего понимания уравновешенного состояния. Скарф применял свою лемму для доказательства известной теоремы о ядре сбалансированной игры. Естественно и нам обратиться к этой теме. Так как мы занимаемся коалиционными аспектами игры, важно знать не столько конкретные стратегии игроков, сколько то, чего может добиться такая коалиция, какие исходы она может гарантировать. Такая информация может быть задана с помощью форсирования.

Пусть $N$ – конечное множество участников, $X$ – множество альтернатив. Возможности коалиций будем задавать соответствием

$$F : 2^N \Rightarrow 2^X .$$

Соотношение $Y \in F(S)$ означает неформально, что коалиция $S$ может загнать исход в множество $Y \subset X$. Отталкиваясь от такой интерпретации, естественно предполагать, что $\varnothing \notin F(S)$, $X \in F(S)$ и $F$ монотонно в очевидном смысле: если $Y \in F(S)$, $Y \subset Y'$ и $S \subset S'$, то $Y' \in F(S')$. Если эти свойства выполнены для $F$, говорим, что $F$ – форсирование.

ЗАМЕЧАНИЕ I. Чтобы лучше освоиться с понятием форсирования, полезно выразить с его помощью обычную игру без побочных платежей [4]. Такая игра задается семейством $(V_S)$, $S \subset N$, где $V_S \subset \mathbb{R}^S$ – множества "выигрышей" коалиции $S$. Свяжем с такой игрой форсирование на $X = V_N$: коалиция $S$ форсирует подмножество $Y \subset X$, если $Y$ содержит множество вида $\pi_S^{-1}(y)$. Здесь $y \in V_S$, $\pi_S$ – ограничение на $X$ проекции $\mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^S$.

Другой пример форсирования доставляют так называемые простые игры. Простая игра задается множеством $W \subset 2^N$ "выигрывающих" коалиций. Будем считать, что коалиция из $W$ форсирует любое непустое подмножество $X$, а остальные коалиции форсируют только $X$. Это снова форсирование.

Чтобы говорить о ядре, зададимся предпочтениями $P_i$ участников $i \in N$ на множестве $X$. Ядро состоит тогда из таких альтернатив $x \in X$, что для любой непустой коалиции $S \subset N$

$$P_S(x) = \bigcap_{i \in S} P_i(x) \notin F(S) .$$

Иначе говоря, это такие исходы, которые никакая коалиция не может гарантированно улучшить для всех своих членов.

Например, если форсирование построено по игре без побочных платежей, приходим к обычному пониманию ядра такой игры.

Обратимся теперь к условиям, гарантирующим непустоту ядра. Начнем с формулировки условия сбалансированности, аналогичного условию Бондаревой – Скарфа. Напомним, что множество коалиций $K \subset 2^N$ называется сбалансированным, если существует функция $\lambda : K \to \mathbb{R}_+$ такая, что для любого $i \in S$ выполняется $\sum \lambda_S = 1$, где $S$ пробегает коалиции из $K$, содержащие $i$. Для наших целей удобно это условие несколько переформулировать

А именно, для непустого $S \subset N$ обозначим через $\delta_S$ центр тяжести грани $\Delta S$ в симплексе $\Delta N \subset \mathbb{R}^N$. В этих обозначениях множество $K$ сбалансировано тогда и только тогда, когда $\delta_N \in co\{\delta_S, S \in K\}$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Форсирование $F$ называется сбалансированным, если для любого сбалансированного множества коалиций $K \subset 2^N$ и любого семейства $(A_i), i \in N$, подмножеств множества $X$ выполнена импликация: если $\bigcap_{i \in S} A_i \in F(S)$ для любого $S \in K$, то $\bigcap_{i \in N} A_i \neq \emptyset$.

Несколько шире сбалансированность можно понимать так: если цели (т.е. множества $A_i$), намеченные участниками, достижимы любой коалицией из сбалансированного набора $K$, то они непротиворечивы (т.е. $A_i$ имеют общую точку).

ТЕОРЕМА 3. Пусть множество $X$ конечно, форсирование $F$ сбалансировано, а предпочтения $P_i$ ацикличны. Тогда ядро непусто.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для $x \in X$ обозначим через $H(x)$ множество таких непустых коалиций $S \subset N$, для которых

$$P_S(x) = \bigcap_{i \in S} P_i(x) \in F(S).$$

Иначе говоря, $H(x)$ состоит из коалиций, которые могут улучшить для себя исход $x$. Если ядро пусто, то $H(x)$ непусто для любого $x \in X$. В таком случае образуем многозначное соответствие $G : X \Rightarrow \Delta N$ по формуле

$$G(x) = \{\delta_S, S \in H(x)\}.$$

Согласно предложению 5 существует связка $Y \subset X$ и вектор $g^* \in co\, G(Y)$ такие, что $Y$ $S^*$-эффективна (т.е. $P_{S^*}(Y)$ пусто), где $S^* = Argmax\, g^*$.

Условие $g^* \in co\, G(Y)$ почти означает, что множество коалиций $H(Y)$ сбалансировано. Точнее, если к нему добавить одноэлементные коалиции, состоящие из участников, не вошедших в $S^*$, получим сбалансированное множество коалиций

$$K = H(Y) \cup (\bigcup_{j \notin S^*} \{j\}).$$

Теперь рассмотрим следующее семейство подмножеств $A_i \subset X$ :

$$A_i = \begin{cases} P_i(Y), & \text{если } i \in S^*, \\ X, & \text{если } i \notin S^*. \end{cases}$$

Утверждаем, что для любой коалиции $S \in K$ выполняется $\bigcap_{i \in S} A_i \in F(S)$. Это очевидно, если $S = \{j\}$, где $j \notin S^*$, ибо в этом случае $A_j = X$. Если же $S \in H(y)$ для некоторого $y \in Y$, то

$$\bigcap_{i \in S} A_i \supset \bigcap_{i \in S} P_i(Y) \supset \bigcap_{i \in S} P_i(y) \in F(S),$$

и из монотонности $F$ снова имеем $\bigcap_{i \in S} A_i \in F(S)$.

Вспоминая определение сбалансированности $F$, заключаем, что $\bigcap_{i \in N} A_i \neq \varnothing$. С другой стороны, $\bigcap_{i \in N} A_i = \bigcap_{i \in S^*} P_i(Y) = P_{S^*}(Y)$ пусто в силу установленной ранее $S^*$-эффективности связки $Y$. Это противоречие доказывает теорему.

Как обычно, конечность $X$ можно заменить компактностью, налагая подходящие топологические условия. Скажем, что форсирование $F$ компактно-порожденное, если для любого $Y \in F(S)$ найдется компактное $Y' \subset Y$ такое, что $Y' \in F(S)$.

ТЕОРЕМА 4. *Пусть пространство $X$ компактно, форсирование $F$ компактно порождено, а предпочтения $P_i$ ацикличны и открыты в $X \times X$. Тогда ядро непусто.*

Для доказательства нам понадобится

ЛЕММА. *Если $P_S(x) \in F(S)$, то $P_S(x') \in F(S)$ для всех $x'$, близких к $x$.*

Действительно, пусть $P_S(x) \in F(S)$. В силу компактной порожденности $F$ имеем $Y \in F(S)$ для некоторого компактного $Y \subset P_S(x)$. Так как $P_i$, а значит, и $P_S$, открыты, $P_S$ содержит множество вида $\mathcal{U} \times Y$, где $\mathcal{U}$ – окрестность точки $x$ в $X$. Но это значит, что $Y \subset P_S(x')$ для любого $x' \in \mathcal{U}$. По монотонности $F$ заключаем $P_S(x') \in F(S)$. Лемма доказана.

Перейдем теперь к доказательству теоремы. В обозначениях доказательства теоремы 3 получаем из леммы открытость множеств $H^{-1}(S)$. Предположение о пустоте ядра эквивалентно тому, что множества $H^{-1}(S)$ покрывают $X$. Выбирая конечное подпокрытие и вписывая в него замкнутое покрытие, получаем замкнутое и непустозначное подсоответствие $H' \subset H$, а затем и замкнутое соответствие $G : X \Rightarrow \Delta N$, $G(x) = \{ \delta_S , S \in H'(x) \}$. После этого все завершается, как раньше, обращением к теореме 2 вместо предложения 5.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Сбалансированность форсирования $F$ гарантирует непустоту ядра при любых ациклических предпочтениях $P_i$. Если же предпочтения $P_i$ заданы заранее, то непустоту ядра можно установить при более слабых условиях сбалансированности, апеллирующих к этим конкретным $P_i$. А именно, из доказательства теоремы 3 видно, что в качестве множеств $A_i$ при формулировке условия сбалансированности достаточно брать множества вида $P_i(Y)$ (где $Y \subset X$ ) или $X$.

Учитывая это замечание, в качестве следствия теоремы 4 получаем классическую теорему Скарфа о ядре сбалансированных игр без побочных платежей [2,4].

## ЛИТЕРАТУРА


I. Полтерович В.М. Уравновешенные состояния в задачах векторной оптимизации // Автоматика и телемеханика. - 1984, № 5.- С.89-96.

2. Scarf H. The core of an N-person game // Econometrica. - 1967. - N 35. - P.50-69.

3. Кирута А.Я., Рубинов А.М., Яновская Е.Б. Оптимальный выбор распределений в сложных социально-экономических задачах.- Л.: Наука, 1980.

4. Экланд И. Элементы математической экономики. - М.: Мир, 1983.



Поступила в ред.-изд. отдел
I2.0I.1987 г.