Выпуск 40(57) ОПТИМИЗАЦИЯ 1987 г.

УДК 519.98

НЕОГРАНИЧЕННЫЕ МНОЖЕСТВА В РАСШИРЕННЫХ K-ПРОСТРАНСТВАХ

А.И.Векслер

1. В теории векторных решеток существенную роль играет понятие порядковой ограниченности или неограниченности систем элементов в данной векторной решетке (ВР) [1-3]. Мы хотим обратить внимание на некоторые понятия типа неограниченности, но более сильные, чем простая неограниченность.

Через τ (с индексами) будем обозначать строго положительные вещественные числа, множество которых будем обозначать через R^{++}; символы k, n, l будут употребляться для обозначения натуральных чисел (а k и n - и для конечных ординалов), α, β - для обозначения ординалов, λ, μ, ν, τ - для обозначения бесконечных кардиналов. Как обычно, кардинал будем считать объединением всех меньших ординалов $\lambda=\{\alpha : \alpha\in\lambda\}$. Если это удобно, сразу будем считать, что данное семейство мощности λ заиндексировано ординалами $\alpha\in\lambda$ (например, $\{x_\alpha : \alpha\in\lambda\}$). Через E будем обозначать совокупность всех строго возрастающих к бесконечности последовательностей (k_n) натуральных чисел с квазипорядком $(k_n) \geqslant (k'_n)$, если $k_n \geqslant k'_n$ при $n > n_0$.

Под **типом** $t(X)$ ВР X понимается супремум мощностей множеств попарно-дизъюнктных (ненулевых) элементов в X. Пусть Q - канонический бикомпакт ВР X , т.е. стоунов экстремально несвязный бикомпакт полной булевой алгебры всех полос (компонент) в X . Если в X есть единица, то $t(X)$ совпадает с суслинским числом $c(Q)$ бикомпакта Q , но известно, что в Q имеется множество мощности $c(Q)$ попарно-дизъюнктных открыто-замкнутых (непустых) подмножеств тогда и только тогда, когда кардинал $c(Q)$ не является слабо недостижимым [4]. Отметим, что непротиворечивым в ZFC является утверждение, о том, что, например, мощность континуума является любым слабо недостижимым кардиналом.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ I. Бесконечное семейство положительных элементов в ВР X называется усиленно неограниченным семейством (УНС), если (порядково) неограниченна всякая его бесконечная часть.

Отметим, что в УНС, очевидно, не может существовать бесконечного числа равных между собою элементов и потому в ней всегда содержится усиленно неограниченное множество элементов той же мощности, что и само УНС.

Очевидно, в любой нетривиальной архимедовой ВР имеется счетное УНС, например, $\{nx : n \in \omega\}$ при $x > 0$. Сложнее вопрос о существовании несчетного УНС в X. Простейшим примером ВР X, в которой существует такое семейство, является прямая сумма $X^{(\lambda)} = \sum\{R_\alpha : \alpha \in \lambda\}$ несчетного числа вещественных прямых (с естественным порядком). Искомым УНС в $X^{(\lambda)}$ является семейство всех ортов; оно, кстати, состоит из попарно-дизъюнктных элементов.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ I. *Если в ВР X имеется счетное конфинальное подмножество $0 < x_1 < x_2 < \ldots$ (например, если X — ВР с сильной единицей), то в X нет несчетного УНС.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\operatorname{card} H > \omega$. Положим $H_n = \{x \in H : x \leq x_n\}$. Тогда $\operatorname{card} H_{n_0} > \omega$ при некотором натуральном n_0, т.е. H имеет ограниченную бесконечную часть.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Бесконечное семейство $\{x_\alpha : \alpha \in \lambda\}$ положительных элементов в ВР X называется максимально неограниченным семейством (МНС), если семейство $\{r_\alpha x_\alpha : \alpha \in \lambda\}$ усиленно неограниченно при любом выборе $r_\alpha \in R^{++}$.

Очевидно, всякое МНС является и УНС. Обратное неверно, например, $\{nx : n \in \omega\}$ МНС не является.

Простейшим примером ВР без МНС (даже счетных) является ВР с сильной единицей. С другой стороны, семейство всех ортов в $X^{(\lambda)}$ есть не только УНС (см. выше), но и МНС.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2 (критерий несуществования МНС). *В архимедовой ВР X не существует МНС тог-*

да и только тогда, когда в X выполнена теорема об аннулирующей последовательности (т.е. для любой последовательности $\{x_n\} \subset X^+$ найдется $\{r_n\} \subset R^{++}$ такая, что $r_n x_n \xrightarrow{(o)} 0$).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть в X выполнена теорема об аннулирующей последовательности, $\{x_n \subset X^+\}$ и $r_n x_n \xrightarrow{(o)} 0$. Тогда $\{r_n x_n : n : \omega\}$ ограниченно. Отсюда в X нет даже счетного МНС.

Обратно, пусть в X не выполнена теорема об аннулирующей последовательности и $\{x_n\} \subset X^+$ не (O)-аннулируема. Можно считать, не умаляя общности, что $\{x_n\}$ монотонно возрастает, в противном случае надо взять $\{x_1 \vee x_2 \vee \ldots \vee x_n : n \in \omega\}$. Поэтому никакая подпоследовательность $\{x_{n_\ell} : \ell \in \omega\}$ не является (O)-аннулируемой. Но тогда $\{r_\ell x_{n_\ell} : \ell \in \omega\}$ не ограниченно. Значит, $\{x_n\}$ - МНС. Предложение доказано.

Отметим еще, что если X и Y - ВР, $T: X \to Y$ - сюръективное линейное положительное отображение и в Y имеется УНС или МНС $\{y_\alpha : \alpha \in \lambda\}$ мощности λ, то таковое же имеется и в X. Действительно, пусть $x_\alpha \in X$ и $T(x_\alpha) = y_\alpha$. Тогда $T(|x_\alpha|) \geq T x_\alpha = y_\alpha$. Отсюда следует, что $\{|x_\alpha| : \alpha \in \lambda\}$ есть УНС (или МНС).

После этих простых предложений и иллюстративных примеров сформулируем основную цель заметки, которая состоит в рассмотрении вопроса о существовании (или отсутствии) УНС и МНС (главным образом, несчетных) в расширенных K-пространствах (в зависимости от мощностей множеств попарно-дизъюнктных элементов). Выбор в качестве объекта исследования именно расширенного K-пространства объясняется следующим обстоятельством. Пусть Y - ВР, X - расширенное K-пространство, Y вложено в X с сохранением линейных операций и порядка, $H \subset Y^+$. Тогда если H - УНС (МНС) в X , то оно будет таковым же и в Y , т.е. наименьшие шансы у данного семейства H быть УНС (МНС) именно в расширенном K-пространстве. В частности, в расширенном K-пространстве (в отличие от рассмотренной выше ВР $X^{(\lambda)}$) никакое семейство попарно-дизъюнктных элементов не является ни МНС, ни даже УНС.

2. X всюду дальше будет означать расширенное K-пространство. Вопрос о существовании счетного УНС в X ясен. В соответствии со сказанным после определения I такое УНС существует в

любом X . Предложение 2 позволяет сразу решить вопрос о существовании счетного МНС.

Действительно, если X - конечного типа, т.е. $t(X)=n$ и, следовательно, $X=R^n$, то в X выполнена теорема об аннулирующей последовательности и МНС быть не может. Если X - счетного (бесконечного) типа, т.е. $t(X)=\omega$, то в X счетное МНС может как существовать, так и не существовать (так как в X указанная теорема может как выполняться, так и не выполняться). Далее, известна теорема А.Г.Пинскера о том, что в расширенном K-пространстве теорема об аннулирующей последовательности равносильна теореме о диагональной последовательности [I,У.2.25] . Кроме того, теорема Пинскера - Владимирова [I, У.I.48; 4, теорема 4] утверждает, что если в K-пространстве Y выполнена теорема о диагональной последовательности , то в Y не существует множества мощности τ_0 попарно-дизъюнктных элементов (здесь τ_0 - наименьшая мощность неограниченного сверху в E множества; очевидно, $\omega<\tau_0\leqslant c$, но непротиворечиво неравенство $\tau_0<c$) и для любого $\tau<\tau_0$ существует K-пространство с теоремой об аннулирующей последовательности и множеством мощности τ попарно-дизъюнктных элементов. На самом деле, в теореме Пинскера - Владимирова можно ограничиться расширенными K-пространствами. Таким образом, если $\omega\leqslant t(X)<\tau_0$, то счетное МНС в X может как существовать, так и не существовать; если же $t(X)>\tau_0$ (или $t(X)\geqslant\tau_0$, если τ_0 не является слабо недостижимым), то счетное МНС в X заведомо есть. Принятие гипотезы континуума CH несколько упрощает ситуацию. В этом случае, если $t(X)>\omega$, то искомое МНС в X есть.

Покажем, как найти счетное МНС в расширенном K-пространстве X , в котором имеется множество мощности τ_0 попарно-дизъюнктных элементов.

КОНСТРУКЦИЯ I. Пусть в X существует множество мощности τ_0 попарно-дизъюнктных элементов. Реализуем X в виде K-пространства $C_\infty(Q)$ всех расширенных непрерывных функций на его каноническом бикомпакте Q . В силу условия в экстремально несвязном Q существует множество $\{Q_\alpha:\alpha\in\tau_0\}$ попарно-непересекающихся непустых открыто-замкнутых подмножеств с плотным объединением. Выберем в E неограниченное множество $B=\{b_\alpha:\alpha\in\tau_0\}$, где $b_\alpha=(k_n^\alpha)$ и $k_n^\alpha\uparrow_n+\infty$. Построим искомое МНС $\{x_n : n\in\omega\}$, взяв в качестве x_n единственный элемент из $C_\infty(Q)$, для которого $x_n(Q_\alpha)=k_n^\alpha$.

Для проверки того факта, что $\{x_n\}$ - МНС, возьмем в $\{x_n\}$ любую подпоследовательность $\{x_{n_\ell} : \ell\in\omega\}$ и $\{r_n\}\subset R^{++}$. Всегда можно считать, не умаляя общности, что $r_\ell = 1/k^\ell$, где $(k_\ell)\in E$. Допустим сначала, что $r_\ell k^\alpha_{n_\ell}\leq C_\alpha\in R^{++}(\ell\in\omega)$ при любом α. Тогда $k^\alpha_{n_\ell}\leq C_\alpha k_\ell\leq(k_\ell)^2$ при $\ell\geq\ell_\alpha$. Но это противоречит неограниченности $\{b_\alpha : \alpha\in T_0\}$ в L. Значит, для некоторого $\alpha_0\in T_0$ будем иметь $\sup\{r_\ell k^{\alpha_0}_{n_\ell} : \ell\in\omega\}=+\infty$. Но так как $r_\ell x_{n_\ell}(Q_{\alpha_0})=r_\ell k^{\alpha_0}_{n_\ell}$, то стсюда $\sup\{r_\ell x_{n_\ell}(Q_{\alpha_0}) : \ell\in\omega\}=+\infty$. Это и означает, что $\{r_\ell x_{n_\ell}\}$ не ограничено в X, т.е. $\{x_n\}$ - МНС.

Рассмотрим вопрос о существовании в X несчетного МНС.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. Пусть X - расширенное K-пространство, в котором существует множество мощности $\nu=\mu^\omega$ попарно-дизъюнктных элементов. Тогда в X существует МНС мощности μ.

Доказательство вытекает из следующей конструкции.

КОНСТРУКЦИЯ 2. Пусть Q - экстремально несвязный бикомпакт с максимальным множеством $\{Q_\alpha : \alpha\in\nu\}$, где $\nu=\mu^\omega$, попарно-непересекающихся непустых открыто-замкнутых множеств. Существует ровно $\nu=\mu^\omega$ счетных бесконечных подмножеств $\eta\subset\mu$. Значит, существует ровно $\mu^\omega\cdot c=\nu$ пар вида (η,b), где $\eta\subset\mu$, $\operatorname{card}\eta=\omega$ и $b=(k_n^b)\in E$. Занумеруем эти пары: $\{\gamma_\alpha : \alpha\in\nu\}$.

Пусть теперь $\beta\in\mu$. В качестве x_β возьмем единственный элемент из K-пространства $C_\infty(Q)$, для которого

$$x_\beta(Q_\alpha)=\begin{cases} 0, & \text{если } \gamma_\alpha=(\eta,b) \text{ и } \beta\notin\eta,\\ k_n^b, & \text{если } \beta=\beta_n\in\eta=\{\beta_1,\beta_2,\dots\}, \text{ где } \beta_1<\beta_2<\dots\end{cases}$$

Проверим, что $\{x_\beta : \beta\in\mu\}$ есть МНС.

Пусть $\eta=\{\beta_1,\beta_2,\dots\}\subset\mu$, где $\beta_1<\beta_2<\dots$, и $\{r_n\}\subseteq R^{++}$. Возьмем любую $b=(k_n^b)\in E$, для которой $r_n k_n^b\uparrow+\infty$. Рассмотрим $\gamma_{\alpha_0}=(\eta,b)$. Имеем $x_{\beta_n}(Q_{\alpha_0})=k_n^b$. Следовательно, $\sup\{r_n x_{\beta_n}(Q_{\alpha_0}) : n\in\omega\}=\sup\{r_n k_n^b\}=+\infty$. Это и означает, что $\{x_\beta : \beta\in\mu\}$ - МНС.

СЛЕДСТВИЕ. Если $t(X)>c$ (или $t(X)\geqslant c$ при условии, что c не является слабо недостижимым), то в X существует несчетное МНС.

Итак, вопрос о существовании несчетного МНС положительно решен для достаточно "широких" расширенных K-пространств X, т.е. для случая достаточно больших $t(X)$. А как обстоит дело для малых $t(X)$? Предварительно установим критерий существования в X МНС данной мощности.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4. Для того чтобы в расширенном K-пространстве $X=C_\infty(Q)$ нашлось МНС мощности $\mu\geqslant\omega$, необходимо и достаточно, чтобы в Q нашлось семейство мощности μ Θ-множеств (т.е. нигде не плотных нуль-множеств), никакое бесконечное подсемейство которого нельзя погрузить в одно Θ-множество.

ЗАМЕЧАНИЕ. С учетом предложения 2 этот результат при $\mu=\omega$ есть в точности результат З.Т.Дикановой [6, теорема 4].

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО предложения. Достаточность. Пусть $\{\Theta_\alpha:\alpha\in\mu\}$ - данное семейство Θ-множеств. Найдутся $x_\alpha\in C_\infty(Q)^+$ такие, что $x(\Theta_\alpha)=+\infty$. Возьмем любые $\alpha_n\in\mu\,(n\in\omega)$ и $r_n\in R^{++}$. Тогда не существует $x\in C_\infty(Q)$, мажорирующего $\{r_n x_{\alpha_n}:n\in\omega\}$. Действительно, в противном случае мы бы имели $x(\cup\{\Theta_{\alpha_n}:n\in\omega\})=+\infty$, в то время как $\{q\in Q:x(q)=+\infty\}$ есть Θ-множество.

Необходимость. Пусть $\{x_\alpha:\alpha\in\mu\}\subset C_\infty(Q)^+$ - МНС. Положим $\Theta=\{q\in Q:x_\alpha(q)=+\infty\}$. Покажем, что $\{\Theta_\alpha:\alpha\in\mu\}$ и есть искомое семейство.

Допустим противное. Тогда $\cup\{\Theta_{\alpha_n}:n\in\omega\}$ погружается в одно Θ-множество при некотором выборе $\{\alpha_n\}$. В этом случае из доказательства отмеченной выше теоремы З.Т.Дикановой вытекает существование $\{r_n\}\subset R^{++}$ такой, что $r_n x_{\alpha_n}\xrightarrow{(o)}0$. Значит, $\{r_n x_{\alpha_n}\}$ ограниченно, что невозможно, так как $\{x_\alpha\}$ - МНС.

Из предложения 3 и 4 сразу вытекает такое утверждение.

СЛЕДСТВИЕ. Пусть в произвольном несвязном бикомпакте Q существует множество мощности μ^{ω} попарно-непересекающихся открыто-замкнутых подмножеств. Тогда в Q существует семейство мощности μ Θ-множеств, никакое бесконечное подсемейство которого не погружается в одно Θ-множество.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5. Для любого $\mu \geq \omega$ существует расширенное K-пространство счетного типа, имеющее МНС мощности μ.

Доказательство вытекает из следующей конструкции.

КОНСТРУКЦИЯ 3. Пусть $S = I^{\mu}$ - тихоновский куб веса μ. Положим $F_{\alpha} = \Pi\{I_{\beta} : \beta \in \mu, \beta \neq \alpha\} \times \{O_{\alpha}\}$ $(\alpha \in \mu)$ (здесь O_{α} - это O в I_{α}). Очевидно, F - Θ-множество в S. Проверим, что $\bigcup\{^{d}F_{\alpha_n} : n \in \omega\}$ плотно в S для любого счетного множества $\{\alpha_n : n \in \omega\} \subset \mu$.

Действительно, всякое открытое в S множество имеет вид: $G = \Pi\{I_{\alpha} : \alpha \neq \beta_1, \dots, \beta_k\} \times G_{\beta_1} \times \dots \times G_{\beta_k}$, где G_{β_i} открыто в I_{β_i}. Пусть $\alpha_{n_0} \neq \beta_1, \dots, \beta_k$. Тогда

$$\Pi\{\{O_{\alpha}\} : \alpha \neq \beta_1, \dots, \beta_k\} \times G_{\beta_1} \times \dots \times G_{\beta_k} \subset F_{\alpha_{n_0}}$$, т.е. $G \cap F_{\alpha_{n_0}} \neq \emptyset$.

Пусть теперь Q - абсолют S при каноническом отображении $\varphi : Q \to S$. Положим $\Theta_{\alpha} = \varphi^{-1}(F_{\alpha})$. Тогда семейство $\{\Theta_{\alpha} : \alpha \in \mu\}$ Θ-множеств обладает тем же свойством, что и $\{F_{\alpha} : \alpha \in \mu\}$. Тем более оно удовлетворяет условию предложения 4. Отсюда в K-пространстве $X = C_{\infty}(Q)$ существует МНС мощности μ. Заметим, что $c(Q) = c(S) = \omega$, т.е. $t(X) = \omega$.

ЗАМЕЧАНИЕ I. Существуют и общие конструкции, позволяющие строить расширенные K-пространства такие, как в предложении 5.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Существуют расширенные K-пространства счетного типа, в которых имеются счетные МНС, но нет несчетных МНС. Примером такого K-пространства, как показал А.А.Флоринский, является максимальное расширение K-пополнения БР $C[0,1]$.

4. Рассмотрим вопрос о существовании в X несчетного УНС, а также подведем некоторые итоги.

Поскольку всякое МНС является и УНС, из результатов предыдущего пункта вытекает полное решение вопроса о существовании несчетных УНС в расширенных K-пространствах, достаточно "широких" (если в X имеется множество мощности c попарно-дизъюнктных элементов, то в X существует такое УНС) и частичное решение для "узких" K-пространств (существуют X счетного типа, имеющие несчетное УНС). Следующий результат в известной степени завершает картину.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 6. В р а с ш и р е н н о м K - п р о с т р а н с т в е с ч е т н о г о т и п а s в с е х п о с л е д о в а т е л ь н о с т е й в е щ е с т в е н н ы х ч и с е л н е с у щ е с т в у е т н е с ч е т н о г о УНС.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим s как топологическое пространство с топологией покоординатной сходимости. Хорошо известно, что s метризуемо в этой топологии и имеет счетную базу, пусть $\{G_n : n \in \omega\}$. Легко видеть, что каждое несчетное множество $M \subset s$ имеет предельную точку x_c в себе. Действительно, противное означало бы, что для каждого $x \in M$ существует базисная окрестность $G_{n(x)}$ такая, что $G_{n(x)} \cap M = \{x\}$, что противоречит счетности базы.

Теперь допустим, что в K-пространстве s существует усиленно неограниченное множество H. Можно считать, не умаляя общности, что для любого $x = (z_1^x, z_2^x, \dots) \in H$ имеет место $z_n^x \uparrow +\infty$. Пусть $x_0 \in H$ – предельная точка для H. Так как в s имеется счетный базис, то в H найдется $\{x_k : k \in \omega\}$, для которой $x_k \to x_0$.

Пусть $x_k = (z_n^k)$, $x_0 = (z_n^0)$. Тогда $z_n^k \to z_n^0$. Но в этом случае $\{z_n^k : n \in \omega\}$ ограничено для любого $n \in \omega$. Но тогда $\{x_k : k \in \omega\}$ ограниченно в K-пространстве s. Итак, в s нет несчетного усиленно неограниченного множества, а значит, нет и несчетного УНС.

Сформулируем некоторые полученные в заметке результаты в виде следующей теоремы.

ТЕОРЕМА. П у с т ь X – р а с ш и р е н н о е K-п р о с т р а н с т в о.

I. Е с л и т и п X м а л, $t(X) \leqslant \omega$, т о

а) в X с у щ е с т в у е т с ч е т н о е УНС, а н е с ч е т н о е м о ж е т к а к с у щ е с т в о в а т ь, т а к и н е с у щ е с т в о в а т ь;

б) МНС в X (счетное или несчетное) может как существовать, так и не существовать.

2. Если тип X достаточно велик (в X существует множество мощности c попарно-дизъюнктивных элементов), то в X существует несчетные МНС и УНС.

2'. (СН) Если $t(X) > \omega$, то в X существует несчетные МНС и УНС.

ЛИТЕРАТУРА

1. КАНТОРОВИЧ Л.В., ВУЛИХ Б.З., ПИНСКЕР А.Г. Функциональный анализ в полуупорядоченных пространствах. – М.: Гостехиздат, 1950.
2. ВУЛИХ Б.З. Введение в теорию полуупорядоченных пространств.– М.: Физматгиз, 1961.
3. КАНТОРОВИЧ Л.В., АКИЛОВ Г.П. Функциональный анализ. – М.: Наука, 1977.
4. ЕФИМОВ Б.А. Экстремальные несвязные бикомпакты и абсолюты // Труды Московск. мат. об-ва. – 1970. – Т.23. –С.235–276.
5. ВЛАДИМИРОВ Д.А. О полноте полуупорядоченного пространства // Усп. мат. наук. – 1960. – Т.15, № 2. – С.165–172.
6. ДИКАНОВА З.Т. О некоторых свойствах полуупорядоченного пространства непрерывных функций на бикомпакте // Усп. мат. наук. – 1959. – Т.14, № 6. – С.165–172.

Поступила в ред.-изд. отдел
10.10.1985 г.