УДК 519.11

О СИММЕТРИЧНЫХ СИСТЕМАХ ЛИНЕЙНЫХ НЕРАВЕНСТВ И G-ИНВАРИАНТНЫХ МНОГОГРАННИКАХ

А.И.Барвинок

В ряде задач линейного программирования многогранник планов необходимо обладает нетривиальной симметрией, например в широко известной задаче о назначениях. Поэтому сведения о комбинаторном типе такого многогранника представляют интерес при построении той или иной модификации симплекс-метода и при оценке его быстродействия. При решении линейных целочисленных задач также часто приходится сталкиваться с симметричными системами линейных уравнений и неравенств. Задача изучения таких объектов с симметрией была поставлена перед авторами профессором А.М.Вершиком.

Будем использовать методы, развитые Стенли, Гайзнером и Хокстером [1,2], теоремы элементарной теории представлений [3], ряд фактов коммутативной алгебры [4]. По существу, многие из доказанных теорем являются эквивариантными аналогами соответствующих результатов Стенли [1]; также будем пользоваться его обозначениями. В дальнейшем K - поле R или C; $K[X_1, X_2, \dots, X_n]$ - кольцо многочленов от n переменных. Если $\beta = (\beta_1, \dots, \beta)$, то $X^\beta = X_1^{\beta_1} \cdot X_2^{\beta_2} \cdot \dots \cdot X_n^{\beta_n}$; G - произвольная конечная группа; g - ее элемент; $|G|$, $|g|$ - соответственно их порядки; $co(y_1, y_2, \dots, y_n)$ - коническая оболочка точек $y_1, y_2, \dots, y_n$; $conv\{y_1, y_2, \dots, y_n\}$ - их выпуклая оболочка. ϱ будет обозначать некоторое неприводимое представление группы G. f-вектором многогранника называется вектор $(f_0, f_1, \dots, f_{d-1})$, где f_i - число i-мерных граней данного многогранника. h-вектор определяется равенствами

$$h_i = \sum_{j=-1}^{i-1} (-1)^{j-i+1} \binom{d-j}{d-i+1} f_j .$$

Магическим квадратом ранга r будем называть целочисленную неотрицательную матрицу $n \times n$, сумма элементов в каждой строке и каждом столбце которой равна r.

§ I. О действии конечной группы на конечно-порожденном модуле над кольцом многочленов

Пусть $A = K[X_1, \dots, X_n]$, G – подгруппа симметричной группы S_n, действующей на переменных $X_1, X_2, \dots, X_n$ перестановками. Пусть имеется также конечно-порожденный градуированный A-модуль $M = \bigoplus_{i=0}^{\infty} M_i$, где M_i – векторное пространство над K. Предположим, что имеется действие группы G на M такое, что выполняются следующие условия:

1) $g(\alpha X_i) = g(\alpha)\, g(X_i) \quad \forall X_i, \forall g \in G, \forall \alpha \in M$;

2) $\deg g(\alpha) = \deg \alpha \quad \forall g \in G, \forall \alpha \in M$.

В этом случае в M_i возникает представление группы G, и пусть $m_i(\rho)$ – кратность неприводимого представления ρ, а $tr_i(g)$ – след матрицы, представляющей g в M_i. Нас будут интересовать два степенных ряда:

$$f_\rho(z) = \sum_{i=0}^{\infty} m_i(\rho) z^i, \quad f_g(z) = \sum_{i=0}^{\infty} tr_i(g) z^i$$

и связь их с функцией Гильберта: $f(z) = \sum_{i=0}^{\infty} \dim_K M_i z^i$.

Справедливы следующие результаты.

ТЕОРЕМА I. Существуют многочлены $P(z)$, $Q(z)$ такие, что

а) $f_g(z) = P(z)/Q(z)$;

б) $Q(z) = (1 - z^{l_1^g}) \dots (1 - z^{l_k^g})$, где l_i^g – мощность i-й орбиты действия элемента g на множестве $\{X_1, \dots, X_n\}$.

ТЕОРЕМА 2. Существует пара многочленов $K(z), L(z)$ таких, что

а) $f_\rho(z) = K(z)/L(z)$;

б) $L(z)=\prod_{g\in G}(1-z^{\ell_i^g})$, где ℓ_i^g те же, что в теореме I.

Доказательство будет проведено в несколько шагов.

ЛЕММА I. Рассмотрим $K[X_1,\dots,X_n]$ как A-модуль с градуировкой $\deg X_i=1$. Тогда

$$f_g(z)=1/(1-z^{\ell_1^g})(1-z^{\ell_2^g})\dots(1-z^{\ell_r^g})$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Заметим, что $tr_k(g)$ равно числу g-инвариантных мономов $X_1^{\alpha_1}X_2^{\alpha_2}\dots X_n^{\alpha_n}$. Моном X^α является g-инвариантным, если $\forall i\ \ \alpha_i=\alpha_{g(i)}$; таким образом, $tr_k(g)$ есть число решений уравнения $\ell_1y_1+\ell_2y_2+\dots+\ell_ry_r=k$ с условиями $y_i\geqslant 0$, $y_i\in\mathbb{Z}$. Отсюда получаем требуемое.

ЛЕММА 2. Пусть M - свободный A-модуль с образующими $e_1,e_2,\dots,e_n$. Тогда

$$f_g(z)=c/(1-z^{\ell_1^g})(1-z^{\ell_2^g})\dots(1-z^{\ell_r^g});\quad c\in k.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим градуировку кольца $K[X_1,\dots,X_n]$ как модуля над собой $\deg X_i=1$; $K[X_1,\dots,X_n]=\bigoplus_{i=0}^{\infty}N_i$, и пусть ρ_{M_i} - представление G в M_i, а ρ_{N_i} - представление в N_i. Тогда получаем $\rho_{M_i}=\rho_{M_0}\otimes\rho_{N_i}$; $tr_{M_i}(g)=tr_{M_0}(g)\cdot tr_{N_i}(g)$. Отсюда $f_g(z)=tr_{M_0}(g)/(1-z^{\ell_1})(1-z^{\ell_2})\dots(1-z^{\ell_r})$. Нетрудно убедиться, что если положить $\deg e_i=d_i$, то $f_g(z)=(c_0+c_1z+\dots+c_mz^m)/\prod_i(1-z^{\ell_i})$.

ЛЕММА 3. Пусть M - конечно-порожденный градуированный A-модуль с действием G. Тогда существует резольвента $0\to\Lambda_t\to\Lambda_{t-1}\to\dots\to\Lambda_1\to\Lambda_0\to M$, где:

а) Λ_i - свободный конечно-порожденный модуль с действием G;

б) действие G коммутирует с гомоморфизмами $\varphi_i:\Lambda_i\to\Lambda_{i-1}$;

в) φ_i сохраняет градуировку.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $t=dh\,M$ (гомологическая размерность модуля M). Докажем по индукции, что существует точная последовательность $\Lambda_{t-1}\to\Lambda_{t-2}\to\ldots\to\Lambda_1\to\Lambda_0\to M\to 0$, удовлетворяющая требуемым условиям. Пусть $e_1, e_2, \ldots, e_k$ – образующие модуля M. Λ_0 свободно порождается e_i^g, $g\in G$, а действие G определяется условиями $g(e_i^{g_1}) = e_i^{gg_1}$; $\varphi_0(e_i^g) = g e_i$; $\deg e_i^g = \deg e_i$. Пусть построена резольвента $\Lambda_m\to\Lambda_{m-1}\to\ldots\to\Lambda_1\to\Lambda_0\to M$ и $Ker\ \varphi_m$ порожден элементами $u_1, u_2, \ldots, u_m$. Положим $\Lambda_{k+1} = \oplus u_i^g$, где $g u_i^{g_1} = u_i^{gg_1}$; $\varphi(u_i^g) = u_i$, и отображение φ_m определяется далее по A-линейности. Таким образом, построили резольвенту $\Lambda_{t-1}\to\Lambda_{t-2}\to\ldots\to\Lambda_0\to M\to 0$. Положим $\Lambda_t = Ker\ \varphi_{t-1}$, тогда Λ_t – проективный и по теореме Суслина свободный A-модуль, и построенная резольвента обладает требуемыми свойствами.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ I. Из полученной в лемме 3 резольвенты с учетом лемм I,2 находим искомые выражения:

$$f_g^M(z) = \sum_{i=0}^{t} (-1)^i f_g^{\Lambda_i}(z) \quad ; \quad f_g(z) = P(z)/Q(z).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2. Пусть $\chi_\varsigma(g)$ – характер элемента g в неприводимом представлении ς. Имеем $\sum_\varsigma m_i(\varsigma)\chi_\varsigma(g) = tr_i(g)$; $\sum_\varsigma f_\varsigma(z)\chi_\varsigma(g) = f_g(z)$. В силу соотношений ортогональности для характеров система однозначно разрешима.

§ 2. Случай модуля Коэна – Маколея

Пусть модуль M таков, что $Ext_A^i(M,A) = 0$, если $i\neq dh\,M$, и $\dim Ext_A^t(M,A) = 1$, если $t = dh\,M$. Обозначим $\Omega(M) = Ext_A^t(M,A)$; $t = dh\,M$.

ТЕОРЕМА 3. Пусть G действует на M, причем выполняются условия I),2) из § I. Тогда на $\Omega(M)$ также действует группа G с соблюдением тех же условий, причем $f_g^M(1/z) = \alpha z^n f_g^{\Omega(M)}(z)$, где α – характер одномерного представления.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим полученную в лемме 3 свободную резольвенту и сопряженную резольвенту: $0\to\Lambda_0^*\to\Lambda_1^*\to\ldots\to\Lambda_{t-1}^*\to\Lambda_t^*\to\Omega(M)\to 0$, где $\Lambda_i^* = Hom_A(\Lambda_i, A)_*$ и градуировка $\deg e_i^* = -\deg e_i$. Определим действие G на Λ_i^* условием $g(\lambda^*)|_\lambda = g(\lambda^*|g^{-1}(\lambda))$. Легко проверить, что действие G коммутирует с гомоморфизмом резольвенты и действие G на Λ_i^*

совпадает с действием на Λ_i. При этом

$$f_g^{\Lambda_i}(1/z) = (-1)^{?} z^{-n} f_g^{\Lambda_i^*}(z).$$

Действие на $\Omega(M)$ определяется действием G на единственном образующем, откуда $f_g^{\Omega(M)}(z) = \pm \alpha z^n f_g^M(1/z)$, где α – характер одномерного представления. Теорема доказана.

Если M – градуированный модуль Горстейна, т.е. $\Omega(M) = M$ с точностью до сдвига в градуировке, то легко видеть, что $\exists m$, $m > 0$: $f_g^M(1/z) = \pm\alpha z^m f_g^M(z)$.

ЗАМЕЧАНИЕ. Для функций $f_g(z)$ в общем случае нет аналогичных соотношений. Однако достаточным условием их существования является требование: для всех элементов g группы G четность числа орбит действия g на $\{x_1, \ldots, x_n\}$ одна и та же.

Нам потребуются также следующие факты теории инвариантов. Пусть R – кольцо, а G – конечная группа, действующая на нем автоморфизмами кольца. Тогда R является целым расширением кольца инвариантов $R^G = \{ r \in R : \forall g \; rg = r\}$. Если R – кольцо Коэна – Маколея, то R^G также является таковым [2,4].

Наконец, нам потребуется следующий простой факт о производящих функциях. Пусть $\{f(n)\}_{n=0}^{\infty}$ – последовательность, и $\sum_{n=0}^{\infty} f(n) z^n = R(z) = \frac{P(z)}{Q(z)}$, где $P(z), Q(z)$ – многочлены. Тогда для достаточно больших n $f(n) = \sum_i \gamma_i^n P_i(n)$, где $P_i(n)$ – некоторые многочлены и γ_i – корни многочлена $Q(z)$, причем будем считать, что этой формулой последовательность $f(n)$ определена и для отрицательных n. Если при этом $R(1/z) = \pm z^m R(z)$, $m > 0$, то $f(-1) = f(-2) = \ldots = f(-m+1) = 0$; $f(-n-m) = \pm f(m)$.

§ 3. Приложение и некоторые следствия

Пусть P – выпуклый целочисленный многогранник в R_+^d и G – группа симметрий целочисленной решетки такая, что $\forall g \in G$ $g(P) = P$. Рассмотрим функцию $F(n)$, равную числу целых точек, лежащих в многограннике nP и инвариантных относительно преобразования g, и функцию $F^*(n)$, равную числу целых точек, лежащих в относительной внутренности многогранника nP, инвариантных относительно преобразования g.

Тогда $F(n)=\sum \gamma_i^n P_i(n)$, где $P_i(n)$ – многочлены и $F(-n)=\pm F^{\circ}(n)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Следуя Стенли [7], рассмотрим подкольцо E кольца $A=R[X_1,\dots,X_d]$, порожденное мономами X^{α}, где $\alpha\in co(P)$. Стенли показал, что E – одномерный модуль Коэна – Маколея, причем $\Omega(E)$ можно интерпретировать как одномерный A-модуль порожденный мономами X^{β}, $\beta\in relint\,co(P)$. При этом $F(n)=tr_n(g)$ и функция $f_g^E(z)=\sum tr_k(g)z^k$ является производящей функцией последовательности $F(n)$. Применив теорему 3, получим требуемое.

Пусть теперь G – группа симметрий целочисленной решетки R^{n^2}, переводящая магические квадраты в магические квадраты; $F(r)$ – число инвариантных относительно действия g магических квадратов ранга r. Тогда $F(r)=\sum \gamma_i^r P_i(r)$, $\gamma_i^{|g|}=1$, $F(-1)=F(-2)=\dots=F(-n+1)=0$; $F(-n-r)=\pm F(r)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Построим кольцо по многограннику бистохастических матриц. В этом случае кольцо E, как показал Стенли [7], является кольцом Горенстейна с функцией Гильберта $F(z)=P(z)/(1-z)^{(n-1)^2+1}$. Функция $f_g(z)$ является производящей функцией последовательности $F(r)$. Из результатов теоремы 3 и предыдущего параграфа выводим требуемое.

Исходя из равенств $F_n(-1)=F_n(-2)=\dots=F_n(-n+1)=0$ и нескольких первых значений $F_n(r)$, можем вычислить коэффициенты многочленов P_i. Рассмотрим, к примеру, задачу вычисления числа магических квадратов 5 х 5, инвариантных относительно поворота на $\frac{\pi}{2}$ вокруг центра. Получим

$$F_5(4m)=2\tfrac{7}{24}m^4+6\tfrac{11}{12}m^3+8\tfrac{5}{24}m^2+4\tfrac{7}{12}m+1;$$

$$F_5(4m+1)=2\tfrac{7}{24}m^4+8\tfrac{5}{12}m^3+12\tfrac{5}{24}m^2+8\tfrac{1}{12}m+2;$$

$$F_5(4m+2)=2\tfrac{7}{24}m^4+9\tfrac{11}{12}m^3+15\tfrac{7}{8}m^2+13\tfrac{1}{12}m+4;$$

$$F_5(4m+3)=2\tfrac{7}{24}m^4+11\tfrac{5}{12}m^3+21\tfrac{17}{24}m^2+18\tfrac{7}{12}m+6.$$

§ 4. Симметричные многогранники

Пусть P – d-мерный симплициальный многогранник с n вершинами $v_1, \dots, v_n$. Кольцом Стенли – Райзнера многогранника P называется фактор-кольцо $R(P) = K[X_1, \dots, X_n]/(X_{i_1}X_{i_2}\dots X_{i_m})$, где вершины $v_{i_1}, v_{i_2}, \dots, v_{i_m}$ не образуют грань. Известно [1], что кольцо Стенли – Райзнера многогранника является кольцом Горенстейна с функцией Гильберта $f(z) = (h_0 + h_1 z + \dots + h_d z^d)/ /(1-z)^d$, где $h_i = \sum_{j=-1}^{i-1} (-1)^{j-i+1} \binom{d-j}{d-i+1} f_j$. Пусть имеется также G – группа комбинаторных автоморфизмов P. Тогда возникает действие G в кольце Стенли – Райзнера, причем выполняются условия 1),2) из §1. Мы можем рассмотреть функции

$$f_\xi(z) = \sum_{k=0}^{\infty} m_k(\xi) z^k \quad ; \quad f_g(z) = \sum_{k=0}^{\infty} tr_k(g) z^k .$$

Так как кольцо Стенли – Райзнера является одномерным модулем Горенстейна над кольцом многочленов, из предыдущих рассмотрений имеем: $tr_k(g)$ – квазимногочлен, значение которого равно следу элемента g в k-м слое градуировки кольца Стенли – Райзнера, и $tr_k(g) = \pm tr_{-k}(g)$. Рассмотрим ряд примеров.

ПРИМЕР 1. Пусть P – 4-мерный симплициальный многогранник с вершинами $v_1, v_2, \dots, v_{2n}$; $G = \{g : g^2 = e\}$ и симметрия переставляет вершины следующим образом: $g(v_i) = v_{2n-i+1}$.
Пусть ℓ_i – количество i-мерных неподвижных граней действия g. Имеем $\ell_0 = \ell_2 = 0$. Найдем связь между ℓ_i и функцией $f_g(z)$, построенной по кольцу Стенли – Райзнера. Получим $tr_1(g) = tr_3(g) = 0$; $tr_2(g) = \ell_1$; $tr_4(g) = \ell_1 + \ell_3$. Зная, что $tr_k(g) = P(k) + (-1)^k Q(k)$, где $\deg P(k), Q(k) \le 1$ по смыслу задачи, и что $tr_k = tr_{-k}$, окончательно получим $\ell_0 = \ell_2 = 0$, $\ell_1 = \ell_3$.

ПРИМЕР 2. Пусть P – 4-мерный симплициальный многогранник с вершинами $v_0, v_1, \dots, v_{2n+1}$ и действием $\mathbb{Z}_2$: $g(v_i) = = v_{2n+1-i}$, $i \ge 1$; $g|_{v_0, v_{2n+1}} = id$. Здесь возникают 2 различных случая:

а) $[v_0, v_{2n+1}]$ – ребро P;

б) $[v_0, v_{2n+1}]$ – не ребро P.

Случай а) дает $\ell_2 = 2$, $\ell_3 = \ell_1 - 2$, случай б) – $\ell_0 = 2$, $\ell_i = 0$, $i > 0$

или $\ell_2=4$, $\ell_3=\ell_1-6$, в зависимости от выбора знака в формуле $tr_{-k}(g)=\pm tr_k(g)$.

ПРИМЕР 3. Пусть P – 4-мерный симплициальный многогранник с вершинами $v_0, v_1, \ldots, v_{2n}$, и группа $\mathbb{Z}_2$ действует следующим образом: $g(v_0)=v_0$, $g(v_i)=v_{2n-i+1}$. Получим $tr_1(g)=1$; $tr_2(g)=\ell_1+1$; $tr_3(g)=1+\ell_2$; $tr_4(g)=1+\ell_1+\ell_2+\ell_3$. Отсюда $\ell_2=2$, $\ell_1=\ell_3+1$, $\ell_0=1$.

В качестве приложения исследуем комбинаторный тип следующих многогранников: $P^k=conv\{v_1,\ldots,v_n\}$, где $v_i=(\cos\frac{2\pi i}{n}, \sin\frac{2\pi i}{n}, \cos\frac{2\pi k}{n}i, \sin\frac{2\pi k}{n}i)$, а n – нечетное простое. Эти многогранники обладают группой комбинаторных симметрий, которая действует на множестве вершин как группа симметрий правильного многоугольника.

ТЕОРЕМА 4. Любая 3-мерная грань многогранника P^k_n остается инвариантной при действии подходящей нетривиальной комбинаторной симметрии.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть f_i – количество i-мерных граней многогранника P^k_n. Заметим, что каждое ребро многогранника является инвариантным относительно подходящей симметрии, поэтому $\sum_g \ell_1^g=f_1$, где ℓ_1^g – число инвариантных 1-мерных граней при симметрии g. Из уравнений примера 3 имеем $\ell_3^g=\ell_1^g-1$. Их уравнений Дена – Соммервилля получаем $\sum_g \ell_3^g=f_1-f_0$, или $\sum \ell_3^g=f_3$, т.е. каждая 3-мерная грань многогранника P^k_n инвариантна при подходящей симметрии.

ЗАМЕЧАНИЕ. Легко показать, что при $0<k_1<k_2<\frac{n-1}{2}$ многогранники $P^{k_1}_n, P^{k_2}_n$ комбинаторно различны. Для доказательства используем следующее соображение. Комбинаторный изоморфизм $P^{k_1}_n\to P^{k_2}_n$ продолжается до кусочно-линейного гомеоморфизма фактор-пространств граничных комплексов многогранников по действию циклической группы $\mathbb{Z}_n$, переставляющей вершины. Следовательно, получившиеся линзы $L^3(k_1)$, $L^3(k_2)$ были бы кусочно-линейно гомеоморфны. Но при $0<k_1<k_2<\frac{n-1}{2}$ это невозможно, так как $L^3(k_1)$, $L^3(k_2)$ имеют разное кручение Радемайстера [5].

Изучим теперь вопрос для произвольных, не обязательно симплициальных многогранников. Пусть P – d-мерный многогранник, G – группа его комбинаторных симметрий. Рассмотрим группы клеточных цепей граничного комплекса многогранника с коэффициентами, лежащими в поле, характеристика которого не делит порядок группы G. Пусть $m_i(\varrho)$ – кратность нетривиального неприводимого представления ϱ, возникающего при действии G в i-м пространстве клеточных цепей граничного комплекса многогранника P. В случае, если основное поле $\mathbb{Z}_2$, то $\ell_i \geqslant tr_i(g)$, где ℓ_i – по-прежнему количество неподвижных i-мерных граней. При этом всегда выполняются равенства

$$\sum_{i=0}^{d-1}(-1)^i m_i(\varrho)=0 \ ; \ \sum_{i=0}^{d-1}(-1)^i tr_i(g)=0 .$$

ПРИМЕР. Пусть P – 4-мерный многогранник с вершинами $v_1, v_2, \dots, v_8$, инвариантный относительно перестановки $v_i \to v_{(i+1) \bmod 8}$. Тогда если вершины v_1, v_4, v_7 образуют 2-мерную грань, то $tr_1(g)=1$ и, следовательно, $tr_3(g)=1$, так как $tr_1(g)-tr_2(g)+tr_3(g)=0$. Значит, вершины $v_1, v_2, v_4, v_5, v_7, v_8$ образуют грань P.

§ 5. Неравенства на h-вектор многогранника.

Рассмотрим симплициальный многогранник P с группой симметрий G, и пусть R – его кольцо Стенли – Райзнера. Рассмотрим кольцо инвариантов $R^G=\{r\in R: rg=r \ \forall g\}$. Как уже отмечалось, кольцо R^G является кольцом Коэна – Маколея. В ряде случаев из этого соображения удается получить оценки h-вектора многогранника. Рассмотрим следующий пример.

Пусть P – симплициальный 5-мерный многогранник, на котором g действует симметрией относительно прямой с двумя неподвижными точками: $g(v_i)=v_i \mid i=1,2$; $g(v_j)\neq v_j \mid j\neq 1,2$.

Допустим, что выполняется также условие: от $v_j \mid j\neq 1,2$ кратчайший путь до $g(v_j)$ содержит более, чем 2 ребра. Тогда выполняется следующий аналог условий Мак-Муллена:

$$h_2/2-1 \leq \binom{h_1/2+2,5}{2} .$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим кольцо инвариантов кольца Стенли – Райзнера, и пусть m^G – его максимальный идеал, порожденный многочленами ненулевой степени. В предположении условия о длине пути легко доказать, что m^G порождается элементами первой степени. Для функции Гильберта кольца R^G, очевидно, выполняется равенство

$$f_{R^G}(z) = \frac{1}{2} f(z) + \sum_{i=1}^{\infty} z^i + \frac{1}{2} \quad .$$

Применяя неравенства Маколея, получаем требуемое.

Автор выражает благодарность профессору Вершику А.М. за руководство работой.

ЛИТЕРАТУРА

1. Stanley R. Combinatorics and commutative algebra. – Birkhaüser, 1983.
2. Hochster M. Some applications of the Frobenius in characteristic 0 // Bull. Amer. Math. Soc. – 1978. – V.84, N 5.
3. Кэртис Ч., Райнер И. Теория представлений конечных групп и ассоциативных алгебр. – М.: Наука, 1969.
4. Бурбаки Н. Коммутативная алгебра. – М.: Мир, 1971.
5. Милнор Дж. Кручение Уайтхеда // Математика. – 1967. – Т.11, № 1. – С.3–42.

Поступила в ред.-изд. отдел
17.04.1986 г.